1 Coordinate cartesiane e coordinate polari

Consideriamo un piano Π. Siamo abituati ad introdurvi un *sistema di coordinate cartesiane* nel seguente modo: fisso un punto del piano O che chiamo *origine* e due distinte rette orientate passanti per O. Li chiamiamo *asse x* e *asse y*, rispettivamente. Su ciascun asse introduco una unità di misura.

Consideriamo un punto P del piano Π, traccio la retta parallela all'asse y passante per P. Incontra l'asse x in un punto che chiamo P_x. Traccio la retta parallela all'asse x passante per P. Incontra l'asse y in un punto che chiamo P_y.

I segmenti OP_x e OP_y hanno una misura determinata dall'unità di misura scelta sui due assi. Se P_x segue (o coincide con) O nell'orientamento dell'asse x chiamo *ascissa del punto P* la misura di OP_x. Se P_x precede O nell'orientamento dell'asse x chiamo *ascissa del punto P* la misura di OP_x cambiata di segno. Analogamente, considerando il segmento OP_y definisco l'*ordinata* del punto P.

Se le due rette di riferimento, cioé l'asse x e l'asse y sono perpendicolari, il sistema di riferimento Oxy si dice *sistema di riferimento cartesiano ortogonale*.

Il punto P è così univocamente determinato dalla sua ascissa e dalla sua ordinata (più brevemente dalle sue *coordinate cartesiane*). Si usa il simbolo $P \equiv (x, y)$ o $P(x, y)$ per dire che P è il punto del piano Π individuato dalle coordinate cartesiane (x, y)

Esistono altri sistemi di coordinate per individuare un punto del piano. Vediamone uno: considero un punto O sul piano (che chiamo *polo*) ed una semiretta s, che chiamo *asse polare* uscente dal polo. Considero un punto P sul piano: posso individuare la sua posizione sul piano in questo modo: mediante la sua distanza dall'origine e mediante l'angolo che devo percorrere in senso orario per portare l'asse polare sulla semiretta uscente da O e passante per P, cioé tramite una coppia ordinata (r, θ) con $r > 0$ e $\theta \in \mathbb{R}$ ($\theta \in (-\pi, \pi]$ se voglio un solo valore di θ).

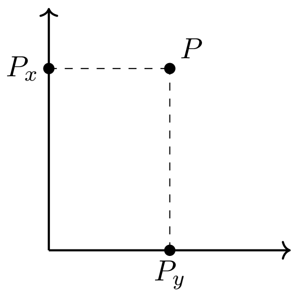
Osservazione 1.1. Le coordinate polari sono ben definite solo per i punti P diversi dal polo. Perché?

Considero ora un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani Oxy ed un sistema di coordinate polari in cui il polo coincide con l'origine e l'asse polare con la semiretta positiva dell'asse x. Un punto P del piano sarà individuato dalle coordinate cartesiane (x, y) e dalle coordinate polari (r, θ). Che relazione c'è tra le due coordinate?

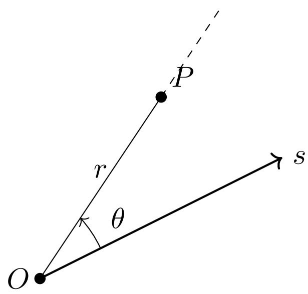
$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \cos\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sin\theta = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases} \tag{1}$$

Esempio 1.1. Trovare le coordinate polari del punto P di coordinate cartesiane $(1, 1)$.

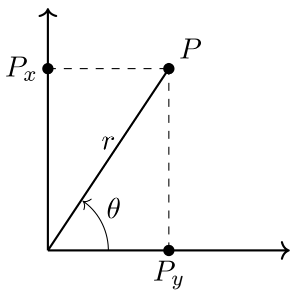
Uso le formule (1): $r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, mentre le uguaglianze $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$ ci dicono che $\theta = \dfrac{\pi}{4}$. Quindi le coordinate polari del punto P sono $\left(\sqrt{2}, \dfrac{\pi}{4}\right)$.



(a) Coordinate cartesiane



(b) Coordinate polari



(c) Cambiamento di coordinate

Figura 1: Coordinate cartesiane e coordinate polari

Osservazione 1.2. Le coordinate polari sono ben definite solo per i punti P diversi dal polo. Come si riflette questo nelle formule di cambiamento di coordinate?