2 Esempi ed esercizi svolti e/o proposti

Esempio 2.1. Si consideri la curva parametrica

$$\varphi\colon t \in [0, 2\pi] \to \varphi(t) = (a\cos(t), a\sin(t), bt) \in \mathbb{R}^3$$

dove a e b sono due costanti positive. Provare che il supporto di φ è contenuto sul cilindro di equazione $x^2 + y^2 = a^2$. Provare che φ è regolare e calcolarne il versore tangente in ogni punto. Scrivere l'equazione della retta tangente in $\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right)$. È semplice? È chiusa? Calcolarne la lunghezza. Cosa posso dire della proiezione di φ sul piano Oxy?

Esercizio 2.1. Si consideri la curva parametrica

$$\varphi\colon t \in [0, 2\pi] \to \varphi(t) = (at\cos(t), at\sin(t), bt) \in \mathbb{R}^3$$

dove a e b sono due costanti positive. Provare che il supporto di φ è contenuto sul cono di equazione $x^2 + y^2 = \dfrac{a^2z^2}{b^2}$. Provare che φ è regolare e calcolarne il versore tangente in ogni punto. È semplice? È chiusa? Calcolarne la lunghezza. Cosa posso dire della proiezione di φ sul piano Oxy? Detta ψ tale proiezione, determinarne il versore tangente in ogni suo punto e scrivere l'equazione cartesiana della retta tangente in $\psi\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

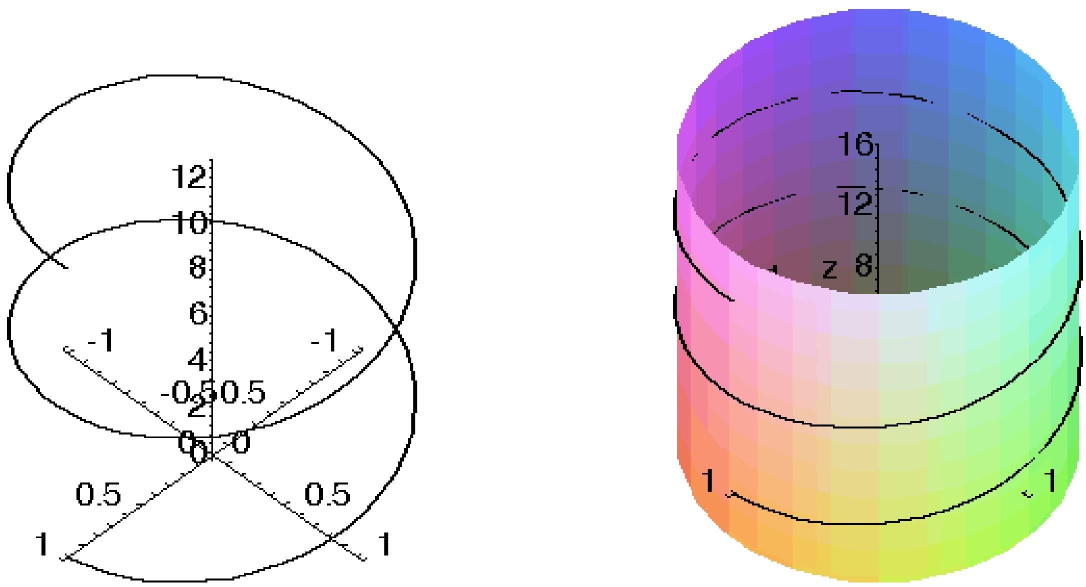
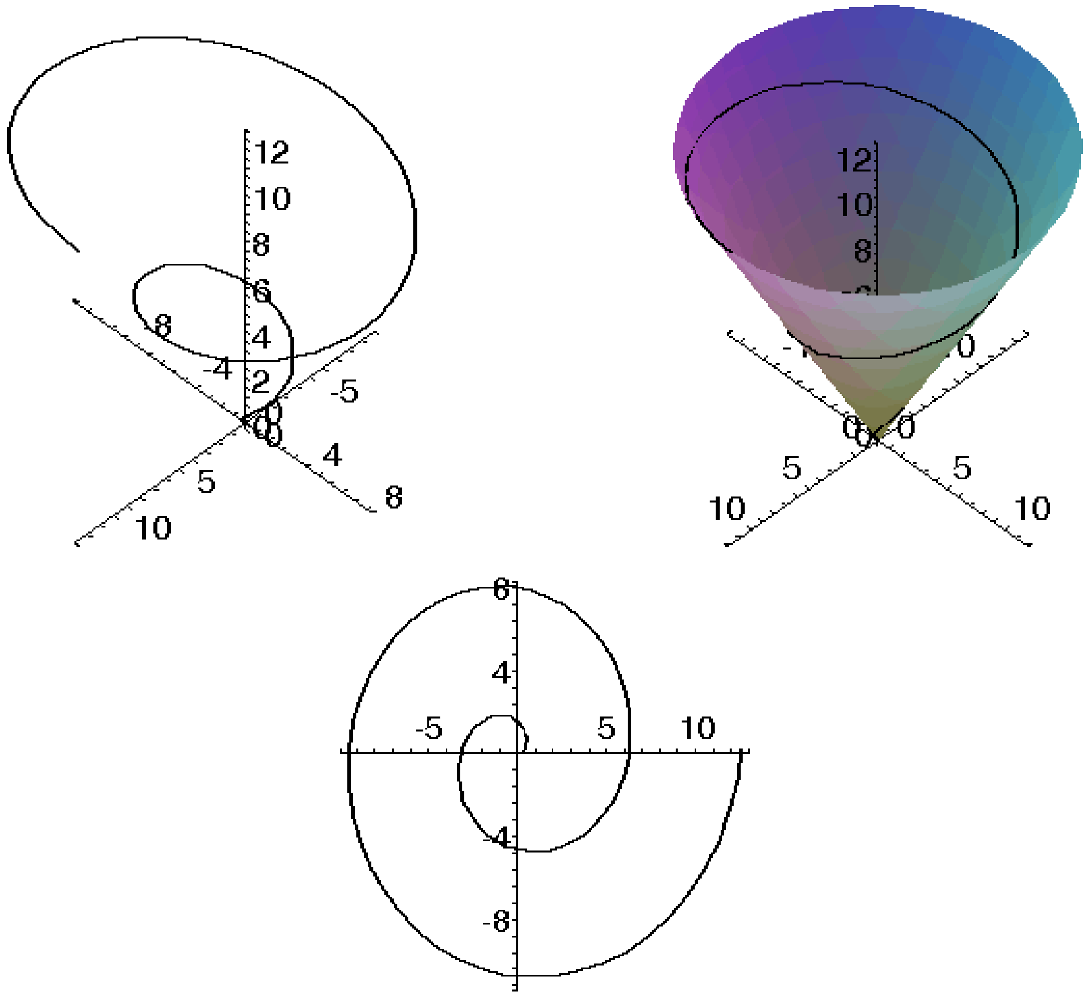


Figura 2: Elica su cilindro, $\varphi\colon t \in [0, 4\pi] \to \varphi(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$

Esercizio 2.2. Si consideri la curva di equazione polare

$$r(\theta) = 1 + \cos(\theta) \qquad \theta \in [-\pi, \pi]\,.$$

è regolare? Tracciare il suo supporto indicando punto iniziale, punto finale e verso di percorrenza. per ogni $t \in (-\pi, \pi)$ in cui è definito, scrivere il versore tangente alla curva. Scrivere l'equazione cartesiana della retta tangente alla curva nel punto di coordinate polari $\left(r\left(\frac{\pi}{4}\right), \frac{\pi}{4}\right)$. Calcolarne la lunghezza e le coordinate del baricentro.



(c) Proiezione sul piano Oxy

Figura 3: Elica su cono, $\varphi \colon t \in [0, 4\pi] \to \varphi(t) = (t\cos(t), t\sin(t), t)$

Esercizio 2.3. Sia α la curva parametrica di equazione

$$\alpha\colon t \in [0,1] \to \alpha(t) = (\exp(2t), 2\exp(t), t) \in \mathbb{R}^3.$$

Determinare l'equazione della retta tangente in $\alpha(2)$ e calcolare la lunghezza della curva.

Esercizio 2.4. Sia α la curva parametrica

$$\alpha\colon t \in [-\pi,\pi] \to \alpha(t) = (\exp(2t), 2t, \sin(2t)) \in \mathbb{R}^3$$

Sia $f\colon (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \to \dfrac{1}{4}\sqrt{x^2 + 2 - \sin^2 y} \in \mathbb{R}$. Calcolare $\displaystyle\int_\alpha f \mathrm{d}s$.

Esercizio 2.5. Sia γ l'intersezione tra il piano $x = y$ e la sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$. Sia $f\colon (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \to \sqrt{2y^2 + z^2} \in \mathbb{R}$. Calcolare $\displaystyle\int_\gamma f \mathrm{d}s$. Scrivere l'equazione della retta tangente alla curva nel punto $(1, 1, \sqrt{2})$.

Esercizio 2.6. Calcolare la lunghezza della porzione di curva $y^3 - x^2 = 0$ contenuta nel cerchio centrato nell'origine e raggio $\sqrt{2}$.

Esercizio 2.7. Sia γ la frontiera dell'insieme

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x + y \geq 0\,,\ x^2 + y^2 \leq 4\right\}\,.$$

Sia $f\colon (x,y) \in \mathbb{R}^2 \to x + y^2 \in \mathbb{R}$. Calcolare $\displaystyle\int_\gamma f \mathrm{d}s$.

Esercizio 2.8. Calcolare le coordinate del baricentro di un filo a forma di circonferenza definito come il luogo $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 = 1,\ y \geq 0\}$, e avente densità lineare di massa costante $\delta(x,y) = 1$

Esercizio 2.9. Calcolare le coordinate del baricentro di una molla a forma di elica di equazione $\gamma(t) = (a\cos(t), a\sin(t), bt)$, con $t \in [0, 2\pi]$, $a, b > 0$ e densità lineare di massa $\delta(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$.

Esercizio 2.10. Calcolare il momento di inerzia di:

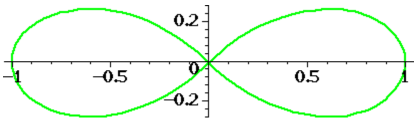
1. circonferenza di equazione $\gamma(t) = (a\cos(t), a\sin(t))$, $t \in [0, 2\pi]$, $a > 0$ e densità lineare costante δ, rispetto all'asse y.
2. elica di equazione $\gamma(t) = (a\cos(t), a\sin(t), bt)$, con $t \in [0, 4\pi]$, $a, b > 0$ e densità lineare di massa costante δ, rispetto all'asse z.

Esercizio 2.11. Studiare la curva parametrica di equazioni

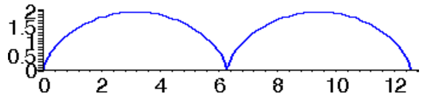
$$\begin{cases} x(t) = \cos^3 t \\ y(t) = \sin^3 t \end{cases} \quad t \in [-\pi, \pi]$$

Esercizio 2.12. Studiare il luogo dei punti di equazione polare

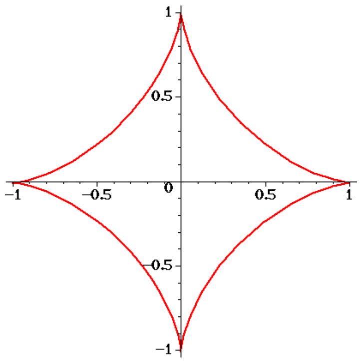
$$r(\theta) = \sin(3\theta)\,;\ r^2(\theta) = \cos(2\theta)$$



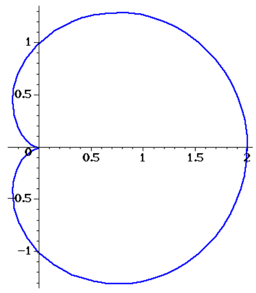
(a) Lemniscata $r^2 = \cos(2t)$



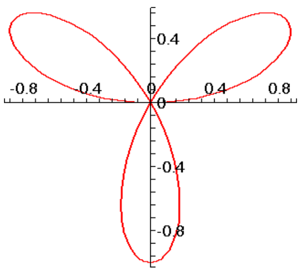
(b) Cicloide $x = t - \sin(t)$, $y = 1 - \cos(t)$



(c) Astroide $x = \cos^3(t)$, $y = \sin^3(t)$



(d) Cardioide $r = 1 + \cos(t)$



(e) $r = \sin(3t)$

Figura 4: Alcune curve famose

Esercizio 2.13. Data la curva parametrica

$$\vec{r}(t) = t(2t^2 - 3t + 1)\vec{i} + \cos(2\pi t)\vec{j}$$

con $t \in [0, 1]$,

1. stabilire se è chiusa e/o regolare.
2. Trovare le equazioni parametriche della curva il cui sostegno è dato come intersezione delle superfici

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ z = x + y \end{cases}$$

Esercizio 2.14. Trovare le equazioni parametriche della curva il cui sostegno è dato come intersezione delle superfici

$$\begin{cases} {}^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ (x-1)^2 + y^2 - z^2 = 0 \end{cases}$$

e dire se la curva è regolare/semplice/chiusa.

Esercizio 2.15. Calcolare la lunghezza della curva

$$\vec{r}(t) = \cos(t)\vec{i} - \sin(t)\vec{j} + \ln(3\sin(t))\vec{k}$$

con $t \in [\pi/3, \pi/2]$.

Esercizio 2.16. Data la curva parametrica

$$\vec{r}(t) = \left(e^t \cos(t)\vec{i} + e^t \sin(t)\vec{j} + e^t\vec{k}\right)$$

$t \in (-\infty, +\infty)$ calcolare la lunghezza d'arco $L_o(t)$ di origine $\vec{r}(0) = (1, 0, 1)$. Riparametrizzare poi la curva mediante l'ascissa curvilinea $s = L_o(t)$.

Esercizio 2.17. Calcolare l'integrale di linea di prima specie

$$\int_\gamma \frac{1-x}{y^2+z^2} \mathrm{d}s$$

dove γ è il cammino parametrizzato da

$$\vec{\gamma}(t) = \left(t^2, \cos(t), \sin(t)\right) \quad t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$$

Esercizio 2.18. Calcolare

$$\int_\gamma \sqrt{2y^2 + z^2} \mathrm{d}s$$

dove γ è il cammino semplice con sostegno soluzione del sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ y = x \end{cases}$$

ed orientato in modo che la sua proiezione sul piano (z, x) sia percorsa in senso antiorario.

Esercizio 2.19. Determinare la retta tangente all'astroide

$$\vec{\gamma}(t) = \big((\cos(t))^3, (\sin(t))^3\big) \qquad t \in [0, 2\pi]$$

nel punto $P = (\sqrt{2}/4, \sqrt{2}/4)$.

Esercizio 2.20. Calcolare

$$\int_\gamma (x^2 + y^2)\mathrm{d}s$$

essendo Γ la curva in forma polare

$$\rho = e^{2\theta}, \qquad \theta \in (-\infty, 0]$$

Esercizio 2.21. Un filo omogeneo, di densità lineare ρ, è disposto lungo la curva di equazione

$$\vec{r}(t) = a(\cos(t) + \sin(t))\vec{i} + a(\sin(t) - \cos(t))\vec{j}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

Calcolare il momento di inerzia rispetto all'asse z.