Misura e integrazione secondo Lebesgue

November 4, 2020

La trattazione segue le linee di [1].
La Sezione 4 non è stata vista a lezione e pertanto non è richiesta.
Legenda simboli utili per il superamento dell'esame:

- ✔ è richiesta la dimostrazione
- ✢ è richiesta una traccia della dimostrazione
- ✖ non è richiesta la dimostrazione

1 Intervalli n-dimensionali e plurintervalli

Chiamo intervallo n-dimensionale o n-intervallo di estremi $\boldsymbol{a} = \big(a_1, a_2, \ldots, a_n\big)$, $\boldsymbol{b} = \big(b_1, b_2, \ldots, b_n\big) \in \mathbb{R}^n$, l'insieme

$$I := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \colon a_i < x_i \leq b_i, \qquad \forall i = 1, \ldots, n\}.$$

L'insieme degli intervalli n-dimensionali si indica $\mathcal{I}$. Se $I \in \mathcal{I}$, chiamiamo *volume di* I il numero

$$\operatorname{vol}(I) := \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i).$$

Osservazione 1.1. ✢ *Se I_1 e I_2 sono due intervalli n-dimensionali, allora $I_1 \cap I_2$ è un intervallo n-dimensionale. Gli insiemi $I_1 \setminus I_2$ e $I_1 \cup I_2$ possono essere scritti come unione finita di intervalli n-dimensionali a due a due disgiunti.*

Proposizione 1.1. ✢ *Ogni aperto di $\mathbb{R}^n$ è unione numerabile di n-intervalli a due a due disgiunti.*

Proof. Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto non vuoto. Dimostriamo prima che A può essere scritto come unione numerabile di n-intervalli: considero la famiglia degli n-intervalli contenuti in A e ad estremi razionali:

$$\mathcal{V} := \left\{ I = \prod_{i=1}^{n} (a_i, b_i] \colon I \subseteq A, \quad a_i, b_i \in \mathbb{Q} \quad \forall i = 1, \ldots, n \right\}.$$

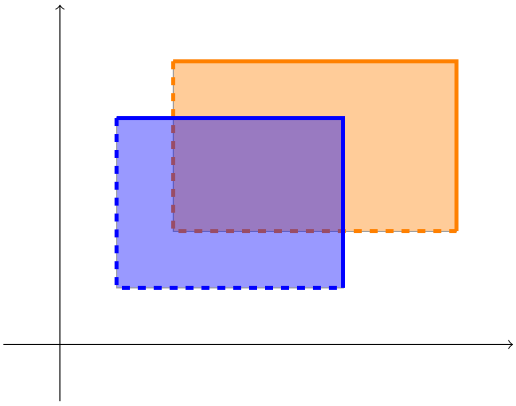

Figure 1: Unione, intersezione, differenza di n-intervalli

$\mathcal{V}$ è un insieme numerabile perchè ogni suo elemento è individuato dalla $2n$-upla $(a_1, a_2, \dots a_n, b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{Q}^{2n}$ che è un insieme numerabile. Inoltre, sicuramente, $\bigcup_{I \in \mathcal{V}} I \subseteq A$. Vogliamo dimostrare che vale anche l'inclusione opposta: sia $\boldsymbol{x} \in A$. A è aperto, quindi esiste $\varepsilon > 0$ tale che l'insieme

$$\left\{\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \dots y_n) \in \mathbb{R}^n \colon\ |y_i - x_i| < \varepsilon \quad \forall i = 1, \dots, n\right\}$$

è contenuto in A.

Poiché $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$, per ogni $i = 1, \dots, n$ esistono α_i, $\beta_i \in \mathbb{Q}$ tali che

$$x_i - \varepsilon < \alpha_i < x_i < \beta_i < x_i + \varepsilon.$$

Dunque, l'n-intervallo $I := \prod_{i=1}^{n} (\alpha_i, \beta_i]$ contiene il punto $\boldsymbol{x}$ e appartiene alla famiglia $\mathcal{V}$, quindi $\boldsymbol{x} \in \bigcup_{I \in \mathcal{V}} I$. Per l'arbitrarietà di $\boldsymbol{x}$ abbiamo $A \subseteq \bigcup_{I \in \mathcal{V}} I$.

Mostriamo ora che gli n-intervalli possono essere scelti a due a due disgiunti. Sia $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$, con I_k n-intervallo, per ogni $k \in \mathbb{N}$. Pongo $J_k := I_k \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} I_j$. Allora i J_k sono disgiunti due a due, ciascun J_k è unione finita di n-intervalli a due a due disgiunti e $\bigcup_{k=1}^{\infty} J_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k = A$. $\square$

2 Misura esterna

Indichiamo con $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ la famiglia di tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$. $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ è anche detto *insieme delle parti di* $\mathbb{R}^n$.

Dato $E \subseteq \mathbb{R}^n$ (ovvero $E \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$) definiamo *misura esterna di E*

$$\mathcal{L}^{n*}(E) := \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{vol}\,(I_k) \colon I_k \in \mathcal{I}, \quad E \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \right\}$$

Teorema 2.1. ✖ *Valgono le seguenti proprietà:*

1. $\mathcal{L}^{n*}(E) \in [0, +\infty]$ *è ben definita per ogni* $E \subseteq \mathbb{R}^n$*;*
2. $\mathcal{L}^{n*} \colon \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, +\infty]$ *è una funzione d'insieme monotona cioè*
$$E \subseteq F \implies \mathcal{L}^{n*}(E) \leq \mathcal{L}^{n*}(F);$$
3. $\mathcal{L}^{n*} \colon \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, +\infty]$ *è una funzione d'insieme* σ*-subadditiva cioè per ogni famiglia numerabile di sottoinsiemi di* $\mathbb{R}^n$*,* $(E_j)_{j=1}^{\infty}$ *si ha*
$$\mathcal{L}^{n*}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{L}^{n*}(E_j).$$
4. *Se* $I \in \mathcal{I}$*, allora* $\mathcal{L}^{n*}(I) = \mathrm{vol}\,(I)$*.*
5. $\mathcal{L}^{n*}(E) = \inf \{\mathcal{L}^{n*}(A) \colon A$ *aperto di* $\mathbb{R}^n, \ A \supseteq E\}$*.*

Proof. *1.* e *2.* sono ovvie.
3. Sia $(E_j)_{j=1}^{\infty}$ la famiglia numerabile che consideriamo. Se esiste almeno un $\overline{j}$ tale che $\mathcal{L}^{n*}\left(E_{\overline{j}}\right) = +\infty$, allora non c'è niente da dimostrare. Supponiamo dunque che $\mathcal{L}^{n*}(E_j)$ sia finito per ogni $j \in \mathbb{N}$.

Sia $\varepsilon > 0$: per ogni $j \in \mathbb{N}$ esiste una famiglia numerabile $\left(I_k^{(j)}\right)_{k=1}^{\infty}$ di n-intervalli tale che

$$E_j \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k^{(j)} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{vol}\left(I_k^{(j)}\right) < \varepsilon 2^{-j} + \mathcal{L}^{n*}(E_j).$$

Sicuramente $\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k^{(j)}$ quindi

$$\mathcal{L}^{n*}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{vol}\left(I_k^{(j)}\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \left(\varepsilon 2^{-j} + \mathcal{L}^{n*}(E_j)\right) = \varepsilon + \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{L}^{n*}(E_j)$$

e dunque

$$\mathcal{L}^{n*}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) \leq \varepsilon + \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{L}^{n*}(E_j) \qquad \forall \varepsilon > 0.$$

Per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ abbiamo la tesi.

4. Sia $I \in \mathcal{I}$. Dalla definizione di misura esterna abbiamo $\mathcal{L}^{n*}(I) \leq \operatorname{vol}(I)$. Vogliamo ora dimostrare la disuguaglianza opposta. Sia $\varepsilon > 0$ e sia $(I_k)_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{I}$ tale che

$$I \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{vol}(I_k) \leq \varepsilon + \mathcal{L}^{n*}(I).$$

Per ogni $k \in \mathbb{N}$ sia $J_k \in \mathcal{I}$ tale che

$$\overline{I_k} \subset \operatorname{int}(J_k), \qquad \operatorname{vol}(J_k) < \varepsilon 2^{-k} + \operatorname{vol}(I_k).$$

Dunque $\overline{I} \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{I_k} \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} \operatorname{int}(J_k)$, quindi dal ricoprimento aperto $(\operatorname{int}(J_k))_{k=1}^{\infty}$ posso estrarre un ricoprimento finito:

$$\exists K \in \mathbb{N} \, : \, \overline{I} \subseteq \bigcup_{k=1}^{K} \operatorname{int}(J_k).$$

Si ha

$$\operatorname{vol}(I) \leq \sum_{k=1}^{K} \operatorname{vol}(J_k) < \sum_{k=1}^{K} \Big(\varepsilon 2^{-k} + \operatorname{vol}(I_k)\Big) < \varepsilon + \sum_{k=1}^{K} \operatorname{vol}(I_k) \leq 2\varepsilon + \mathcal{L}^{n*}(I).$$

5. Per la monotonia della misura esterna (punto *2.*) abbiamo che per ogni $A \supseteq E$ si ha $\mathcal{L}^{n*}(A) \geq \mathcal{L}^{n*}(E)$ e dunque $\inf\{\mathcal{L}^{n*}(A) \colon A \text{ aperto di } \mathbb{R}^n,\ A \supseteq E\} \geq \mathcal{L}^{n*}(E)$.

Viceversa, sia $\varepsilon > 0$ e sia $(I_k)_{k=1}^{\infty}$ tale che $E \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{vol}(I_k) < \varepsilon + \mathcal{L}^{n*}(E)$. Per ogni $k \in \mathbb{N}$ sia $J_k \in \mathcal{I}$ tale che $\operatorname{int}(J_k) \supset I_k$, $\operatorname{vol}(J_k) < \operatorname{vol}(I_k) + \varepsilon 2^{-k}$. L'insieme $A := \bigcup_{k=1}^{\infty} \operatorname{int}(J_k)$ è aperto perché unione di aperti inoltre $A \supseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \supseteq E$. Si ha

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{n*}(A) = \mathcal{L}^{n*}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \operatorname{int}(J_k)\right) &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{L}^{n*}(\operatorname{int}(J_k)) \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{vol}(J_k) \leq \varepsilon + \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{vol}(I_k) \leq 2\varepsilon + \mathcal{L}^{n*}(E). \end{aligned}$$

Per ogni $\varepsilon > 0$ si ha dunque

$$\inf\{\mathcal{L}^{n*}(A) \colon A \text{ aperto di } \mathbb{R}^n,\ A \supseteq E\} \leq 2\varepsilon + \mathcal{L}^{n*}(E).$$

Dall'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ otteniamo la tesi. $\square$

Proposizione 2.2 (Test di Carathéodory). ✖ *Se $E,\ F \subseteq \mathbb{R}^n$ sono tali che*

$$\operatorname{dist}(E,F) := \inf\{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\| : \boldsymbol{x} \in E,\ \boldsymbol{y} \in F\} > 0$$

allora

$$\mathcal{L}^{n*}(E \cup F) = \mathcal{L}^{n*}(E) + \mathcal{L}^{n*}(F).$$

Proof. Sicuramente $\mathcal{L}^{n*}(E \cup F) \leq \mathcal{L}^{n*}(E) + \mathcal{L}^{n*}(F)$. Dobbiamo dimostrare la disuguaglianza opposta. Sia $d := \operatorname{dist}(E,F)$. È immediato vedere che

$$\mathcal{L}^{n*}(E) = \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{vol}(I_k) \colon I_k \in \mathcal{I},\quad E \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k,\quad \operatorname{diam}(I_k) < \frac{d}{4}\right\},$$
$$\mathcal{L}^{n*}(F) = \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{vol}(I_k) \colon I_k \in \mathcal{I},\quad F \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k,\quad \operatorname{diam}(I_k) < \frac{d}{4}\right\}.$$

Dunque $E \bigcup F$ può essere ricoperto da n-intervalli $(I_k)_{k=1}^{\infty}$ dove ciascun n-intervallo I_k interseca solo E o solo F. Da qui la tesi. □

Proposizione 2.3. *Valgono le seguenti proprietà:*

1. ✔ $\mathcal{L}^{n*}(\emptyset) = 0$;
2. ✔ *se E è un insieme finito o numerabile, allora $\mathcal{L}^{n*}(E) = 0$;*
3. ✖ *se I è un n-intervallo, allora $\mathcal{L}^{n*}(\partial I) = 0$.*

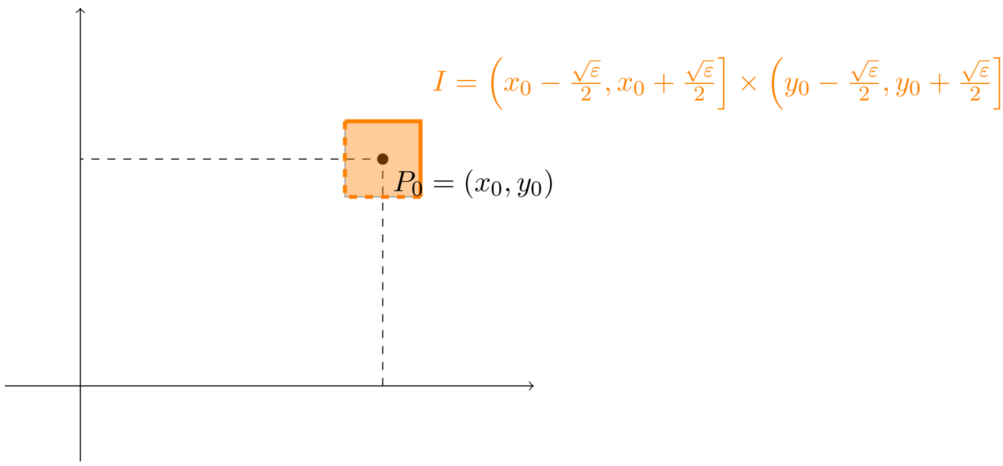

Figure 2: Ricoprimento di un singoletto nel piano

Proof. Sia $E = \emptyset$ o $E = \{\boldsymbol{x_0} = (x_1^0, \ldots x_n^0)\}$. Per $\varepsilon > 0$ e per $k \geq 1$, sia $I_k = \prod_{i=1}^n \left(x_i^0 - \frac{\sqrt[n]{\varepsilon 2^{-k}}}{2}, x_i^0 + \frac{\sqrt[n]{\varepsilon 2^{-k}}}{2}\right]$. Abbiamo $\operatorname{vol}(I_k) = \prod_{i=1}^n \sqrt[n]{\varepsilon 2^{-k}} = \varepsilon 2^{-k}$ e dunque $\sum_{k \geq 1} \operatorname{vol}(I_k) = \sum_{k \geq 1} \varepsilon 2^{-k} = \varepsilon$.

Dunque l'insieme vuoto e i singoletti hanno misura esterna nulla. Per il Teorema 2.1 hanno misura esterna nulla anche gli insiemi discreti. $\square$

Proposizione 2.4. ✖ *Sia* $(I_k)_{k=1}^K$ *una famiglia finita di* n*-intervalli a due a due disgiunti. Allora* $\mathcal{L}^{n*}\left(\bigcup_{k=1}^K I_k\right) = \sum_{k=1}^K \mathcal{L}^{n*}(I_k)$ *.*

Proof. Sia $\varepsilon > 0$. Per ogni $k = 1, \ldots, K$ sia $J_k \in \mathcal{I}$ tale che

$$\overline{J_k} \subset \operatorname{int}(I_k), \qquad \mathcal{L}^{n*}(I_k) = \operatorname{vol}(I_k) < \operatorname{vol}(J_k) + \varepsilon 2^{-k}.$$

Sicuramente la distanza tra J_k e J_s, $\operatorname{dist}(J_k, J_s)$, $k \neq s$ è positiva quindi

$$\sum_{k=1}^K \mathcal{L}^{n*}(I_k) = \sum_{k=1}^K \operatorname{vol}(I_k) < \varepsilon + \sum_{k=1}^K \operatorname{vol}(J_k) = \varepsilon + \mathcal{L}^{n*}\left(\bigcup_{k=1}^K J_k\right) < \varepsilon + \mathcal{L}^{n*}\left(\bigcup_{k=1}^K I_k\right).$$

Per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ abbiamo dunque $\sum_{k=1}^K \mathcal{L}^{n*}(I_k) \leq \mathcal{L}^{n*}\left(\bigcup_{k=1}^K I_k\right)$. La disuguaglianza opposta è sempre vera e dunque vale l'uguaglianza. $\square$

3 Insiemi misurabili

Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Dico che E è *misurabile secondo Lebesgue* o $\mathcal{L}^n$*-misurabile* o, semplicemente, *misurabile* se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists P = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k,\ I_k \in \mathcal{I} \ \text{ tale che } \ E \subseteq P \ \text{ e } \ \mathcal{L}^{n*}(P \setminus E) < \varepsilon.$$

La famiglia degli insiemi di $\mathbb{R}^n$ misurabili secondo Lebesgue si indica $\mathcal{M}^n$ o $\mathcal{M}$.
Se $E \in \mathcal{M}$ la misura esterna di E, $\mathcal{L}^{n*}(E)$, si chiama *misura di* E e si indica col simbolo $\mathcal{L}^n(E)$.

Osservazione 3.1. ✔ *Sia* $E \subseteq \mathbb{R}^n$*. Se* $\mathcal{L}^{n*}(E) = 0$*, allora* E *è misurabile. In particolare la famiglia degli insiemi misurabili secondo Lebesgue* $\mathcal{M}$ *contiene* $\emptyset$*, ogni insieme finito e ogni insieme numerabile.*

Proposizione 3.1. ✔ *Se* $A \subseteq \mathbb{R}^n$ *è aperto, allora* A *è misurabile.*

Proof. Se A è aperto, per la Proposizione 1.1 A è unione numerabile di n-intervalli: $A = P := \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$, $I_k \in \mathcal{I}$ dunque $\mathcal{L}^{n*}(P \setminus A) = \mathcal{L}^{n*}(\emptyset) = 0$. $\square$

Proposizione 3.2. ✖ *Sia* $E \subseteq \mathbb{R}^n$*.* E *è misurabile se e solo se* $\forall \varepsilon > 0$ *esiste* A *aperto tale che* $A \supseteq E$ *e* $\mathcal{L}^{n*}(A \setminus E) < \varepsilon$*.*

Proof. Supponiamo esista A aperto tale che $A \supseteq E$ e $\mathcal{L}^{n*}(A \setminus E) < \varepsilon$. Poiché A può essere scritto come unione numerabile di n-intervalli, E è misurabile.

Viceversa: sia $E \subset \mathbb{R}^n$ misurabile. Sia $\varepsilon > 0$: sappiamo che $\exists P = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$, $I_k \in \mathcal{I}$ tale che $\mathcal{L}^{n*}(P \setminus E) < \varepsilon$. Per ogni $k \in \mathbb{N}$ sia $J_k \in \mathcal{I}$ tale che $\operatorname{int}(J_k) \supset I_k$ e $\operatorname{vol}(J_k) < \operatorname{vol}(I_k) + \varepsilon\, 2^{-k}$. Pongo $A := \bigcup_{k=1}^{\infty} \operatorname{int}(J_k)$. A è unione di aperti, quindi è aperto. Inoltre $A \supseteq P \supseteq E$ e

$$A \setminus E = (A \setminus P) \cup (P \setminus E) = \bigcup_{k=1}^{\infty} (\operatorname{int}(J_k) \setminus I_k) \cup (P \setminus E)$$

quindi

$$\mathcal{L}^{n*}(A \setminus E) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{L}^{n*}(\operatorname{int}(J_k) \setminus I_k) + \mathcal{L}^{n*}(P \setminus E) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon\, 2^{-k} + \mathcal{L}^{n*}(P \setminus E) \leq 2\varepsilon.$$

□

Proposizione 3.3. ✖ *Se $F \subseteq \mathbb{R}^n$ è chiuso e limitato, allora F è misurabile.*

Proof. Sia $\varepsilon > 0$. Per il Teorema 2.1 esiste A aperto tale che $A \supset F$ e $\mathcal{L}^{n*}(A) \leq \mathcal{L}^{n*}(F) + \varepsilon$. L'insieme $A \setminus F$ è aperto, quindi esiste una famiglia numerabile di n-intervalli $(I_k)_{k=1}^{\infty}$ a due a due disgiunti tale che $A \setminus F = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$. Si ha dunque $\mathcal{L}^{n*}(A \setminus F) = \mathcal{L}^{n*}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{vol}(I_k)$. Basta perciò dimostrare che $\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{vol}(I_k) < \varepsilon$.
Per ogni $k \in \mathbb{N}$ sia J_k un n-intervallo tale che $\overline{J_k} \subset I_k$ e $\operatorname{vol}(J_k) > \operatorname{vol}(I_k) - \varepsilon\, 2^{-k}$. Sia $N \in \mathbb{N}$. Si ha

$$A = F \bigcup (A \setminus F) \supseteq F \bigcup \bigcup_{k=1}^{N} I_k \supseteq F \bigcup \bigcup_{k=1}^{N} \overline{J_k}.$$

F è compatto, gli insiemi $\overline{J_k}$ sono compatti, quindi $\bigcup_{k=1}^{N} \overline{J_k}$ è compatto e contenuto in $A \setminus F$. Di conseguenza $\operatorname{dist}\left(F, \bigcup_{k=1}^{N} \overline{J_k}\right)$ è positiva e dunque per il Test di Carathéodory, Proposizione 2.2,

$$\mathcal{L}^{n*}\left(F \cup \bigcup_{k=1}^{N} \overline{J_k}\right) = \mathcal{L}^{n*}(F) + \mathcal{L}^{n*}\left(\bigcup_{k=1}^{N} \overline{J_k}\right).$$

Si ha quindi

$$\mathcal{L}^{n*}(A) \geq \mathcal{L}^{n*}\left(F \cup \bigcup_{k=1}^{N} \overline{J_k}\right) \geq \mathcal{L}^{n*}(F) + \sum_{k=1}^{N} \operatorname{vol}(J_k) \geq \mathcal{L}^{n*}(F) + \sum_{k=1}^{N} \operatorname{vol}(I_k) - \varepsilon.$$

Otteniamo dunque

$$\sum_{k=1}^{N} \operatorname{vol}(I_k) \leq \mathcal{L}^{n*}(A) - \mathcal{L}^{n*}(F) + \varepsilon \leq 2\varepsilon.$$

Passando a limite per $N \to \infty$ abbiamo $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{vol}(I_k) \leq 2\varepsilon$ da cui la tesi. $\square$

Lemma 3.4. ✔ *Se $(E_k)_{k=1}^{\infty}$ è una famiglia numerabile di insiemi misurabili: $E_k \in \mathcal{M} \quad \forall k \in \mathbb{N}$, allora $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathcal{M}$.*

Proof. Sia $\varepsilon > 0$ e sia $(E_k)_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{M}$. Per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste A_k aperto di $\mathbb{R}^n$ tale che $A_k \supseteq E_k$ e $\mathcal{L}^{n*}(A_k \setminus E_k) < \varepsilon 2^{-k}$. L'insieme $A := \displaystyle\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ è aperto e $A \supseteq \displaystyle\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$.

Inoltre $A \setminus \displaystyle\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} (A_k \setminus E_k)$ e

$$\mathcal{L}^{n*}\left(A \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{L}^{n*}(A_k \setminus E_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon 2^{-k} = \varepsilon.$$

$\square$

Corollario 3.5. ✔ *Ogni chiuso di $\mathbb{R}^n$ è misurabile.*

Proof. Sia $F \subset \mathbb{R}^n$ chiuso. Per $k \in \mathbb{N}$ sia $F_k := F \cap \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \colon \|\boldsymbol{x}\| \leq k\}$. Ciascun insieme F_k è compatto dunque, per la Proposizione 3.3 è misurabile. Poiché $F = \displaystyle\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$, per il Lemma 3.4, anche F è misurabile. $\square$

Definizione 3.1. *Sia Ω un insieme non vuoto e sia $\mathcal{E}$ una famiglia di sottoinsiemi di Ω. Dico che $\mathcal{E}$ ùna σ-algebra di Ω se valgono le seguenti proprietà:*

1. *$\emptyset$, $\Omega \in \mathcal{E}$*

2. *se* $(E_k)_{k\geq 1}$ *è una famiglia numerabile di sottoinsiemi di* Ω *tale che* $E_k \in \mathcal{E}$ *per ogni* $k \in \mathbb{N}$*, allora* $\displaystyle\bigcup_{k\geq 1} E_k \in \mathcal{E}$

3. *se* $E \in \mathcal{E}$*, allora* $E^c := \Omega \setminus E \in \mathcal{E}$

Teorema 3.6. ✔ *La famiglia degli insiemi misurabili secondo Lebesgue* $\mathcal{M}$ *è una* σ*-algebra di* $\mathbb{R}^n$ *cioè*

1. $\emptyset$*,* $\mathbb{R}^n \in \mathcal{M}$*;*
2. *se* $(E_k)_{k=1}^{\infty}$ *è una famiglia numerabile di insiemi misurabili:* $E_k \in \mathcal{M} \quad \forall k \in \mathbb{N}$*, allora* $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathcal{M}$.
3. *se* $E \in \mathcal{M}$*, allora* $E^c := \mathbb{R}^n \setminus E \in \mathbb{R}^n$*;*

Proof. Abbiamo già dimostrato i punti *1.* e *2.*. Proviamo il punto *3.* Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ insieme misurabile. Per $k \in \mathbb{N}$ esiste A_k aperto tale che $A_k \supseteq E$ e $\mathcal{L}^{n*}(A_k \setminus E) \leq 2^{-k}$. Si ha

$$E^c = \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k^c\right) \cup \left(E^c \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k^c\right).$$

Ogni insieme A_k^c è chiuso e dunque misurabile, quindi anche $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k^c$ è misurabile. Per ogni $j \in \mathbb{N}$ si ha $E^c \setminus \displaystyle\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k^c \subseteq E^c \setminus A_j^c = A_j \setminus E$ dunque $\mathcal{L}^{n*}\left(E^c \setminus \displaystyle\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k^c\right) < 2^{-j}$.

Per l'arbitrarietà di $j \in \mathbb{N}$ si ha dunque $\mathcal{L}^{n*}\left(E^c \setminus \displaystyle\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k^c\right) = 0$ e quindi $E^c \setminus \displaystyle\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k^c$ è misurabile. E^c è dunque misurabile prché unione di due insiemi misurabili. □

Corollario 3.7. ✖ *Se* $(E_k)_{k=1}^{\infty}$ *è una famiglia numerabile di insiemi misurabili:* $E_k \in \mathcal{M} \quad \forall k \in \mathbb{N}$*, allora anche l'insieme* $\displaystyle\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$ *è misurabile.*

Proof. Poiché $\mathbb{R}^n \setminus \displaystyle\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} (\mathbb{R}^n \setminus E_k)$, per il Teorema 3.6 otteniamo la tesi. □

Corollario 3.8. ✖ *$E \subset \mathbb{R}^n$ è misurabile se e solo se $\forall \varepsilon > 0$ esiste F insieme chiuso tale che $F \subseteq E$ e $\mathcal{L}^{n*}(E \setminus F) < \varepsilon$.*

Proof. Supponiamo che E sia misurabile. Per il punto *3.* del Teorema 3.6 anche l'insieme E^c è misurabile, quindi esiste A aperto tale che $A \supseteq E^c$ e $\mathcal{L}^{n*}(A \setminus E^c) < \varepsilon$. Considero $F := A^c$. F è chiuso e $F = A^c \subseteq (E^c)^c = E$. Inoltre $E \setminus F = A \setminus E^c$ quindi $\mathcal{L}^{n*}(E \setminus F) = \mathcal{L}^{n*}(A \setminus E^c) < \varepsilon$.
Viceversa, supponiamo che $\forall \varepsilon > 0$ esista F insieme chiuso tale che $F \subseteq E$ e $\mathcal{L}^{n*}(E \setminus F) < \varepsilon$. Sia $A := F^c$. A è aperto, $A = F^c \supseteq E^c$ e $A \setminus E^c = E \setminus F$ quindi $\mathcal{L}^{n*}(A \setminus E^c) = \mathcal{L}^{n*}(E \setminus F) < \varepsilon$ dunque E^c è misurabile. Per il punto *3.* del Teorema 3.6 anche E è misurabile. □

Teorema 3.9 (σ-additività della misura di Lebesgue)**.** ✖ *Sia $(E_k)_{k=1}^{\infty}$ una famiglia di insiemi misurabili disgiunti due a due: $E_k \bigcap E_j = \emptyset$ se $j \neq k$. Allora $\mathcal{L}^n\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(E_k)$.*

Proof. Banalmente abbiamo

$$\mathcal{L}^n\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \mathcal{L}^{n*}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{L}^{n*}(E_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(E_k).$$

Dobbiamo dunque provare la disuguaglianza opposta. Supponiamo preliminarmente che gli insiemi E_k siano limitati. Sia $\varepsilon > 0$ e, per ogni $k \in \mathbb{N}$ sia $F_k \subseteq E_k$ chiuso tale che $\mathcal{L}^{n*}(E_k \setminus F_k) < \varepsilon 2^{-k}$. Di conseguenza

$$\mathcal{L}^{n*}(E_k) = \mathcal{L}^{n*}(F_k \cup (E_k \setminus F_k)) \leq \mathcal{L}^{n*}(F_k) + \varepsilon 2^{-k}.$$

Inoltre gli insiemi F_k sono compatti e disgiunti due a due, quindi hanno distanza positiva. Di conseguenza, per ogni $N \in \mathbb{N}$ si ha

$$\mathcal{L}^{n*}\left(\bigcup_{k=1}^{N} F_k\right) = \sum_{k=1}^{N} \mathcal{L}^{n*}(F_k)$$

Si ha dunque

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{n*}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) &\geq \mathcal{L}^{n*}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k\right) \geq \mathcal{L}^{n*}\left(\bigcup_{k=1}^{N} F_k\right) \\ = \sum_{k=1}^{N} \mathcal{L}^{n*}(F_k) &\geq \sum_{k=1}^{N} \left(\mathcal{L}^{n*}(E_k) - \varepsilon 2^{-k}\right) \geq -\varepsilon + \sum_{k=1}^{N} \mathcal{L}^{n*}(E_k). \end{aligned}$$

Passando a limite per $N \to \infty$ otteniamo dunque

$$\mathcal{L}^{n*}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) \geq -\varepsilon + \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{L}^{n*}(E_k) \qquad \forall \varepsilon > 0.$$

Per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ otteniamo la tesi.

Supponiamo ora che gli insiemi E_k non siano necessariamente limitati. Per ogni $j \in \mathbb{N}$ sia B_j la palla centrata nell'origine e raggio j: $B_j := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \colon \|\boldsymbol{x}\| < j\}$ e sia $E_{k,j} := E_k \cap (B_j \setminus B_{j-1})$. Allora gli insiemi $E_{k,j}$ sono misurabili, disgiunti due a due e $\bigcup_{j=1}^{\infty} E_{k,j} = E_k$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Di conseguenza si ha

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}^{n*}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) &= \mathcal{L}^{n*}\left(\bigcup_{k,j\in\mathbb{N}} E_{k,j}\right) = \sum_{k,j\in\mathbb{N}} \mathcal{L}^{n*}(E_{k,j}) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{L}^{n*}(E_{k,j})\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{L}^{n*}(E_k).
\end{aligned}
$$

□

Possiamo riassumere quanto fino ad ora detto nel seguente:

Teorema 3.10. ✔ *Sia $E \subset \mathbb{R}^n$. Le seguenti condizioni sono equivalenti*

1. *E è misurabile;*
2. *per ogni $\varepsilon > 0$ esiste A aperto, $A \supseteq E$ tale che $\mathcal{L}^{n*}(A \setminus E) < \varepsilon$;*
3. *per ogni $\varepsilon > 0$ esiste F chiuso, $F \subseteq E$ tale che $\mathcal{L}^{n*}(E \setminus F) < \varepsilon$;*
4. *esistono una successione monotona decrescente di aperti $(A_k)_{k=1}^{\infty}$ contenenti E ed un insieme N di misura nulla, $\mathcal{L}^n(N) = 0$, tali che $E = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \setminus N$;*
5. *esistono una successione monotona crescente di chiusi $(F_k)_{k=1}^{\infty}$ contenuti in E ed un insieme N di misura nulla, $\mathcal{L}^n(N) = 0$, tali che $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k \cup N$.*

Proof. Dimostriamo solo che *2.* $\implies$ *4.*
Per ogni $k \geq 1$ $\exists A_k \subset \mathbb{R}^n$ aperto tale che $E \subseteq A_k$, $\mathcal{L}^{n*}(A_k \setminus E) < 2^{-k}$.

Pongo $B_1 := A_1$ e, per ricorrenza, $B_k := A_k \cap B_{k-1}$ per $k \geq 2$. Gli insiemi B_k sono aperti e $B_k \subseteq B_{k-1}$. Inoltre $E \subseteq B_k \subseteq A_k$ e $\mathcal{L}^{n*}(B_k \setminus E) \leq \mathcal{L}^{n*}(A_k \setminus E) < 2^{-k}$. Considero $(\cap_{k\geq 1} B_k) \setminus E$: per ogni $j \geq 1$ abbiamo che $\left(\bigcap_{k\geq 1} B_k\right) \setminus E \subset B_j \setminus E$ dunque

$$
\mathcal{L}^{n*}((\cap_{k\geq 1} B_k) \setminus E) \leq \mathcal{L}^{n*}(B_j \setminus E) < 2^{-j}. \tag{1}
$$

Quindi può solo essere $\mathcal{L}^{n*}\left(\left(\bigcap_{k\geq 1} B_k\right) \setminus E\right) = 0$. Basta prendere $N := \left(\bigcap_{k\geq 1} B_k\right) \setminus E$ ed N, insieme alla famiglia $(B_k)_{k\geq 1}$ soddisfa la tesi. □

Teorema 3.11 (Continuità della misura). ✔ *Valgono le seguenti proprietà:*

1. *Sia $(E_k)_{k=1}^{\infty}$ una successione monotona crescente di insiemi misurabili. Allora l'insieme $E := \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ è misurabile e $\mathcal{L}^n\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \lim_{k\to\infty} \mathcal{L}^n(E_k)$;*
2. *Sia $(E_k)_{k=1}^{\infty}$ una successione monotona decrescente di insiemi misurabili e di misura finita. Allora l'insieme $E := \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$ è misurabile e*

   $\mathcal{L}^n\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \lim_{k\to\infty} \mathcal{L}^n(E_k)$.

Proof. Dimostriamo la prima parte: definiamo $F_1 := E_1$ e, per ogni $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, $F_k := E_k \setminus E_{k-1}$. Allora

$$E_k \cap E_j = \emptyset \quad k \neq j, \qquad \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k.$$

Dunque

$$\mathcal{L}^{n*}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \mathcal{L}^{n*}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{L}^{n*}(F_k) =$$
$$= \mathcal{L}^{n*}(E_1) + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\mathcal{L}^{n*}(E_k) - \mathcal{L}^{n*}(E_{k-1})\right) = \lim_{k\to\infty} \mathcal{L}^{n*}(E_k).$$

Dimostriamo ora la seconda parte. Per ogni $k \in \mathbb{N}$ sia $F_k := E_1 \setminus E_k$. Allora

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} (E_1 \setminus F_k) = E_1 \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$$

Inoltre gli F_k sono una successione monotona crescente di insiemi misurabili a cui posso applicare la proprietà precedente. Si ha dunque

$$\mathcal{L}^n\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \mathcal{L}^n\left(E_1 \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k\right) = \mathcal{L}^n(E_1) - \mathcal{L}^n\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k\right) =$$
$$= \mathcal{L}^n(E_1) - \lim_{k\to\infty} \mathcal{L}^n(F_k) = \mathcal{L}^n(E_1) - \lim_{k\to\infty} \left(\mathcal{L}^n(E_1) - \mathcal{L}^n(E_k)\right) = \lim_{k\to\infty} \mathcal{L}^n(E_k).$$

□

4 Alcuni insiemi interessanti

4.1 Insiemi di misura positiva che non contengono alcun intervallo e l'insieme di Cantor

Sia $\alpha \in \left(0, \frac{1}{3}\right]$. Considero $K_0 := [0,1]$. Da K_0 tolgo l'intervallo centrale aperto di ampiezza α: $A_0 := \left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2}, \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2}\right)$, $\mathcal{L}^1(A_0) = \alpha$. Pongo $K_1 := K_0 \setminus A_0$. K_1 è dato dall'unione di 2 intervalli compatti a due a due disgiunti.

Da ciascuno dei due intervalli che costituiscono K_1 tolgo l'intervallo centrale aperto di ampiezza $\frac{\alpha}{3}$. Dunque da K_1 tolgo un insieme aperto A_1 di misura $\mathcal{L}^1(A_1) = 2\frac{\alpha}{3}$. Pongo $K_2 := K_1 \setminus A_1$:

K_2 è costituito da $4 = 2^2$ intervalli compatti a due a due disgiunti. Da ciascuno di questi intervalli tolgo l'intervallo centrale aperto di lunghezza $\frac{\alpha}{3^2}$, dunque tolgo un aperto A_2 di misura $\mathcal{L}^1(A_2) = \alpha\left(\frac{2}{3}\right)^2$. Proseguo in questo modo: dal compatto K_n tolgo 2^n intervalli aperti ciascuno di lunghezza $\frac{\alpha}{3^n}$, dunque tolgo un aperto A_n con $\mathcal{L}^1(A_n) = \alpha\left(\frac{2}{3}\right)^n$ e pongo $K_{n+1} := K_n \setminus A_n$.

Considero $A := \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$. A è aperto e

$$\mathcal{L}^1(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}^1(A_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha\left(\frac{2}{3}\right)^n = 3\alpha.$$

Sia $K := \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = [0,1] \setminus A$. Si ha

1. K è compatto;
2. K non contiene nessun intervallo;
3. $\mathcal{L}^1(K) = 1 - 3\alpha$ e dunque $\mathcal{L}^1(K) > 0$ se $\alpha \in \left(0, \frac{1}{3}\right)$.
4. se $\alpha = \frac{1}{3}$, allora $\mathcal{L}^1(K) = 0$ ma K (che in questo caso si dice *insieme di Cantor*) ha comunque la potenza del continuo perché può essere messo in corrispondenza biunivoca con l'intervallo $[0,1]$.

4.2 Un insieme non misurabile

Introduciamo una relazione di equivalenza nell'intervallo $[0,1]$. Due punti x, $y \in [0,1]$ si dicono *equivalenti* se $x - y \in \mathbb{Q}$.

Considero un insieme E in cui compare uno ed un solo rappresentante di ciascuna classe di equivalenza:

$$
\begin{gathered}
E \subseteq [0,1], \\
x,\ y \in E, x \neq y \implies x - y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\
\forall x \in [0,1]\ \exists! y \in E \colon x - y \in \mathbb{Q}.
\end{gathered}
$$

Vogliamo dimostrare che E non è misurabile.

Per $r \in \mathbb{Q}$ definisco il *traslato di E*

$$
E^r := \{x + r \colon x \in E\}.
$$

Se E fosse misurabile, allora anche E^r lo sarebbe e $\mathcal{L}^1(E^r) = \mathcal{L}^1(E)\ \forall r \in \mathbb{Q}$.

Osserviamo che i traslati E^r sono a due a due disgiunti. Per assurdo: siano $r,\ s \in \mathbb{Q}$, $r \neq s$ e sia $y \in E^r \cap E^s$. Allora esistono $x_1,\ x_2 \in E$ tali che $y = x_1 + r = x_2 + s$. Dunque $x_1 - x_2 = s - r \in \mathbb{Q}$. Dunque $x_1 = x_2$ e $r = s$, mentre avevamo supposto $r \neq s$.

Per costruzione sappiamo che per ogni $y \in [0,1]$ esiste uno ed un solo $x \in E$ tale che $y - x \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]$. Dunque abbiamo

$$
[0,1] \subseteq \bigcup_{r \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} E^r \subseteq [-1,2].
$$

Di conseguenza, se E fosse misurabile avrei

$$
\begin{aligned}
1 = \mathcal{L}^1([0,1]) \leq \mathcal{L}^1\left(\bigcup_{r \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} E^r \right) &= \sum_{r \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} \mathcal{L}^1(E^r) \\
&= \sum_{r \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} \mathcal{L}^1(E) = \begin{cases} 0 & \text{se } \mathcal{L}^1(E) = 0, \\ +\infty & \text{se } \mathcal{L}^1(E) > 0. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Dunque dovrà essere $\mathcal{L}^1(E) > 0$. D'altra parte abbiamo anche

$$
\begin{aligned}
3 = \mathcal{L}^1([-1,2]) \geq \mathcal{L}^1\left(\bigcup_{r \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} E^r \right) &= \sum_{r \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} \mathcal{L}^1(E^r) \\
&= \sum_{r \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} \mathcal{L}^1(E) = \begin{cases} 0 & \text{se } \mathcal{L}^1(E) = 0, \\ +\infty & \text{se } \mathcal{L}^1(E) > 0. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Quindi deve essere $\mathcal{L}^1(E) = 0$, una contraddizione.

5 Funzioni misurabili

Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme misurabile. Sia $f\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$. Dico che f è una *funzione misurabile secondo Lebesgue* o che f è una *funzione $\mathcal{L}^n$-misurabile* se per ogni $t \in \mathbb{R}$ l'insieme

$$E_{f,t} := \{\boldsymbol{x} \in E\colon f(\boldsymbol{x}) \leq t\}$$

è misurabile.

Proposizione 5.1. *Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme misurabile e sia $f\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$. Le seguenti proprietà sono equivalenti:*

1. *f è una funzione $\mathcal{L}^n$-misurabile;*
2. *l'insieme $\{\boldsymbol{x} \in E\colon f(\boldsymbol{x}) > t\}$ è misurabile per ogni $t \in \mathbb{R}$;*
3. *l'insieme $\{\boldsymbol{x} \in E\colon f(\boldsymbol{x}) \geq t\}$ è misurabile per ogni $t \in \mathbb{R}$;*
4. *l'insieme $\{\boldsymbol{x} \in E\colon f(\boldsymbol{x}) < t\}$ è misurabile per ogni $t \in \mathbb{R}$;*
5. *per ogni $A \subseteq \mathbb{R}$ aperto, la retroimmagine $f^{-1}(A)$ è misurabile;*
6. *per ogni $F \subseteq \mathbb{R}$ chiuso, la retroimmagine $f^{-1}(F)$ è misurabile.*

Inoltre se una qualsiasi delle prime quattro proprietà vale per ogni t in un sottoinsieme D denso in $\mathbb{R}$, allora vale per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Proof. *1.* $\implies$ *2.* ✔
Basta osservare che $\{\boldsymbol{x} \in E\colon f(\boldsymbol{x}) > t\} = E \setminus E_{f,t}$.

2. $\implies$ *3.* ✔
Basta osservare che $\{\boldsymbol{x} \in E\colon f(\boldsymbol{x}) \geq t\} = \displaystyle\bigcap_{k=1}^{\infty} \left\{\boldsymbol{x} \in E\colon f(\boldsymbol{x}) > t - \frac{1}{k}\right\}$.

3. $\implies$ *4.* ✔
Basta osservare che $\{\boldsymbol{x} \in E\colon f(\boldsymbol{x}) < t\} = E \setminus \{\boldsymbol{x} \in E\colon f(\boldsymbol{x}) \geq t\}$.

4. $\implies$ *1.* ✔
Basta osservare che $E_{f,t} = \displaystyle\bigcap_{k=1}^{\infty} \left\{\boldsymbol{x} \in E\colon f(\boldsymbol{x}) < t + \frac{1}{k}\right\}$.

Questo prova l'equivalenza delle prime quattro proprietà.

✖ Ovviamente *5.* $\implies$ *2.*. Per provare la *5.* a partire dalle prime quattro proprietà osserviamo che per ogni a, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$ èmisurabile anche l'insieme $\{\boldsymbol{x} \in E\colon a < f(\boldsymbol{x}) \leq b\}$. Poiché ogni aperto A di $\mathbb{R}$ può essere scritto nella forma $A = \displaystyle\bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k]$, abbiamo $f^{-1}(A) = \displaystyle\bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-1}((a_k, b_k])$ che dunque è misurabile perché unione numerabile di misurabili.

Ovviamente *6.* $\implies$ *1.*. Per provare *6.* dalle altre proprietà, osserviamo che se F è chiuso, allora $A := \mathbb{R} \setminus F$ è aperto, dunque $f^{-1}(F) = E \setminus f^{-1}(A)$ è misurabile perché differenza di due misurabili.

Infine, sia $\bar{t} \in \mathbb{R} \setminus D$. Allora possiamo costruire una successione $(t_k)_{k=1}^{\infty}$ monotona decrescente, contenuta in D e convergente a $\bar{t}$. Si avrà dunque $E_{f,\bar{t}} = \displaystyle\bigcap_{k=1}^{\infty} E_{f,t_k}$, dunque $E_{f,\bar{t}}$ è misurabile. □

Lemma 5.2. ✖ *Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme misurabile e siano $f,\ g\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$ due funzioni misurabili. Allora l'insieme*

$$\{\boldsymbol{x} \in E\colon f(\boldsymbol{x}) < g(\boldsymbol{x})\}$$

è misurabile.

Proof. Per ogni $q \in Q$ considero gli insiemi

$$\{\boldsymbol{x} \in E\colon f(\boldsymbol{x}) < q\}\,, \qquad \{\boldsymbol{x} \in E\colon q < g(\boldsymbol{x})\}\,.$$

Questi insiemi sono entrambi misurabili perché f e g sono funzioni misurabili. Inoltre

$$\{\boldsymbol{x} \in E\colon f(\boldsymbol{x}) < g(\boldsymbol{x})\} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \Big(\{\boldsymbol{x} \in E\colon f(\boldsymbol{x}) < q\} \bigcap \{\boldsymbol{x} \in E\colon q < g(\boldsymbol{x})\}\Big)$$

dunque è misurabile. □

Proposizione 5.3. ✖ *Valgono le seguenti proprietà:*

1. *Le funzioni costanti sono misurabili,*
2. *Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$. E è misurabile se e solo se la sua funzione caratteristica*

$$\mathbb{1}_E\colon \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mapsto \begin{cases} 1 & \text{se } \boldsymbol{x} \in E, \\ 0 & \text{se } \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \setminus E. \end{cases}$$

   è una funzione misurabile.
3. *Se f e g sono misurabili in E, allora*
   (a) *le funzioni $\max\{f, g\}$, $\min\{f, g\}$ sono misurabili. In particolare sono misurabili le funzioni*

$$f^+ := \max\{f, 0\}, \quad f^- := \max\{-f, 0\}, \quad |f| := \max\{f, -f\}.$$

   (b) *se $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$, allora le funzioni $f + \alpha$ e $\alpha f + \beta g$ sono misurabili,*
   (c) *le funzioni $\frac{1}{f}$, f^2 e fg sono misurabili,*
   (d) *se $F \subset E$ è misurabile, allora $f|_F$ è misurabile,*
   (e) *se $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione continua, allora la composizione $\varphi \circ f\colon E \to \mathbb{R}$ è misurabile,*
4. *Se $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ è una successione di funzioni misurabili, allora le funzioni*

$$M(\boldsymbol{x}) := \sup_{k \in \mathbb{N}} f_k(\boldsymbol{x}), \qquad m(\boldsymbol{x}) := \inf_{k \in \mathbb{N}} f_k(\boldsymbol{x})$$

   sono misurabili,
5. *Se $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ è una successione di funzioni misurabili e se per ogni $\boldsymbol{x} \in E$ esiste $f(\boldsymbol{x}) := \lim_{k \to \infty} f_k(\boldsymbol{x})$, allora f è una funzione misurabile,*

Proof. I punti *1.* e *2.* sono banali.

3a) Sia $h := \max\{f, g\}$. Per ogni $t \in \mathbb{R}$ abbiamo $E_{h,t} = E_{f,t} \cap E_{g,t}$ e dunque h è misurabile. Analogamente, sia $k := \min\{f, g\}$. Per ogni $t \in \mathbb{R}$ abbiamo $E_{k,t} = E_{f,t} \cup E_{g,t}$ e dunque k è misurabile.

3b) $E_{f+\alpha,t} = E_{f,t-\alpha}$ e dunque è misurabile.

Dimostriamo che αf è misurabile. Se $\alpha = 0$, αf è una funzione costante e dunque è misurabile. Se $\alpha \neq 0$, allora

$$\{\boldsymbol{x} \in E \colon \alpha f(\boldsymbol{x}) \leq t\} = \left\{\boldsymbol{x} \in E \colon f(\boldsymbol{x}) \leq \frac{t}{\alpha}\right\} \qquad \text{se } \alpha > 0,$$

$$\{\boldsymbol{x} \in E \colon \alpha f(\boldsymbol{x}) \leq t\} = \left\{\boldsymbol{x} \in E \colon f(\boldsymbol{x}) \geq \frac{t}{\alpha}\right\} \qquad \text{se } \alpha < 0,$$

dunque è misurabile.

Se f e g sono misurabili, allora $E_{f+g,t} = \{\boldsymbol{x} \in E \colon f(\boldsymbol{x}) \leq t - g(\boldsymbol{x})\}$.

Ma la funzione $\boldsymbol{x} \mapsto t - g(\boldsymbol{x})$ è misurabile per quanto visto prima, quindi per il Lemma 5.2 l'insieme $E_{f+g,t}$ è misurabile.

3c) $E_{f^2,t} = \begin{cases} \emptyset & t < 0, \\ \left\{\boldsymbol{x} \in E \colon -\sqrt{t} \leq f(\boldsymbol{x}) \leq \sqrt{t}\right\} & t \geq 0 \end{cases}$ e dunque è misurabile.

Le funzioni f e g sono misurabili, quindi sono misurabili le funzioni $(f + g)^2$, f^2 e g^2. Dunque la funzione fg è misurabile perché $fg = \frac{1}{2}\big((f+g)^2 - f^2 - g^2\big)$.

3d) $E_{f|_F,t} = F \cap E_{f,t}$ dunque è misurabile.

3e) $E_{\varphi \circ f,t} = \big\{\boldsymbol{x} \in E \colon f(\boldsymbol{x}) \in \varphi^{-1}((-\infty, t])\big\}$ misurabile perché $\varphi^{-1}((-\infty, t])$ è un chiuso di $\mathbb{R}$.

4. Basta osservare che

$$\{\boldsymbol{x} \in E \colon M(\boldsymbol{x}) > t\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{\boldsymbol{x} \in E \colon f_k(\boldsymbol{x}) > t\},$$

$$\{\boldsymbol{x} \in E \colon m(\boldsymbol{x}) < t\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{\boldsymbol{x} \in E \colon f_k(\boldsymbol{x}) < t\}.$$

5. Anche in questo caso è sufficiente osservare che

$$\{\boldsymbol{x} \in E \colon f(\boldsymbol{x}) > t\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{\ell=1}^{\infty} \bigcap_{k=\ell}^{\infty} \left\{\boldsymbol{x} \in E \colon f_k(\boldsymbol{x}) > t + \frac{1}{n}\right\},$$

□

5.1 Approssimazione mediante funzioni semplici

Una funzione $\varphi \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ si dice *semplice* se è misurabile e assume solo un numero finito di valori. Ogni funzione semplice ammette una rappresentazione canonica in termine dei suoi insiemi di livello: siano a_1, a_2, …, a_N i valori assunti da φ. Per ogni $i = 1, 2, \dots, N$ sia E_i il corrispondente insieme di livello:

$$E_i := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \colon \varphi(\boldsymbol{x}) = a_i\}, \qquad i = 1, 2, \dots, N.$$

Possiamo allora scrivere

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{N} a_i \, \mathbb{1}_{E_i}(\boldsymbol{x}).$$

Osserviamo che gli insiemi $\{E_i\}_{i=1}^N$ sono una partizione di $\mathbb{R}^n$: $\bigcup_{i=1}^{N} E_i = \mathbb{R}^n$ e $E_i \cap E_j = \emptyset$ per $i \neq j$.

Lemma 5.4 (Lemma di campionamento)**.** ✢ *Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme misurabile e sia $f \colon E \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione nonnegativa. Allora f è misurabile se e solo se esiste $(\varphi_k)_{k=1}^{\infty}$ successione di funzioni semplici non negative tale che*

1. *la successione è monotona crescente:*

$$0 \leq \varphi_k(\boldsymbol{x}) \leq \varphi_{k+1}(\boldsymbol{x}) \qquad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall \boldsymbol{x} \in E;$$

2. *$\varphi_k(\boldsymbol{x})$ converge a $f(\boldsymbol{x})$ per ogni $\boldsymbol{x} \in E$:*

$$\lim_{k \to \infty} \varphi_k(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) \qquad \forall \boldsymbol{x} \in E.$$

Proof. Se esiste la successione approssimante $\{\varphi_k\}$ allora f è misurabile per la Proposizione 5.3.

Supponiamo che f sia misurabile. Estendendo $f(\boldsymbol{x}) \equiv 0$ per $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \setminus E$, possiamo sempre supporre che f sia definita su tutto $\mathbb{R}^n$.

Per ogni $k \in \mathbb{N}$ e $h = 0, 1, \dots, 4^k - 1$ considero gli insiemi

$$E_k := \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \colon f(\boldsymbol{x}) > 2^k\right\},$$
$$E_{k,h} := \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \colon \frac{h}{2^k} < f(\boldsymbol{x}) \leq \frac{h+1}{2^k}\right\}$$

che sono misurabili perché f è misurabile. Definisco

$$\varphi_k(\boldsymbol{x}) := \begin{cases} 2^k & \text{se } \boldsymbol{x} \in E_k, \\ \dfrac{h}{2^k} & \text{se } \boldsymbol{x} \in E_{k,h} \end{cases}$$

cioè

$$\varphi_k(\boldsymbol{x}) = \sum_{h=0}^{4^k-1} \frac{h}{2^k} \, \mathbb{1}_{E_{k,h}}(\boldsymbol{x}) + 2^k \, \mathbb{1}_{E_k}(\boldsymbol{x}).$$

Sicuramente ogni funzione φ_k è una funzione semplice nonnegativa.
Per ogni $\boldsymbol{x} \in E$ la successione $\varphi_k(\boldsymbol{x})$ è monotona crescente:
se $\varphi_k(\boldsymbol{x}) = 2^{k+1}$, allora $f(\boldsymbol{x}) > 2^{k+1} > 2^k$, dunque $\varphi_k(\boldsymbol{x}) = 2^k < \varphi_{k+1}(\boldsymbol{x})$;
se $\varphi_{k+1}(\boldsymbol{x}) = \dfrac{h}{2^{k+1}}$, allora $\dfrac{\frac{h}{2}}{2^k} = \dfrac{h}{2^{k+1}} < f(\boldsymbol{x}) \leq \dfrac{h+1}{2^{k+1}} = \dfrac{\frac{h+1}{2}}{2^k}$.
Se h è pari, allora $\varphi_k(\boldsymbol{x}) = \dfrac{\frac{h}{2}}{2^k} = \varphi_{k+1}(\boldsymbol{x})$;
se h è dispari, allora $\varphi_k(\boldsymbol{x}) = \dfrac{\frac{h-1}{2}}{2^k} < \varphi_{k+1}(\boldsymbol{x})$.

Proviamo che per ogni $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ la successione $\varphi_k(\boldsymbol{x})$ converge a $f(\boldsymbol{x})$:
se $f(\boldsymbol{x}) = +\infty$, allora $\varphi_k(\boldsymbol{x}) = 2^k$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ e dunque $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi_k(\boldsymbol{x}) = \lim\limits_{k\to\infty} 2^k = +\infty = f(\boldsymbol{x})$.
se $f(\boldsymbol{x}) < +\infty$, allora $\exists \overline{k}$ tale che, $\forall k \geq \overline{k}$ si ha $f(\boldsymbol{x}) < 2^{\overline{k}} < 2^k$. Dunque, per ogni $k \geq \overline{k}$ $\exists h \in \{0, 1, \dots, 4^k - 1\}$ tale che

$$\frac{h}{2^k} < f(\boldsymbol{x}) \leq \frac{h+1}{2^k}$$
$$\varphi_k(\boldsymbol{x}) = \frac{h}{2^k}$$

da cui

$$0 < f(\boldsymbol{x}) - \varphi_k(\boldsymbol{x}) \leq \frac{1}{2^k} \to 0 \quad \text{per } k \to \infty.$$

□

6 Integrale di Lebesgue

Sia $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ funzione semplice nonnegativa:

$$a_i \geq 0, \quad a_i \neq a_j, \qquad E_i := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \colon \varphi(\boldsymbol{x}) = a_i\} \in \mathcal{M}^n, \qquad i = 1, \dots, N.$$
$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{N} a_i \, \mathbb{1}_{E_i}(\boldsymbol{x}),$$

Se esiste $\overline{i}$ tale che $a_{\overline{i}} = 0$ pongo $a_{\overline{i}} \mathcal{L}^n(E_{\overline{i}}) = 0$. Con questa convenzione definiamo *integrale di* φ la somma finita

$$I(\varphi) := \sum_{i=1}^{N} a_i \mathcal{L}^n(E_i).$$

Proprietà 6.1. ✖ *Se α, β sono numeri reali non negativi e φ, ψ sono funzioni semplici nonnegative, allora*

$$I(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha I(\varphi) + \beta I(\psi).$$

Proof.

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{N} a_i \, \mathbb{1}_{E_i}(\boldsymbol{x}), \qquad \psi(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{M} b_j \, \mathbb{1}_{F_j}(\boldsymbol{x}).$$

Pongo $G_{ij} := E_i \cap F_j$. Sono insiemi a due a due disgiunti. Inoltre

$$(\alpha\varphi + \beta\psi)(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} (\alpha a_i + \beta b_j) \, \mathbb{1}_{G_{ij}}(\boldsymbol{x})$$

dunque

$$\begin{aligned} I(\alpha\varphi + \beta\psi) &= \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} (\alpha a_i + \beta b_j) \mathcal{L}^n(G_{ij}) \\ &= \alpha \sum_{i=1}^{N} a_i \sum_{j=1}^{M} \mathcal{L}^n(G_{ij}) + \beta \sum_{j=1}^{M} b_j \sum_{i=1}^{N} \mathcal{L}^n(G_{ij}) = \\ &\qquad = \alpha \sum_{i=1}^{N} a_i \mathcal{L}^n(E_i) + \beta \sum_{j=1}^{M} b_j \mathcal{L}^n(F_j) = \alpha I(\varphi) + \beta I(\psi). \end{aligned}$$

□

Sia $f \colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione misurabile nonnegativa. Definisco *integrale di f* e indico col simbolo $\int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x}$ la quantità

$$\sup \{ I(\varphi) \colon \varphi \text{ funzione semplice tale che } 0 \le \varphi(\boldsymbol{x}) \le f(\boldsymbol{x}) \quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \} . \tag{2}$$

Se $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è una funzione misurabile considero

$$f^+(\boldsymbol{x}) = \max\{f(\boldsymbol{x}), 0\}, \qquad f^-(\boldsymbol{x}) = \max\{-f(\boldsymbol{x}), 0\}.$$

Abbiamo già dimostrato che f^+ e f^- sono funzioni misurabili (Proposizione 5.3). Inoltre è facile vedere che

$$f = f^+ - f^-, \qquad |f| = f^+ + f^-.$$

Se almeno uno degli integrali $\int_{\mathbb{R}^n} f^+(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x}$ e $\int_{\mathbb{R}^n} f^-(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x}$ è finito, dico che la funzione f è *integrabile secondo Lebesgue* e pongo

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x} := \int_{\mathbb{R}^n} f^+(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x} - \int_{\mathbb{R}^n} f^-(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

Se entrambi gli integrali sono finiti dico che f è *sommabile secondo Lebesgue.*

Osservazione 6.1. *f è sommabile se e solo se $\int_{\mathbb{R}^n} |f(\boldsymbol{x})| \, \mathrm{d}\boldsymbol{x}$ è finito.*

Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ insieme misurabile e sia $f\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$. Dico che f è *integrabile (sommabile) in* E se la funzione $\widetilde{f}(\boldsymbol{x}) := \begin{cases} f(\boldsymbol{x}) & \boldsymbol{x} \in E, \\ 0 & \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \setminus E, \end{cases}$ è integrabile (sommabile). In tal caso si pone

$$\int_E f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} := \int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{f}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

Proposizione 6.1. ✖ *Valgono le seguenti proprietà:*

1. *se* φ *è una funzione semplice nonnegativa, allora* $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} = I(\varphi)$*;*
2. *se* f *è integrabile su* E *sottoinsieme misurabile di* $\mathbb{R}^n$ *e* $F \subset E$ *è misurabile, allora*
$$\int_F f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_E f(\boldsymbol{x})\, \mathbb{1}_F(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x};$$
3. *se* $\mathcal{L}^n(E) = 0$*, allora ogni funzione* f *è sommabile in* E *e* $\displaystyle\int_E f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0$*;*
4. *la famiglia delle funzioni sommabili in un insieme misurabile* E *è uno spazio vettoriale;*
5. *se* f *misurabile nonnegativa in* E *allora*
$$\int_E \alpha f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \alpha \int_E f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$
6. *se* f *e* g *sono funzioni misurabili nonnegative in* E *e* $f \le g$ *in* E*, allora*
$$\int_E f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} \le \int_E g(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x};$$

Proof. 1. Per definizione

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \sup\left\{I(\psi)\colon \psi \text{ semplice, } 0 \le \psi(\boldsymbol{x}) \le \varphi(\boldsymbol{x}) \quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n\right\}. \tag{3}$$

Sicuramente $\varphi \le \varphi$ quindi $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\mathrm{d}\boldsymbol{x} \ge I(\varphi)$.

Dimostriamo che vale anche la disuguaglianza opposta. Sia $\varepsilon > 0$. Per definizione di estremo superiore esiste ψ funzione semplice tale che

$$0 \le \psi \le \varphi, \qquad I(\psi) \ge \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\mathrm{d}\boldsymbol{x} - \varepsilon.$$

Poiché φ è semplice, sicuramente $I(\varphi) \ge I(\psi)$ dunque

$$I(\varphi) \ge \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\mathrm{d}\boldsymbol{x} - \varepsilon \qquad \forall \varepsilon > 0.$$

Per l'arbitrarietà di ε ottengo $I(\varphi) \geq \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \mathrm{d}\boldsymbol{x}$.

2. Per definizione

$$\int_F f(x) \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{f}(x) \mathrm{d}\boldsymbol{x}, \qquad \widetilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & \boldsymbol{x} \in F, \\ 0 & \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \setminus F \end{cases}$$

$$\int_E f(x)\, \mathbb{1}_F(x) \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{g}(x) \mathrm{d}\boldsymbol{x}, \qquad \widetilde{g}(x) := \begin{cases} f(x)\, \mathbb{1}_F(x) & \boldsymbol{x} \in E, \\ 0 & \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \setminus E. \end{cases}$$

Poiché $\widetilde{g}(x) = \widetilde{f}(x) \quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, i due integrali coincidono.

3. Supponiamo $f\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$ misurabile nonnegativa e sia
$\widetilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & \boldsymbol{x} \in E, \\ 0 & \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \setminus E \end{cases}.$

Sia φ una funzione semplice tale che $0 \leq \varphi(x) \leq \widetilde{f}(x) \quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$. Allora $\varphi(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} a_i\, \mathbb{1}_{E_i}(\boldsymbol{x})$ dove $a_1 = 0$ e $E_1 \supseteq \mathbb{R}^n \setminus E$. Si ha dunque

$$I(\varphi) = \sum_{i=1}^{k} a_i \mathcal{L}^n(E_i) = \sum_{i=2}^{k} a_i \mathcal{L}^n(E_i).$$

Ma, per ogni $i = 2, \dots, k$ si ha $E_i \subseteq E$ dunque $\mathcal{L}^n(E_i) = 0$ e quindi $I(\varphi) = 0$ per ogni funzione semplice nonnegativa tale che $0 \leq \varphi \leq \widetilde{f}$. Di conseguenza $\displaystyle\int_E f(x) \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{f}(x) \mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0$.

Per f di segno variabile la tesi segue banalmente considerando f^+ e f^-.

4. Abbiamo già visto (Proposizione 5.3) che per ogni α, $\beta \in \mathbb{R}$ e per ogni coppia di funzioni misurabili in E, f e g, la funzione $\alpha f + \beta g$ è ancora misurabile in E. Inoltre

$$|\alpha f(\boldsymbol{x}) + \beta g(\boldsymbol{x})| \leq |\alpha|\, |f(\boldsymbol{x})| + |\beta|\, |g(\boldsymbol{x})| \qquad \forall \boldsymbol{x} \in E.$$

Dunque se f e g sono sommabili in E, allora anche la funzione $\alpha f + \beta g$ è sommabile in E.

5. Senza perdere in generalità possiamo supporre che sia $E = \mathbb{R}^n$.
Se $\alpha = 0$ non c'è niente da dimostrare.
Supponiamo $\alpha > 0$. Sia φ funzione semplice, $0 \leq \varphi(\boldsymbol{x}) \leq f(\boldsymbol{x})\ \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$. Allora la funzione $\alpha\varphi$ è ancora semplice e $0 \leq \alpha\varphi(\boldsymbol{x}) \leq \alpha f(\boldsymbol{x})\ \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ dunque

$$\int_{\mathbb{R}^n} \alpha f(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x} \geq I(\alpha\varphi) = \alpha I(\varphi).$$

Per l'arbitrarietà di φ abbiamo

$$\int_{\mathbb{R}^n} \alpha f(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x} \geq \alpha \int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

Viceversa: sia ψ funzione semplice, $0 \le \psi(\boldsymbol{x}) \le \alpha f(\boldsymbol{x})$ $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$. Allora la funzione $\dfrac{1}{\alpha}\psi$ è ancora semplice e $0 \le \dfrac{1}{\alpha}\psi(\boldsymbol{x}) \le \dfrac{1}{\alpha} f(\boldsymbol{x})$ $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$. Dunque

$$\alpha \int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} \ge \alpha\, I\left(\frac{1}{\alpha}\psi\right) = \alpha \frac{1}{\alpha} I(\psi) = I(\psi).$$

Per l'arbitrarietà di φ abbiamo

$$\alpha \int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} \ge \int_{\mathbb{R}^n} \alpha f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

Per la doppia disuguaglianza otteniamo la tesi.

Se $\alpha < 0$, allora $(\alpha f)^+(\boldsymbol{x}) \equiv 0$, $(\alpha f)^-(\boldsymbol{x}) = (-\alpha) f(\boldsymbol{x})$. Dunque

$$\int_{\mathbb{R}^n} \alpha f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} = -\int_{\mathbb{R}^n} (-\alpha) f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} = -(-\alpha)\int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \alpha \int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

6. Senza perdere in generalità posso suppore che sia $E = \mathbb{R}^n$. Sia φ funzione semplice tale che $0 \le \varphi(\boldsymbol{x}) \le f(\boldsymbol{x})$ $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$. Allora abbiamo anche $0 \le \varphi(\boldsymbol{x}) \le g(\boldsymbol{x})$ $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$. Dunque

$$I(\varphi) \le \int_{\mathbb{R}^n} g(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

Per l'arbitrarietà di φ otteniamo la tesi. □

Lemma 6.2 (Lemma di Beppo-Levi). ✔ *Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ insieme misurabile e sia $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ una successione monotona crescente di funzioni misurabili non-negative in E. Sia $f(\boldsymbol{x}) := \lim_{k\to\infty} f_k(\boldsymbol{x}) = \sup_{k\to\infty} f_k(\boldsymbol{x})$. Allora f è misurabile in E e*

$$\int_E f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \lim_{k\to\infty} \int_E f_k(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

Proof. Abbiamo già dimostrato che l'estremo superiore di funzioni misurabili è una funzione misurabile.

Poiché $f_k(\boldsymbol{x}) \le f(\boldsymbol{x})$ per ogni $\boldsymbol{x} \in E$ e ogni $k \in \mathbb{N}$, abbiamo

$$\int_E f_k(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} \le \int_E f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

da cui, passando a limite,

$$\lim_{k\to\infty} \int_E f_k(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} \le \int_E f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Dobbiamo dimostrare la disuguaglianza opposta: se $\lim_{k\to\infty} \int_E f_k(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} = +\infty$, non c'è niente da dimostrare. Supponiamo dunque che $\lim_{k\to\infty} \int_E f_k(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ sia finito e sia φ una funzione semplice nonnegativa tale che $\varphi \leq f$ e sia $\beta \in (0,1)$. Per ogni $k \in \mathbb{N}$ considero l'insieme

$$A_k := \{\boldsymbol{x} \in E \colon f_k(\boldsymbol{x}) \geq \beta\varphi(\boldsymbol{x})\}\,.$$

$(A_k)_{k=1}^{\infty}$ è una successione monotona crescente di insiemi misurabili. Inoltre $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = E$, quindi abbiamo

$$\beta \int_{A_k} \varphi(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} \leq \int_{A_k} \varphi(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} \leq \int_{A_k} f_k(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} \leq \int_E f_k(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Sia $\varphi(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{N} a_i\, \mathbb{1}_{E_i}(\boldsymbol{x})$ la rappresentazione canonica di φ. Si ha

$$\int_{A_k} \varphi(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{N} a_i \mathcal{L}^n(A_k \cap E_i).$$

Dunque

$$\beta \sum_{i=1}^{N} a_i \mathcal{L}^n(A_k \cap E_i) \leq \int_E f_k(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Poiché per ogni $i = 1, 2, \ldots, N$ la successione $(A_k \cap E_i)_{k=1}^{\infty}$ è una successione monotona crescente di insiemi misurabili la cui unione è E_i, passando a limite per $k \to \infty$ otteniamo

$$\beta \sum_{i=1}^{N} a_i \mathcal{L}^n(E_i) \leq \lim_{k\to\infty} \int_E f_k(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

cioè

$$\beta \int_E \varphi(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} \leq \lim_{k\to\infty} \int_E f_k(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} \qquad \forall \beta \in (0,1).$$

Passando a limite per $\beta \to 1^-$ otteniamo

$$\int_E \varphi(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} \leq \lim_{k\to\infty} \int_E f_k(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

Per l'arbitrarietà della funzione semplice φ otteniamo la tesi. $\square$

Proposizione 6.3. ✖ *Valgono le seguenti proprietà:*

1. *Se f e g sono sommabili in E sottoinsieme misurabile di $\mathbb{R}^n$ e α, $\beta \in \mathbb{R}$, allora la funzione $\alpha f + \beta g$ è ancora sommabile in E e*

$$\int_E (\alpha f(\boldsymbol{x}) + \beta g(\boldsymbol{x}))\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \alpha \int_E f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \beta \int_E g(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} \tag{4}$$

2. se f è integrabile in E insieme misurabile di $\mathbb{R}^n$, allora

$$\left|\int_E f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right| \leq \int_E |f(\boldsymbol{x})|\,\mathrm{d}\boldsymbol{x};$$

3. se E ed F sono sottoinsiemi misurabili di $\mathbb{R}^n$ e $f\colon E \cup F \to \overline{\mathbb{R}}$ è una funzione integrabile, allora

$$\int_E f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_F f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_{E\cup F} f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_{E\cap F} f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

Proof. 1. Senza perdere in generalità possiamo ancora supporre che sia $E = \mathbb{R}^n$.

Abbiamo già dimostrato (Proposizione 6.1) che se f e g sono sommabili, allora anche la funzione $\alpha f + \beta g$ è sommabile. Dobbiamo provare la formula (4). La dimostrazione si svolge in più passi.

a. Abbiamo già dimostrato (Proposizione 6.1) che se f è una funzione misurabile nonnegativa, allora

$$\int_E \alpha f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \alpha \int_E f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

b. Dimostriamo ora che se f e g sono funzioni misurabili nonnegative in E, allora

$$\int_{\mathbb{R}^n} (f(\boldsymbol{x}) + g(\boldsymbol{x}))\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_{\mathbb{R}^n} g(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

Siano $(\varphi_k)_{k=1}^{\infty}$ e $(\psi_k)_{k=1}^{\infty}$ le successioni di funzioni semplici approssimanti f e g rispettivamente, come dal Lemma 5.4. Allora $(\varphi_k + \psi_k)_{k=1}^{\infty}$ è una successione monotona crescente di funzioni semplici che approssima puntualmente la funzione $f + g$. Dunque, applicando il Lemma di Beppo-Levi, Lemma 6.2, abbiamo

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} (f(\boldsymbol{x}) + g(\boldsymbol{x}))\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} &= \lim_{k\to\infty} I(\varphi_k + \psi_k) = \\ &= \lim_{k\to\infty} (I(\varphi_k) + I(\psi_k)) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_{\mathbb{R}^n} g(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}\end{aligned}$$

c. Supponiamo che f sia nonnegativa e che g sia nonpositiva. Dimostro che

$$\int_{\mathbb{R}^n} (f+g)(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_{\mathbb{R}^n} g(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

Sia $h := f + g$. Allora $h^+ = f$, $h^- = -g$, quindi

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} (f+g)(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} &= \int_{\mathbb{R}^n} h(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} := \int_{\mathbb{R}^n} h^+(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} - \int_{\mathbb{R}^n} h^-(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} - \int_{\mathbb{R}^n} -g(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_{\mathbb{R}^n} g(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}\end{aligned}$$

d. È sufficiente osservare che $(f\,\mathbb{1}_E + f\,\mathbb{1}_F)(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})\,\mathbb{1}_{E\cup F}(\boldsymbol{x})$ $\forall \boldsymbol{x} \in E \cup F$.

e. Siano ora f e g sommabili in $\mathbb{R}^n$ di segno variabile. Scompongo E nei seguenti quattro insiemi, che risultano disgiunti due a due:

$$\begin{aligned}
E_1 &:= \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \colon f(\boldsymbol{x}) \geq 0,\ g(\boldsymbol{x}) \geq 0\} \\
E_2 &:= \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \colon -g(\boldsymbol{x}) \leq f(\boldsymbol{x}) \leq 0 \leq g(\boldsymbol{x})\} \\
E_3 &:= \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \colon f(\boldsymbol{x}) < -g(\boldsymbol{x}) \leq 0 \leq g(\boldsymbol{x})\} \\
E_4 &:= \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \colon f(\boldsymbol{x}) \leq 0,\ g(\boldsymbol{x}) \leq 0\}.
\end{aligned}$$

Applicando i passi *c.* ed *a.* in ciascuno dei quattro insiemi ed il punto *e.* per la partizione $E = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{4} E_i$, si ottiene la tesi.

2. Si ha

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} &= \int_{\mathbb{R}^n} f^+(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} - \int_{\mathbb{R}^n} f^-(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} f^+(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f|(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}, \\
\int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} &= \int_{\mathbb{R}^n} f^+(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} - \int_{\mathbb{R}^n} f^-(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} \\
&\geq -\int_{\mathbb{R}^n} f^-(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} \geq -\int_{\mathbb{R}^n} |f|(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}.
\end{aligned}$$

3. È sufficiente osservare che per ogni $\boldsymbol{x} \in E \cup F$ si ha

$$(f\,\mathbb{1}_E + f\,\mathbb{1}_F)(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})\,\mathbb{1}_{E\cup F}(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{x})\,\mathbb{1}_{E\cap F}(\boldsymbol{x}).$$

□

Lemma 6.4. ✖ *Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ un insieme $\mathcal{L}^n$-misurabile e sia $L > 0$. Allora gli insiemi $E \times (0, L)$, $E \times (0, L]$, $E \times [0, L)$ e $E \times [0, L]$ sono $\mathcal{L}^{n+1}$-misurabili e la loro misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^{n+1}$ vale $L \cdot \mathcal{L}^{n*}(E)$.*

Proof. La dimostrazione si svolge in più passi: *1)* Osserviamo che se la tesi è vera per uno dei quattro insiemi in esame, allora è vera anche per gli altri tre infatti

$$E \times [0, L] \setminus E \times (0, L) \subseteq \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n+1} \colon x_{n=1} = 0\right\} \cup \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n+1} \colon x_{n=1} = L\right\}$$

cioè è contenuta nell'unione di due iperpiani e abbiamo già dimostrato che gli iperpiani hanno misura nulla. Dimostriamo dunque la tesi per l'insieme $E \times (0, L]$.

2) Se E è un n-intervallo I la tesi è vera perché $I \times (0, L]$ è un $n+1$-intervallo, quindi

$$\mathcal{L}^{n+1}(I \times (0, L]) = \mathrm{vol}_{n+1}(I \times (0, L]) = L\mathrm{vol}_n(I) = L\mathcal{L}^n(I).$$

3) Se $E,\ F \subseteq \mathbb{R}^n$ sono insiemi disgiunti, $\mathcal{L}^n$-misurabili per cui vale la tesi, allora la tesi vale anche per $E \cup F$:

Infatti, per E ed F abbiamo

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{n+1}(E \times (0, L]) &= L\mathcal{L}^n(E), \\ \mathcal{L}^{n+1}(F \times (0, L]) &= L\mathcal{L}^n(F). \end{aligned} \tag{5}$$

Sommando membro a membro in (5) otteniamo

$$\mathcal{L}^{n+1}(E \times (0, L]) + \mathcal{L}^{n+1}(F \times (0, L]) = L\left(\mathcal{L}^n(E) + \mathcal{L}^n(F)\right) = L\mathcal{L}^n(E \cup F).$$

Poiché

$$\begin{aligned} &(E \times (0, L]) \cap (F \times (0, L]) = (E \cap F) \times (0, L] = \emptyset, \\ &(E \times (0, L]) \cup (F \times (0, L]) = (E \cup F) \times (0, L] \end{aligned}$$

otteniamo che la tesi è vera per $E \cup F$.

4) Se $E,\ F \subseteq \mathbb{R}^n$ sono sue insiemi $\mathcal{L}^n$-misurabili per cui vale la tesi e $F \subseteq E$, allora la tesi vale anche per $E \setminus F$:

Infatti, se la tesi è vera per E ed F, allora valgono le uguaglianze (5). Sottraendo membro a membro otteniamo

$$\mathcal{L}^{n+1}(E \times (0, L]) - \mathcal{L}^{n+1}(F \times (0, L]) = L\left(\mathcal{L}^n(E) - \mathcal{L}^n(F)\right) = L\mathcal{L}^n(E \setminus F).$$

Poiché

$$(E \times (0, L]) \setminus (F \times (0, L]) = (E \setminus F) \times (0, L]$$

otteniamo che la tesi è vera per $E \setminus F$.

5) Se $(E_k)_{k=1}^{\infty}$ è una famiglia numerabile monotona crescente di insiemi misurabili per i quali la tesi è vera, allora è vera anche per l' insieme $E := \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$:

Infatti $E_k \subseteq E_{k+1} \implies E_k \times (0, L] \subseteq E_{k+1} \times (0, L]$ dunque $(E_k \times (0, L])_{k=1}^{\infty}$ è una successione monotona crescente di insiemi e $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}(E_k \times (0, L]) = E \times (0, L]$. Per la continuità della misura, Teorema 3.11 abbiamo

$$\mathcal{L}^{n+1}(E \times (0, L]) = \lim_{k \to \infty} \mathcal{L}^{n+1}(E_k \times (0, L]) = \lim_{k \to \infty} L\mathcal{L}^n(E_k) = L\mathcal{L}^n(E).$$

6) Per i punti *1)* e *5)* la tesi è vera per ogni $A \subseteq \mathbb{R}^n$ insieme aperto. Per il punto *4)* è quindi vera per ogni $F \subseteq \mathbb{R}^n$ insieme chiuso. Di nuovo per *5)* la tesi per ogni unione numerabile di insiemi chiusi F_k, $F_k \subseteq F_{k+1}$.

Per il Teorema 3.10 ogni insieme misurabile E può essere scritto come unione di un insieme di misura nulla N e di una unione di una famiglia numerabile crescente di chiusi: $E = N \cup \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} F_k$, $F_k \subseteq F_{k+1}$.

Per il punto *3)* basta allora dimostrare che la tesi è vera per gli insiemi $N \subset \mathbb{R}^n$ di misura $\mathcal{L}^n$ nulla.

Sia dunque $N \subset \mathbb{R}^n$ tale che $\mathcal{L}^n(N) = 0$. Sia $\varepsilon > 0$. Sappiamo che esiste $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto tale che $A \supseteq N$, $\mathcal{L}^n(A) < \varepsilon$.

Allora $N \times (0, L] \subset A \times (0, L]$ per cui

$$\mathcal{L}^{n+1*}(N \times (0, L]) \leq \mathcal{L}^{n+1}(A \times (0, L]) = L\mathcal{L}^n(A) < L\varepsilon.$$

Per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ abbiamo $\mathcal{L}^{n+1*}(N \times (0, L]) = 0$ quindi, per l'Osservazione 3.1 l'insieme $N \times (0, L]$ è misurabile e ha misura $\mathcal{L}^{n+1}$ nulla.

□

Teorema 6.5. ✔ *Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme misurabile e sia $f \colon E \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione misurabile nonnegativa. Allora il sottografico di f,*

$$SG_{f,E} := \{(\boldsymbol{x}, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \colon \boldsymbol{x} \in E,\ 0 < t < f(\boldsymbol{x})\}$$

è un insieme $\mathcal{L}^{n+1}$-misurabile e $\mathcal{L}^{n+1}(SG_{f,E}) = \int_E f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}$.

Proof. 1) Dimostriamo innanzitutto che la tesi è vera se f è una funzione semplice nonnegativa φ: sia $\varphi(\boldsymbol{x}) := \sum_{i=0}^{N} a_i \mathbb{1}_{E_i}(\boldsymbol{x})$ la rappresentazione canonica di φ: $E_i \cap E_j = \emptyset$, $\bigcup_{i=1}^{N} E_i = \mathbb{R}^n$. Allora

$$SG_{\varphi,\mathbb{R}^n} = \bigcup_{i=1}^{N} \{(\boldsymbol{x}, t) : \boldsymbol{x} \in E_i,\ 0 < t < a_i\}$$

quindi, per il Lemma 6.4

$$\mathcal{L}^{n+1}(SG_{\varphi,\mathbb{R}^n}) = \sum_{i=1}^{N} a_i \mathcal{L}^n(E_i) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

La tesi è dunque vera per le funzioni semplici misurabili nonnegative.

2) Sia $f \colon E \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione misurabile nonnegativa. La estendo a tutto $\mathbb{R}^n$ ponendo $f(\boldsymbol{x}) = 0$ per ogni $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \setminus E$.

Sappiamo (Lemma 5.4) che esiste una successione monotona crescente di funzioni semplici misurabili non negative $(\varphi_k)_{k=1}^{\infty}$ tale che $\lim_{k\to\infty} \varphi_k(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})$ per ogni $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$.

Abbiamo allora $SG_{\varphi_k,\mathbb{R}^n} \subseteq SG_{\varphi_{k+1},\mathbb{R}^n}$ e $\bigcup_{k=1}^{\infty} SG_{\varphi_k,\mathbb{R}^n} = SGf, E$.

Per il passo *1)* abbiamo

$$\mathcal{L}^{n+1}(SG_{\varphi_k,\mathbb{R}^n}) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Per la continuità della misura (Teorema 3.11)

$$\lim_{k\to\infty} \mathcal{L}^{n+1}(SG_{\varphi_k,\mathbb{R}^n}) = \mathcal{L}^{n+1}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} SG_{\varphi_k,\mathbb{R}^n}\right) = \mathcal{L}^{n+1}(SG_{f,E}).$$

D'altra parte, per il Lemma di Beppo-Levi, Lemma 6.2, abbiamo

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_E f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

da cui la tesi. □

Definizione 6.1. *Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme misurabile. Si dice che una proprietà vale* quasi ovunque *in E (e si scrive che la proprietà vale per q.o. $\boldsymbol{x} \in E$) se esiste $N \subseteq E$, $\mathcal{L}^n(N) = 0$ tale che la proprietà vale per ogni $x \in E \setminus N$.*

Proposizione 6.6. ✖ *Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme misurabile e sia $f\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$ misurabile e nonnegativa. Se $\displaystyle\int_E f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0$, allora f è nulla q.o. in E.*

Proof. Per $k \in \mathbb{N}$ sia $E_k := \left\{\boldsymbol{x} \in E\colon f(\boldsymbol{x}) > \dfrac{1}{k}\right\}$.
Poiché f è nonnegativa abbiamo

$$0 = \int_E f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} \geq \int_{E_k} f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} \geq \int_{E_k} \frac{1}{k}\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \frac{1}{k}\mathcal{L}^n(E_k) = 0.$$

Dunque $\mathcal{L}^n(E_k) = 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Poiché $\{\boldsymbol{x} \in E\colon f(\boldsymbol{x}) > 0\} = \displaystyle\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, per la continuità della misura, Teorema 3.11, abbiamo $\mathcal{L}^n(\{\boldsymbol{x} \in E\colon f(\boldsymbol{x}) > 0\}) = 0$ e dunque $f(\boldsymbol{x}) = 0$ per q.o. $\boldsymbol{x} \in E$. □

Sia $E \subseteq \mathbb{R}^{n+k}$ e sia $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$. Chiamo *fetta di E sopra $\boldsymbol{x}$* l'insieme

$$E_{\boldsymbol{x}} := \left\{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^k\colon \left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\right) \in E\right\}.$$

Teorema 6.7 (Teorema di Fubini)**.** ✖ *Sia $E \subseteq \mathbb{R}^{n+k}$ un insieme $\mathcal{L}^{n+k}$-misurabile. Allora*

1. *per q.o. $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ l'insieme $E_{\boldsymbol{x}}$ è $\mathcal{L}^k$-misurabile,*
2. *la funzione $\boldsymbol{x} \mapsto \mathcal{L}^k(E_{\boldsymbol{x}})$ definita quasi ovunque in $\mathbb{R}^n$ è $\mathcal{L}^k$-misurabile,*
3. *$\mathcal{L}^{n+k}(E) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{L}^k(E_{\boldsymbol{x}})\mathrm{d}\boldsymbol{x}$.*

Proof. La dimostrazione si svolge in più passi:
1) proviamo che la tesi è vera se E è un $(n+k)$-intervallo.

Infatti, in questyo caso, $E = G \times H$ con G n.intervallo e H k-intervallo. Dunque

$$\mathcal{L}^{n+k}(E) = \mathrm{vol}_{n+k}(E) = \mathrm{vol}_n(G)\mathrm{vol}_k(H) = \mathcal{L}^n(G)\mathcal{L}^k(H).$$

D'altra parte $E_{\boldsymbol{x}} = \begin{cases} H & \boldsymbol{x} \in G, \\ \emptyset & \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \setminus G, \end{cases}$ dunque

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{L}^k(E_{\boldsymbol{x}})\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \mathcal{L}^k(H)\mathcal{L}^n(G) = \mathcal{L}^{n+k}(E).$$

2) Proviamo che se la tesi è vera per E, F sottoinsiemi disgiunti e $\mathcal{L}^{n+k}$-misurabili di $\mathbb{R}^{n+k}$, allora è vera per $E \cup F$.

Poiché la tesi è vera per E ed F sappiamo che

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{n+k}(E) &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{L}^k(E_{\boldsymbol{x}})\mathrm{d}\boldsymbol{x} \\ \mathcal{L}^{n+k}(F) &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{L}^k(F_{\boldsymbol{x}})\mathrm{d}\boldsymbol{x} \end{aligned} \tag{6}$$

Infatti, in questo caso $(E \cup F)_{\boldsymbol{x}} = E_{\boldsymbol{x}} \cup F_{\boldsymbol{x}}$. Dunque $(E \cup F)_{\boldsymbol{x}}$ è $\mathcal{L}^k$-misurabile perché unione di $\mathcal{L}^k$-misurabili. Inoltre $E_{\boldsymbol{x}} \cap F_{\boldsymbol{x}} = \emptyset$ dunque $\mathcal{L}^k((E \cup F)_{\boldsymbol{x}}) = \mathcal{L}^k(E_{\boldsymbol{x}}) + \mathcal{L}^k(F_{\boldsymbol{x}})$. Sommando membro a membro in (6) e per la linearità dell' integrale otteniamo

$$\mathcal{L}^{n+k}(E \cup F) = \int_{\mathbb{R}^n} \Big(\mathcal{L}^k(E_{\boldsymbol{x}}) + \mathcal{L}^k(F_{\boldsymbol{x}})\Big)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{L}^k((E \cup F)_{\boldsymbol{x}})\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

3) Proviamo che se la tesi è vera per E, F sottoinsiemi $\mathcal{L}^{n+k}$-misurabili di $\mathbb{R}^{n+k}$ tali che $F \subseteq E$, allora è vera per $E \setminus F$.

Infatti, in questo caso $(E \setminus F)_{\boldsymbol{x}} = E_{\boldsymbol{x}} \setminus F_{\boldsymbol{x}}$. Dunque $(E \setminus F)_{\boldsymbol{x}}$ è $\mathcal{L}^k$-misurabile perché differenza di $\mathcal{L}^k$-misurabili. Inoltre $\mathcal{L}^k((E \setminus F)_{\boldsymbol{x}}) = \mathcal{L}^k(E_{\boldsymbol{x}}) - \mathcal{L}^k(F_{\boldsymbol{x}})$. Sottraendo membro a membro in (6) e per la linearità dell' integrale otteniamo

$$\mathcal{L}^{n+k}(E \setminus F) = \int_{\mathbb{R}^n} \Big(\mathcal{L}^k(E_{\boldsymbol{x}}) - \mathcal{L}^k(F_{\boldsymbol{x}})\Big)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{L}^k((E \setminus F)_{\boldsymbol{x}})\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

4) Proviamo che se $(E_j)_{j=1}^{\infty}$ è una famiglia numerabile monotona crescente di insiemi $\mathcal{L}^{n+k}$-misurabili per i quali la tesi è vera, allora è vera anche per l'insieme $E := \displaystyle\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$.

Tutti gli insiemi E_j soddisfano la tesi cioè per q.o. $x \in \mathbb{R}^n$ $E_{j,\boldsymbol{x}}$ è misurabile e

$$\mathcal{L}^{n+k}(E_j) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{L}^k(E_{j,\boldsymbol{x}})\mathrm{d}\boldsymbol{x}. \tag{7}$$

Poiché $\bigcup_{j=1}^{\infty} E_{j,\boldsymbol{x}} = E_{\boldsymbol{x}}$, abbiamo che anche $E_{\boldsymbol{x}}$ è $\mathcal{L}^k$-misurabile. Inoltre $E_{j,\boldsymbol{x}} \subseteq E_{\boldsymbol{x},j+1}$ dunque $\mathcal{L}^k(E_{j,\boldsymbol{x}}) \le \mathcal{L}^k(E_{\boldsymbol{x},j+1})$ e, per la continuità della misura, Teorema 3.11, $\mathcal{L}^k(E_{\boldsymbol{x}}) = \lim_{j\to\infty} \mathcal{L}^k(E_{j,\boldsymbol{x}})$.

Passando a limite in (7), grazie al Lemma di Beppo-Levi, Lemma 6.2, otteniamo:

$$\mathcal{L}^{n+k}(E) = \lim_{j\to\infty} \mathcal{L}^{n+k}(E_j) = \lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{L}^k(E_{j,\boldsymbol{x}}) \mathrm{d}\boldsymbol{x} =$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{j\to\infty} \mathcal{L}^k(E_{j,\boldsymbol{x}}) \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{L}^k(E_{\boldsymbol{x}}) \mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

5) Proviamo che la tesi è vera se $\mathcal{L}^{n+k}(E) = 0$.

Se $\mathcal{L}^{n+k}(E) = 0$ esiste una successione $(A_j)_{j=1}^{\infty}$ di aperti di $\mathbb{R}^{n+k}$ (Teorema 3.10, punto *4.*) tale che

$$\mathcal{L}^{n+k*}(A_j \setminus E) < \frac{1}{j}, \qquad E \subseteq A_{j+1} \subseteq A_j \qquad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Poiché gli insiemi A_j sono aperti, per i punti *1)* e *4)* , la tesi è vera per ciascun A_j:

$$\frac{1}{j} > \mathcal{L}^{n+k}(A_j) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{L}^k(A_{j,\boldsymbol{x}}) \mathrm{d}\boldsymbol{x}. \tag{8}$$

Sia $A := \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j$. Poiché $\mathcal{L}^{n+k}(A_j) \le \frac{1}{j}$ per la continuità della misura, Teorema 3.11, $\mathcal{L}^{n+k}(A) = 0$. Inoltre $A_{\boldsymbol{x}} = \bigcap_{j=1}^{\infty} A_{j,\boldsymbol{x}}$ quindi A è $\mathcal{L}^k$-misurabile per q.o. $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$.

Applicando il lemma di Beppo-Levi, Lemma 6.2, alla successione monotona crescente $\mathcal{L}^k(A_{1,\boldsymbol{x}}) - \mathcal{L}^k(A_{j,\boldsymbol{x}})$ abbiamo dunque

$$\mathcal{L}^{n+k}(A_1) - \mathcal{L}^{n+k}(A) = \lim_{j\to\infty} \Big(\mathcal{L}^{n+k}(A_1) - \mathcal{L}^{n+k}(A_j)\Big) =$$
$$= \lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \Big(\mathcal{L}^k(A_{1,\boldsymbol{x}}) - \mathcal{L}^k(A_{j,\boldsymbol{x}})\Big) \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{j\to\infty} \Big(\mathcal{L}^k(A_{1,\boldsymbol{x}}) - \mathcal{L}^k(A_{j,\boldsymbol{x}})\Big) \mathrm{d}\boldsymbol{x} =$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n} \Big(\mathcal{L}^k(A_{1,\boldsymbol{x}}) - \mathcal{L}^k(A_{\boldsymbol{x}})\Big) \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \mathcal{L}^{n+k}(A_1) - \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{L}^k(A_{\boldsymbol{x}}) \mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

Dunque $0 = \mathcal{L}^{n+k}(A) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{L}^k(A_{\boldsymbol{x}}) \mathrm{d}\boldsymbol{x}$. □

Per la Proposizione 6 abbiamo $\mathcal{L}^k(A_{\boldsymbol{x}}) = 0$ per q.o. $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$. Poiché $E_{\boldsymbol{x}} \subseteq A_{\boldsymbol{x}}$ abbiamo anche $\mathcal{L}^k(E_{\boldsymbol{x}}) = 0$ per q.o. $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ e dunque $\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{L}^k(E_{\boldsymbol{x}}) \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_{\mathbb{R}^n} 0 \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0 = \mathcal{L}^{n+k}(E)$.

Teorema 6.8 (Teorema di Fubini)**.** ✖ *Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme $\mathcal{L}^n$-misurabile e sia $f\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione nonnegativa. Allora f è misurabile in E se e solo se il suo sottografico $SG_{f,E}$ è un insieme $\mathcal{L}^{n+1}$-misurabile.*

Proof. Abbiamo già dimostrato, Teorema 6.5, che se f è misurabile nonnegativa, allora $SG_{f,E}$ è un insieme $\mathcal{L}^{n+1}$-misurabile e che in tal caso $\mathcal{L}^{n+1}(SG_{f,E}) = \displaystyle\int_E f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}$.

Supponiamo dunque che $SG_{f,E}$ sia un insieme $\mathcal{L}^{n+1}$-misurabile e dimostriamo che f è una funzione misurabile.

Se $t < 0$ $\{\boldsymbol{x} \in E\colon f(\boldsymbol{x}) > t\} = E$ che è misurabile.

Se $t > 0$ $\{\boldsymbol{x} \in E\colon f(\boldsymbol{x}) > t\} = \big\{\boldsymbol{x} \in E\colon \big(\boldsymbol{x}, t\big) \in SG_{f,E}\big\} = \big(SG_{f,E}\big)_t$ Poiché $SG_{f,E}$ è $\mathcal{L}^{n+1}$-misurabile, per il Teorema 6.7 l'insieme $\big(SG_{f,E}\big)_t$ è $\mathcal{L}^n$-misurabile per q.o. $t \in \mathbb{R}$.

Dunque esiste $N \subset \mathbb{R}$, $\mathcal{L}^1(N) = 0$ tale che $\{\boldsymbol{x} \in E\colon f(\boldsymbol{x}) > t\}$ è $\mathcal{L}^n$-misurabile per ogni $t \in \mathbb{R} \setminus N$.

Poiché $\mathcal{L}^1(N) = 0$, l'insieme $\mathbb{R} \setminus N$ è denso in $\mathbb{R}$ dunque, per la Proposizione 5.1 $\{\boldsymbol{x} \in E\colon f(\boldsymbol{x}) > t\}$ è misurabile per ogni $t \in \mathbb{R}$ cioè f è una funzione misurabile. □

Teorema 6.9. ✖ *Sia $E \subseteq \mathbb{R}^{n+k}$ insieme misurabile e sia $f\colon R \to \overline{\mathbb{R}}$ funzione integrabile in E. Allora*

1. *per q.o. $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ la fetta $E_{\boldsymbol{x}}$ è $\mathcal{L}^k$-misurabile e la funzione $\varphi_{\boldsymbol{x}}\colon \boldsymbol{y} \in E_{\boldsymbol{x}} \mapsto f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ è $\mathcal{L}^k$-misurabile;*
2. *la funzione $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mapsto \displaystyle\int_{E_{\boldsymbol{x}}} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\mathrm{d}\boldsymbol{y}$ è $\mathcal{L}^n$-misurabile;*
3. $\displaystyle\int_E f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}\boldsymbol{y} = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{E_{\boldsymbol{x}}} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\mathrm{d}\boldsymbol{y}\right) \mathrm{d}\boldsymbol{x}.$

Proof. Abbiamo già dimostrato che la fetta $E_{\boldsymbol{x}}$ è $\mathcal{L}^k$-misurabile q.o. $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$.

Supponiamo preliminarmente che f sia nonnegativa. Considero gli insiemi

$$SG_{f,E} = \Big\{\big(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t\big) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}\colon \big(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\big) \in E,\ 0 < t < f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\Big\}$$
$$SG_{\varphi_{\boldsymbol{x}},E} = \Big\{\big(\boldsymbol{y}, t\big) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}\colon \boldsymbol{x} \in E_{\boldsymbol{x}},\ 0 < t < f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\Big\}.$$

Dunque $SG_{f,E,\boldsymbol{x}} = SG_{\varphi_{\boldsymbol{x}},E}$ e dunque, per il Teorema di Fubini, Teorema 6.7, l'insieme $SG_{\varphi_{\boldsymbol{x}},E}$ è $\mathcal{L}^{k+1}$-misurabile per q.o. $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ e

$$\mathcal{L}^{n+k+1}(SG_{f,E}) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{L}^{k+1}(SG_{f,E,\boldsymbol{x}}).$$

Di consequenza, per il Teorema 6.8, la funzione $\varphi_{\boldsymbol{x}}$ è $\mathcal{L}^k$-misurabile per q.o. $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ e per il Teorema 6.5,

$$\int_E f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}\boldsymbol{y} = \mathcal{L}^{n+k+1}(SG_{f,E}) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{L}^{k+1}(SG_{f,E,\boldsymbol{x}}) = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{E_{\boldsymbol{x}}} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\right) \mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

Se f ha segno variabile applichiamo il passo precedente alle funzioni f^+ e f^-. $\square$

Teorema 6.10. ✔ *Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata, nonnegativa e integrabile secondo Riemann. Allora f è misurabile e $\displaystyle\int_{[a,b]} f(x)\mathrm{d}x$ (integrale secondo Lebesgue) è uguale a $\displaystyle\mathcal{R}\!\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ (integrale secondo Riemann).*

Proof. Osserviamo che ogni funzione costante a tratti $\varphi(x) = \displaystyle\sum_{j=1}^{N} c_j\, \mathbb{1}_{(a_{j-1},a_j]}(x)$, $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_{N-1} < a_N = b$ sull'intervallo $[a,b]$ è una funzione semplice misurabile. Chiaramente la somma alla Riemann $I_{\mathcal{R}}(\varphi) := \displaystyle\sum_{j=1}^{N} c_j\,(a_j - a_{j-1})$ di φ coincide con il suo integrale di Lebesgue e dunque, se φ è nonnegativa, anche con la misura $\mathcal{L}^2$ del sottografico: $I_{\mathcal{R}}(\varphi) = I(\varphi) = \mathcal{L}^2\big(SG_{\varphi,[a,b]}\big)$.

Sia $\varepsilon > 0$. Poiché f è integrabile secondo Riemann esiste φ e ψ funzioni costanti a tratti tali che

$$0 \le \varphi(x) \le f(x) \le \psi(x) \qquad \forall x \in [a,b], \tag{9}$$

$$\mathcal{L}^2\big(SG_{\varphi,[a,b]}\big) = I_{\mathcal{R}}(\varphi) \le \mathcal{R}\!\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le I_{\mathcal{R}}(\psi) = \mathcal{L}^2\big(SG_{\psi,[a,b]}\big). \tag{10}$$

Sicuramente,

$$SG_{\varphi,[a,b]} \subseteq SG_{f,[a,b]} \subseteq SG_{\psi,[a,b]}.$$

e

$$0 \le \mathcal{L}^2\big(SG_{\psi,[a,b]} \setminus SG_{\varphi,[a,b]}\big) = \mathcal{L}^2\big(SG_{\psi,[a,b]}\big) - \mathcal{L}^2\big(SG_{\varphi,[a,b]}\big) = I(\psi) - I(\phi) < \varepsilon.$$

Di conseguenza $\mathcal{L}^{2*}\big(SG_{\psi,[a,b]} \setminus SG_{f,[a,b]}\big) \le \mathcal{L}^2\big(SG_{\psi,[a,b]} \setminus SG_{\varphi,[a,b]}\big) < \varepsilon$. Poiché $SG_{\psi,[a,b]}$ è $\mathcal{L}^2$-misurabile, esiste A aperto tale che

$$A \supseteq SG_{\psi,[a,b]}, \qquad \mathcal{L}^{2*}\big(A \setminus SG_{\psi,[a,b]}\big) \le \varepsilon.$$

Di conseguenza

$$\mathcal{L}^{2*}\big(A \setminus SG_{f,[a,b]}\big) \le \mathcal{L}^{2*}\big(A \setminus SG_{\psi,[a,b]}\big) + \mathcal{L}^{2*}\big(SG_{\psi,[a,b]} \setminus SG_{f,[a,b]}\big) < 2\varepsilon.$$

Dunque $SG_{f,[a,b]}$ è $\mathcal{L}^2$-misurabile e dunque la funzione f è misurabile in $[a,b]$ e

$$\mathcal{L}^2\big(SG_{f,[a,b]}\big) = \int_{[a,b]} f(x)\mathrm{d}x.$$

Abbiamo dunque

$$I_{\mathcal{R}}(\varphi) = \mathcal{L}^2\big(SG_{\varphi,[a,b]}\big) \leq \int_{[a,b]} f(x)\mathrm{d}x \leq \mathcal{L}^2\big(SG_{\psi,[a,b]}\big) = I_{\mathcal{R}}(\psi).$$

Per l'arbitrarietà delle funzioni φ e ψ e l'integrabilità secondo Riemann della funzione f abbiamo

$$\mathcal{R}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \sup_{\varphi\leq f} I_{\mathcal{R}}(\varphi) \leq \int_{[a,b]} f(x)\mathrm{d}x \leq \inf_{\psi\geq f} I_{\mathcal{R}}(\psi) = \mathcal{R}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

da cui la tesi. □

7 Teorema di convergenza dominata

Lemma 7.1 (Lemma di Fatou)**.** ✖ *Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ un insieme misurabile e sia $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni integrabili in E. Supponiamo esista $\varphi\colon E \to \mathbb{R}$ funzione sommabile tale che $f_j(x) \geq \varphi(x)$ q.o. $x \in E$, $\forall j \in \mathbb{N}$. Per $x \in E$ e $k \in \mathbb{N}$ sia $g_k(x) := \inf_{j\geq k} f_j(x)$. Allora*

$$\int_E \lim_{k\to\infty} g_k(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} \leq \lim_{k\to\infty} \inf_{j\geq k} \int_E f_j(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

Proof. Sostituendo f_j ccon $f_j - \varphi$ possiamo limitarci a considerare il caso $f_j \geq 0$. Si ha allora

$$\begin{aligned} &0 \leq g_k(\boldsymbol{x}) \leq g_{k+1}(\boldsymbol{x}) && \boldsymbol{x} \in E, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \\ &g_k(\boldsymbol{x}) \leq f_j(\boldsymbol{x}) && \boldsymbol{x} \in E, \quad j,k \in \mathbb{N}, \quad j \geq k. \end{aligned}$$

Osserviamo anche che ogni funzione g_k è misurabile e non negativa perché estremo superiore di funzioni misurabili e non negativi. Si ha quindi

$$0 \leq \int_E g_k(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} \leq \int_E f_j(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} \qquad \forall j \geq k$$

da cui

$$0 \leq \int_E g_k(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} \leq \inf_{j\geq k} \int_E f_j(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Passando a limite per $k \to \infty$ e applicando il Lemma di Beppo-Levi, Lemma 6.2 alla successione g_k otteniamo

$$\int_E \lim_{k\to\infty} g_k(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \lim_{k\to\infty} \int_E g_k(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} \leq \lim_{k\to\infty} \inf_{j\geq k} \int_E f_j(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

□

Corollario 7.2. ✖ *Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ un insieme misurabile e sia $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni integrabili in E. Supponiamo esista $\psi\colon E \to \mathbb{R}$ funzione sommabile tale che $f_j(x) \leq \psi(x)$ q.o. $x \in E$, $\forall j \in \mathbb{N}$. Per $x \in E$ e $k \in \mathbb{N}$ sia $h_k(x) := \sup_{j\geq k} f_j(x)$. Allora*

$$\int_E \lim_{k\to\infty} h_k(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} \geq \lim_{k\to\infty} \sup_{j\geq k} \int_E f_j(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

Proof. Applico il Lemma di Fatou, lemma 7.1, alla successione $\widetilde{f}_j := -f_j$. Si ha quindi $\widetilde{g}_k(\boldsymbol{x}) := \inf_{j\geq k} \widetilde{f}_j(\boldsymbol{x}) = \inf_{j\geq k} -f_j(\boldsymbol{x}) = -\sup_{j\geq k} f_j(\boldsymbol{x}) = -h_k(\boldsymbol{x})$. Dunque

$$\begin{aligned}
-\lim_{k\to\infty} \int_E h_k(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} &= \lim_{k\to\infty} \int_E \widetilde{g}_k(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} \leq \lim_{k\to\infty} \inf_{j\geq k} \left(-\int_E f_j(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} \right) \\
&= \lim_{k\to\infty} \left(-\sup_{j\geq k} \int_E f_j(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} \right) = -\lim_{k\to\infty} \sup_{j\geq k} \int_E f_j(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}
\end{aligned}$$

da cui la tesi. □

Teorema 7.3 (Teorema di convergenza dominata di Lebesgue)**.** ✖ *Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ un insieme misurabile e sia $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni misurabili in E tale che $\lim_{j\to\infty} f_j(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})$ q.o. $\boldsymbol{x} \in E$. Supponiamo esista $\psi\colon E \to \mathbb{R}$ funzione sommabile tale che $|f_j(x)| \leq \psi(x)$ q.o. $x \in E$, $\forall j \in \mathbb{N}$. Allora*

$$\lim_{j\to\infty} \int_E |f_j - f|(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0.$$

In particolare

$$\lim_{j\to\infty} \int_E f_j(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_E f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

Proof. Osserviamo che f è misurabile perché limite di una successione di funzioni misurabili. Applichiamo il Corollario 7.2 alla successione $\widehat{f}_j := |f_j - f|$. Poiché $|f_j(\boldsymbol{x})| \leq \psi(\boldsymbol{x})$ abbiamo anche $|f(\boldsymbol{x})| \leq \psi(\boldsymbol{x})$ q.o. $\boldsymbol{x} \in E$ e dunque $0 \leq \widehat{f}_j(\boldsymbol{x}) \leq |f_j(\boldsymbol{x})| + |f(\boldsymbol{x})| \leq 2\psi(\boldsymbol{x})$ q.o. $\boldsymbol{x} \in E$.

Sia $h_k(\boldsymbol{x}) := \sup_{j\geq k} |f_j - f|(\boldsymbol{x})$. Proviamo che $\lim_{k\to\infty} h_k(\boldsymbol{x}) = 0$ q.o. $\boldsymbol{x} \in E$:

poiché $f_j(\boldsymbol{x})$ converge a $f(\boldsymbol{x})$ q.o. $\boldsymbol{x} \in E$ abbiamo che $|f_j - f|(\boldsymbol{x})$ converge a 0 q.o. $\boldsymbol{x} \in E$ cioè

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \overline{j}\colon\ |f_j - f|(\boldsymbol{x}) \leq \varepsilon \qquad \forall j \geq \overline{j}$$

dunque

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \overline{j}\colon h_{\overline{j}}(\boldsymbol{x}) = \sup_{j\geq \overline{j}} |f_j - f|(\boldsymbol{x}) \leq \varepsilon.$$

Ma $\{h_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ è una successione monotona decrescente e dunque $h_k(\boldsymbol{x}) \leq \varepsilon \quad \forall k \geq \overline{j}$.

Si ha quindi

$$0 = \int_E \lim_{k\to\infty} h_k(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} \geq \lim_{k\to\infty} \sup_{j\geq k} \int_E |f_j - f|(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} \geq \lim_{k\to\infty} \int_E |f_k - f|(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} \geq 0.$$

Dunque

$$\lim_{k\to\infty} \int_E |f_k - f|(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0.$$

In particolare, da

$$\left| \int_E f_k(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} - \int_E f_(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} \right| \leq \int_E |f_k - f|(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

otteniamo $\lim_{k\to\infty} \int_E f_k(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} - \int_E f_(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}$. $\square$

References

[1] Mariano Giaquinta and Giuseppe Modica. *Mathematical Analysis, Foundations and Advanced Techniques for Functions of Several Variables.* Birkhäuser, 2012.