$(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato $\qquad X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ v.a. discrete

$X(\Omega) = \{x_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ $\quad \mathcal{I}$ insieme discreto

$Y(\Omega) = \{y_j\}_{j \in J}$ $\quad J$ insieme discreto

$(X,Y) : \omega \in \Omega \mapsto (X(\omega), Y(\omega)) \in \mathbb{R}^2$

$(X,Y)(\Omega) \subseteq X(\Omega) \times Y(\Omega) = \{(x_i, y_j)\}_{(i,j) \in \underline{\underline{\mathcal{I} \times J}}}$ insieme discreto

$(x_i, y_j) \quad (i,j) \in \mathcal{I} \times J$

$\mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) =: p_{ij}$ $\quad p_{ij}$ si dice DENSITÀ CONGIUNTA DI X E Y NEL PTO (x_i, y_j)

$p_i := \mathbb{P}(X = x_i)$ $\quad p_i$ si dice DENSITÀ MARGINALE di (X,Y) in x_i

$q_j := \mathbb{P}(Y = y_j)$ $\quad q_j$ " in y_j

$$\{X = x_i\} = \{X = x_i, Y \in \{y_j\}_{j \in J}\} = \bigcup_{j \in J} \underbrace{\{X = x_i, Y = y_j\}}_{\text{eventi disgiunti 2 a 2}}$$

$$\mathbb{P}(X = x_i) = \sum_{j \in J} \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)$$

$$\boxed{p_i = \sum_{j \in J} p_{ij} \qquad \forall i \in \mathcal{I}}$$

$$\{Y = y_j\} = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} \{X = x_i, Y = y_j\} \qquad \mathbb{P}(Y = y_j) = \sum_{i \in \mathcal{I}} \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)$$

$$\boxed{q_j = \sum_{i \in \mathcal{I}} p_{ij} \qquad \forall j \in J}$$

ESEMPIO $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P}) = ([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \mathbb{P} = \mathcal{L}^1|_{\mathcal{B}([0,1])})$

$E = [0, \frac{1}{2}]$ $\qquad F = [0, \frac{1}{3}]$

$X := \mathbb{1}_E$ $\qquad Y := \mathbb{1}_F$

$\mathbb{P}_X = B(p)$ $\qquad \mathbb{P}_Y = B(q)$

$p = \mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}(E) = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $q = \mathbb{P}(Y=1) = \mathbb{P}(F) = \frac{1}{3}$

$(X,Y)(\Omega) \subseteq \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$

$\mathbb{P}(X=1, Y=1) = \frac{1}{3}$ $\qquad$ $\{\omega \in \Omega : X(\omega)=1, Y(\omega)=1\} = E \cap F$

$= [0, \frac{1}{2}] \cap [0, \frac{1}{3}] = [0, \frac{1}{3}]$

$\boxed{p_{11} = \frac{1}{3}}$

$\tilde{E} = [0, \frac{1}{2}]$ $\qquad$ $\tilde{F} = [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$

$\tilde{X} = \mathbb{1}_{\tilde{E}}$ $\qquad$ $\tilde{Y} = \mathbb{1}_{\tilde{F}}$

$\mathbb{P}_{\tilde{X}} = B(\tilde{p})$ $\qquad$ $\mathbb{P}_{\tilde{Y}} = B(\tilde{q})$

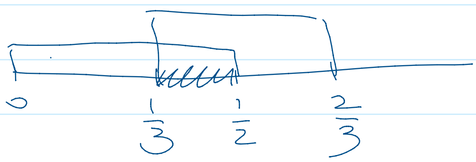
$\mathbb{P}(\tilde{X}=1) = \mathbb{P}(\tilde{E}) = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $\mathbb{P}(\tilde{Y}=1) = \mathbb{P}(\tilde{F}) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

$\tilde{p} = \frac{1}{2} = p$ $\qquad$ $\tilde{q} = \frac{1}{3} = q$

$\tilde{p}_{11} = \mathbb{P}(\tilde{X}=1, \tilde{Y}=1) =$ $\qquad$ $\{\omega \in \Omega : \tilde{X}(\omega)=1, \tilde{Y}(\omega)=1\} =$

$= \mathbb{P}\left([\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ $\qquad$ $= \tilde{E} \cap \tilde{F} = [0, \frac{1}{2}] \cap [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] = [\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$

$p_{11} = \frac{1}{3} \neq \tilde{p}_{11}$



DEF $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato

$X_1, X_2, \dots X_N : \Omega \to \mathbb{R}$ funzioni

$X := (X_1, X_2, \dots X_N)$

$X : \omega \in \Omega \longmapsto (X_1(\omega), X_2(\omega) \dots X_N(\omega)) \in \mathbb{R}^N$

Dico che X è una V.A. VETTORIALE (o MULTIVARIATA) se

$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\} \in \mathcal{E}$

PROP $X=(X_1 \dots X_N)$ è una v.a. multivariata SSE tutte le sue componenti sono v.a. scalari

CENNO ① X sia v.a. multivariata

$t\in\mathbb{R}$ $\quad P(X_1\le t)$ $\quad \{X_1\le t\}=\{X_1\le t, X_2\in\mathbb{R}, \dots X_N\in\mathbb{R}\}$

$$\{X_1\le t\}=\{X\in\underbrace{(-\infty,t]\times\mathbb{R}^{N-1}}_{\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)}\}\in\mathcal{E}$$

② $$\{X_1\le t_1, X_2\le t_2, \dots X_N\le t_N\}=\bigcap_{i=1}^{N}\underbrace{\{X_i\le t_i\}}_{\in\mathcal{E}}\in\mathcal{E}$$

$$X^{-1}\left(\prod_{i=1}^{N}(-\infty,t_i]\right)\in\mathcal{E}$$

Da questo si può dimostrare che la retroimmagine di ciascun boreliano di $\mathbb{R}^N$ è un evento

---

$X=(X_1 \dots X_N)$ v.a. multivariata su $(\Omega,\mathcal{E},\mathbb{P})$

$A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ $\quad \{X\in A\}\in\mathcal{E} \implies \mathbb{P}(X\in A)$ è ben definita

$$\mathbb{P}_X : A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)\mapsto\mathbb{P}(X\in A)\in\mathbb{R}$$

Si può dimostrare che $(\mathbb{R}^N,\mathcal{B}(\mathbb{R}^N),\mathbb{P}_X)$ è uno spazio probabilizzato

$\mathbb{P}_X$ si chiama DISTRIBUZIONE DI X

DISTRIBUZIONE CONGIUNTA DI $X_1 \dots X_N$

$\mathbb{P}_{X_1} \dots \mathbb{P}_{X_N}$ si dicono DISTRIBUZIONI MARGINALI DI X

$(t_1 \dots t_N)\in\mathbb{R}^N$ $\quad \{X_1\le t_1, X_2\le t_2 \dots X_N\le t_N\}=\bigcap_{i=1}^{N}\underbrace{\{X_i\le t_i\}}_{\in\mathcal{E}}\in\mathcal{E}$

$$F_X(t_1, \dots t_N)=\mathbb{P}(X_1\le t_1 \dots X_N\le t_N)=$$

$$=\mathbb{P}_X\left(\prod_{i=1}^{N}(-\infty,t_i]\right)$$

F_X si dice LEGGE CONGIUNTA DI $X_1 \dots X_N$

PROPRIETÀ Se conosco $\mathbb{P}_X=\mathbb{P}_{X_1\dots X_N}$, allora conosco le distribuzioni marginali $\mathbb{P}_{X_1}, \mathbb{P}_{X_2} \dots \mathbb{P}_{X_N}$

Dim $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ $\quad \mathbb{P}_{X_1}(A) = \mathbb{P}(X_1 \in A)$

$$\{X_1 \in A\} = \{X_1 \in A, (X_2, \dots X_N) \in \mathbb{R}^{N-1}\} = \{X \in \underbrace{A \times \mathbb{R}^{N-1}}_{\in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)}\}$$

$$\mathbb{P}_{X_1}(A) = \mathbb{P}(X_1 \in A) = \mathbb{P}(X \in A \times \mathbb{R}^{N-1}) = \mathbb{P}_X(A \times \mathbb{R}^{N-1})$$

Analogo per le altre componenti

PROPOSIZIONE (no dim)

Siano $X_1, \_\_ X_N : \Omega \to \mathbb{R}$ v.a. su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$

$\varphi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ $\quad \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$-misurabile (*) e non negativa

$\varphi \circ X$ è una v.a. $\quad$ ($\mathbb{R}^N$, $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$, qualsiasi misura)

$\forall t \in \mathbb{R}$ $\quad \{x \in \mathbb{R}^N : \varphi(x) \le t\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$

Allora

$$\int_\Omega (\varphi \circ X)(\omega)\, \mathbb{P}(d\omega) = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(t)\, \mathbb{P}_X(dt) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(t_1 \_\_ t_N)\, \mathbb{P}_X(dt_1 \_\_ dt_N)$$

FORMULA DI COMPOSIZIONE (no dim)

Sia $X : \Omega \to \mathbb{R}^N$ v.a. su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$

$f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^k$ $\quad \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$-misurabile

Allora $f \circ X : \Omega \to \mathbb{R}^k$ è una v.a. su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ e

$\forall \varphi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ $\quad \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$-misurabile e non negativa

$$\int_{\mathbb{R}^k} \varphi(s_1 \dots s_k)\, \mathbb{P}_{f \circ X}(ds_1 \_\_ ds_k) = \int_{\mathbb{R}^N} (\varphi \circ f)(t_1 \_\_ t_N)\, \mathbb{P}_X(dt_1 \_\_ dt_N)$$

CASO PARTICOLARE

$(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato $\quad X, Y : \Omega \to \mathbb{R}^n$

$f : (s,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto s+t \in \mathbb{R}^n$

$f(s_1 \_\_ s_n, t_1 \_\_ t_n) \mapsto (s_1+t_1, s_2+t_2, \_\_, s_n+t_n)$

$\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\quad$ di Borel non negativa

$N = 2n \qquad K = n \qquad (X, Y) \qquad f \circ (X, Y) = X + Y$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(s_1 - s_n)\, \mathbb{P}_{X+Y}(ds_1 \_\_ ds_n) = \int_{\mathbb{R}^{2n}} (\varphi \circ f)(s_1 - s_n, t_1 - t_n)\, \mathbb{P}_{(X,Y)}(ds_1 \_ ds_n\, dt_1 \_ dt_n)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{2n}} \varphi(s_1+t_1, s_2+t_2 \dots s_n+t_n)\, \mathbb{P}_{(X,Y)}(ds_1 \_ ds_n dt_1 \_ dt_n)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{2n}} \varphi(s_1+t_1, s_2+t_2 \dots s_n+t_n)\, \mathbb{P}_{(X,Y)}(ds_1 \dots ds_n dt_1 \dots dt_n)$$

$A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ $\qquad \varphi := \mathbb{1}_A$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_A(s_1 \dots s_n)\, \mathbb{P}_{X+Y}(ds_1 \dots ds_n) = \mathbb{P}(X+Y \in A)$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(X+Y \in A) = \int_{\mathbb{R}^{2n}} \mathbb{1}_A(s_1+t_1 \dots s_n+t_n)\, \mathbb{P}_{(X,Y)}(ds_1 \dots ds_n dt_1 \dots dt_n)$$

$$= \mathbb{P}_{(X,Y)}\left(\{(s,t) \in \mathbb{R}^{2n} : s+t \in A\}\right)$$

DEF DISTRIBUZIONI A.C.

$X : \Omega \to \mathbb{R}^N$ v.a. su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$

Dico che X ha distribuzione A.C. con densità f $\quad (\mathbb{P}_X = f(x)dx)$

se ① $f : \mathbb{R}^N \to \overline{\mathbb{R}}$ è Lebesgue-misurabile nonnegative

② $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ $\qquad \mathbb{P}_X(A) = \int_A f(x)dx$

OSS $1 = \mathbb{P}_X(\mathbb{R}^N) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x)dx$

OSS Come nel caso scalare si dimostra che $\mathbb{P}_X$ è AC con densità f SSE $\forall \varphi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$-misurabile e nonnegative si ha

$$\int_{\mathbb{R}^N} \varphi(t)\, \mathbb{P}_X(dt) = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(t) f(t)\, dt \qquad t = (t_1 \dots t_N)$$

OSSERVAZIONE $\quad X = (X_1 \dots X_N)$ con $\mathbb{P}_X = f(x)dx = f(x_1 \dots x_N)dx_1 \dots dx_N$

$A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ $\qquad \mathbb{P}(X_1 \in A) = \mathbb{P}_{X_1}(A)$

$$\{X_1 \in A\} = \{X_1 \in A, (X_2, \dots X_N) \in \mathbb{R}^{N-1}\} = \{X \in A \times \mathbb{R}^{N-1}\}$$

$$\mathbb{P}_{X_1}(A) = \mathbb{P}(X_1 \in A) = \mathbb{P}(X \in A \times \mathbb{R}^{N-1}) = \mathbb{P}_X(\underbrace{A \times \mathbb{R}^{N-1}}_{\in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)}) =$$

$$= \int_{A \times \mathbb{R}^{N-1}} f(x)dx = \int_{A \times \mathbb{R}^{N-1}} f(x_1 \dots x_N)\, dx_1 \dots dx_N =$$

$$= \int_A \left(\underbrace{\int_{\mathbb{R}^{N-1}} f(x_1 - x_N)\, dx_2 \dots dx_N}_{} \right) dx_1$$

$$g_1(x_1) := \int_{\mathbb{R}^{N-1}} f(x_1, x_2 \dots x_N)\, dx_2 \dots dx_N$$

$\Rightarrow$ $P_{X_1}(A) = \int_A g_1(x_1)\, dx_1 \qquad \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$\Rightarrow$ X_1 ha distribuzione A.C. con densità g_1

Analogamente: $\forall k = 1 \dots N$, la componente X_k ha distribuzione A.C. con densità

$$g_k(x_k) = \int_{\mathbb{R}^{N-1}} f(x_1 \dots x_{k-1}, x_k, x_{k+1} \dots x_N)\, dx_1 \dots dx_{k-1}\, dx_{k+1} \dots dx_N$$

PROPOSIZIONE Sia $(\Omega, \mathcal{E}, P)$ spazio probabilizzato

Siano $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ v.a.

Allora $E[|XY|] \leq \sqrt{E[X^2] E[Y^2]}$

DIM. (1) $E[X^2]E[Y^2] = +\infty$ $\Rightarrow$ non c'è niente da dimostrare

(2) $E[X^2]$ o $E[Y^2]$ è uguale a 0:

Supponiamo $E[X^2] = 0$ $\Rightarrow$ $X = 0$ P-qc $\Rightarrow$ $|XY| = 0$ P-qc

$\Rightarrow$ $E[|XY|] = 0$ $\Rightarrow$ non c'è niente da dimostrare

(3) $E[X^2]$ e $E[Y^2]$ sono entrambi finiti e strettamente positivi

$$A(\omega) := \frac{|X(\omega)|}{\sqrt{E[X^2]}} \qquad B(\omega) := \frac{|Y(\omega)|}{\sqrt{E[Y^2]}}$$

$a, b \in \mathbb{R} \qquad (a-b)^2 \geq 0 \qquad a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$

$2ab \leq a^2 + b^2 \qquad \forall a, b \in \mathbb{R}$

$\forall \omega \in \Omega \qquad 2A(\omega)B(\omega) \leq A^2(\omega) + B^2(\omega)$

$$\frac{2|X(\omega)Y(\omega)|}{\sqrt{E[X^2]E[Y^2]}} \le \frac{X^2(\omega)}{E[X^2]} + \frac{Y^2(\omega)}{E[Y^2]}$$

Integro su Ω:

$$\frac{2}{\sqrt{E[X^2]E[Y^2]}} E[|XY|] \le \frac{1}{\cancel{E[X^2]}}\cancel{E[X^2]} + \frac{1}{\cancel{E[Y^2]}}\cancel{E[Y^2]} = 2$$

$$E[|XY|] \le \sqrt{E[X^2]E[Y^2]}$$

COROLLARIO $$|E[XY]| \le E[|XY|] \le \sqrt{E[X^2]E[Y^2]}$$

— o —

Siano $X, Y: \Omega \to \mathbb{R}$ v.a. con valore atteso finito: $E[X] \in \mathbb{R}$, $E[Y] \in \mathbb{R}$

Applico le disuguaglianze a $\tilde{X} := X - E[X]$
$\tilde{Y} := Y - E[Y]$

$$|E[(X-E[X])(Y-E[Y])]| \le E[|(X-E[X])(Y-E[Y])|] \le$$
$$\le \sqrt{E[(X-E[X])^2]\,E[(Y-E[Y])^2]} \le \sqrt{Var[X]Var[Y]}$$

Se $Var[X]$ e $Var[Y]$ sono finite $\Rightarrow E[(X-E[X])(Y-E[Y])]$ esiste finito. Lo chiamiamo COVARIANZA DI X E Y e lo indichiamo $Cov(X,Y)$

Se X e Y sono v.a. con valore atteso e varianza finiti $\Rightarrow$

$$|Cov(X,Y)| \le \sqrt{Var[X]Var[Y]}$$

PROPRIETÀ X, Y v.a. con valore atteso e varianza finiti

1. $Cov(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y]$ ←

DIM $Cov(X,Y) = E[(X-E[X])(Y-E[Y])] =$
$= E[XY - E[X]Y - E[Y]X + E[X]E[Y]] =$
$= E[XY] - E[X]E[Y] \cancel{- E[Y]E[X]} + \cancel{E[X]E[Y]}$

2. $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R} \Rightarrow Cov(\alpha X + \beta, \gamma Y + \delta) = \alpha\gamma\, Cov(X,Y)$

$= \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] - \cancel{\mathbb{E}[Y]\mathbb{E}[X]} + \cancel{\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]}$

(2) $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R} \Rightarrow Cov(\alpha X + \beta, \gamma Y + \delta) = \alpha\gamma\, Cov(X,Y)$

DIM $Cov(\alpha X + \beta, \gamma Y + \delta) = \mathbb{E}[(\alpha X + \beta)(\gamma Y + \delta)] - \mathbb{E}[\alpha X + \beta]\,\mathbb{E}[\gamma Y + \delta]$

$= \mathbb{E}[\alpha\gamma XY + \alpha\delta X + \beta\gamma Y + \beta\delta] - (\alpha \mathbb{E}[X] + \beta)(\gamma \mathbb{E}[Y] + \delta)$

$= \alpha\gamma\, \mathbb{E}[XY] + \cancel{\alpha\delta\, \mathbb{E}[X]} + \cancel{\beta\gamma\, \mathbb{E}[Y]} + \cancel{\beta\delta} -$

$- (\alpha\gamma\, \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] + \cancel{\alpha\delta\, \mathbb{E}[X]} + \cancel{\beta\gamma\, \mathbb{E}[Y]} + \cancel{\beta\delta})$

$= \alpha\gamma\, (\mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]) = \alpha\gamma\, Cov(X,Y)$

(3) $Cov(X,X) = Var[X]$

(4) $Var[X+Y] = Var[X] + Var[Y] + 2Cov(X,Y)$

DIM $Var[X+Y] = \mathbb{E}[(X+Y-\mathbb{E}[X+Y])^2] = \mathbb{E}[(X+Y-\mathbb{E}[X]-\mathbb{E}[Y])^2]$

$= \mathbb{E}[((X-\mathbb{E}[X]) + (Y-\mathbb{E}[Y]))^2] = \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])^2 + (Y-\mathbb{E}[Y])^2 + 2(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])]$

$= \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])^2] + \mathbb{E}[(Y-\mathbb{E}[Y])^2] + 2\,\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])]$

$= Var[X] + Var[Y] + 2Cov(X,Y)$

(5) Per induzione:

$$Var\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right] = \sum_{i=1}^{N} Var[X_i] + 2 \sum_{1 \le i < j \le N} Cov(X_i, X_j)$$

INDIPENDENZA

Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato

Dati $A, B \in \mathcal{E}$, dico che A e B sono indipendenti se $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A)\cancel{\mathbb{P}(B)}}{\cancel{\mathbb{P}(B)}} = \mathbb{P}(A)$$

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\cancel{\mathbb{P}(A)}\mathbb{P}(B)}{\cancel{\mathbb{P}(A)}} = \mathbb{P}(B)$$

- Siano $A_1 \ldots A_N \in \mathcal{E}$, dico che $A_1 \ldots A_N$ è una famiglia finita di eventi indipendenti se

$\forall k = 2, \ldots, N$ e $\forall A_{i_1} \ldots A_{i_k}$ scelti tra $A_1 \ldots A_N$ distinti 2 a 2

si ha che $\mathbb{P}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \ldots \mathbb{P}(A_{i_k})$

ESEMPIO A, B, C, D

$k = N = 4$ $\quad \mathbb{P}(A\cap B\cap C\cap D) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)\mathbb{P}(D)$

$k = 3$ $\quad \mathbb{P}(A\cap B\cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$

$\mathbb{P}(A\cap B\cap D) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(D)$

$\mathbb{P}(A\cap C\cap D) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C)\mathbb{P}(D)$

$\binom{4}{3} = \frac{4!}{3!\,1!} = 4$

$$\mathbb{P}(A\cap B\cap D) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(D)$$ $\quad \frac{\;}{3!1!}$

$$\mathbb{P}(A\cap C\cap D) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C)\mathbb{P}(D)$$

$$\mathbb{P}(B\cap C\cap D) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)\mathbb{P}(D)$$

$K=2$

$$\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

$$\mathbb{P}(A\cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C)$$ $\quad \binom{4}{2} = \frac{4!}{2!2!} = 6$

$$\mathbb{P}(A\cap D) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(D)$$

$$\mathbb{P}(B\cap C) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$$ $\quad 1+4+6 = \underline{11}$

$$\mathbb{P}(B\cap D) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(D)$$

$$\mathbb{P}(C\cap D) = \mathbb{P}(C)\mathbb{P}(D)$$

- Sia $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ successione di eventi di $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$. Dico che $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ è una successione di eventi indipendenti se ogni sua sottofamiglia finita è una famiglia finita di eventi indipendenti

---

V.A. indipendenti

$(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato $\quad \left.\begin{array}{l} X:\Omega \to \mathbb{R}^N \\ Y:\Omega\to\mathbb{R}^K \end{array}\right\}$ v.a su $(\Omega,\mathcal{E},\mathbb{P})$

Dico che X e Y sono v.a. indipendenti se

$\forall A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ e $\forall B\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ $\quad \mathbb{P}(X\in A, Y\in B) = \mathbb{P}(X\in A)\mathbb{P}(Y\in B)$

ovvero $\mathbb{P}_{(X,Y)}(A\times B) = \mathbb{P}_X(A)\mathbb{P}_Y(B)$

TEO Sono condizioni equivalenti:

① X e Y sono indipendenti

② $\forall \varphi: \mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^K \to \mathbb{R}$ funzione di Borel nonnegativa
$\varphi: (x,y)\mapsto \varphi(x,y)$

$$\int_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^K} \varphi(x,y)\, \mathbb{P}_{(X,Y)} dx\,dy = \int_{\mathbb{R}^N}\left(\int_{\mathbb{R}^K}\varphi(x,y)\mathbb{P}_Y(dy)\right)\mathbb{P}_X(dx)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^K}\left(\int_{\mathbb{R}^N}\varphi(x,y)\mathbb{P}_X(dx)\right)\mathbb{P}_Y(dy)$$

COROLLARIO Siano $X,Y:\Omega\to\mathbb{R}$ v.a. indipendenti t.c. $\mathbb{E}[X]$ ed $\mathbb{E}[Y]$ esistono e sono finiti.

Allora $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$ e $Cov(X,Y) = 0$

e $Var[X+Y] = Var[X] + Var[Y]$

DIM

$$\mathbb{E}[|XY|] = \int_{\mathbb{R}^2} |xy| \, \mathbb{P}_{(X,Y)}(dx\,dy) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |xy| \, \mathbb{P}_Y(dy) \right) \mathbb{P}_X(dx)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} |x| \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} |y| \mathbb{P}_Y(dy) \right)}_{\mathbb{E}[|Y|]} \mathbb{P}_X(dx) = \mathbb{E}[|Y|] \int_{\mathbb{R}} |x| \mathbb{P}_X(dx)$$

$$= \mathbb{E}[|Y|] \, \mathbb{E}[|X|] < +\infty$$

$\Rightarrow \mathbb{E}[XY]$ esiste ed è finito

$\Rightarrow$ Posso rifare tutti i conti togliendo il valore assoluto e ottengo la Tesi -

CASO DISCRETO

$X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ v.a. entrambe discrete e indipendenti

$X(\Omega) = \{x_i\}_{i \in I}$ $\quad Y(\Omega) = \{y_j\}_{j \in J}$

$$p_{ij} = \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) = \underbrace{\mathbb{P}(X = x_i)}_{p_i} \underbrace{\mathbb{P}(Y = y_j)}_{q_j} = p_i q_j$$

CASO PARTICOLARE $\quad$ X e Y discrete indipendenti

$X(\Omega) \subseteq \mathbb{Z}$ $\quad Y(\Omega) \subseteq \mathbb{Z}$

$\Rightarrow (X+Y)(\Omega) \subseteq \mathbb{Z}$

$\mathbb{P}(X+Y = k) = ?$

$$\{X+Y = k\} = \{X+Y = k, X \in \mathbb{Z}\} = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} \{X+Y = k, X = j\} =$$

$$= \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} \{X = j, Y = k-j\}$$

$$\mathbb{P}(X+Y = k) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} \{X = j, Y = k-j\} \right) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \mathbb{P}(X = j, Y = k-j) =$$

$$= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \mathbb{P}(X = j) \mathbb{P}(Y = k-j)$$

$p_j := \mathbb{P}(X = j)$
$q_j := \mathbb{P}(Y = j)$ $\quad \forall j \in \mathbb{Z}$

$$\boxed{\mathbb{P}(X+Y = k) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} p_j q_{k-j} \quad \forall k \in \mathbb{Z}}$$

CASO A.C.

Siano $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ indipendenti

(X, Y) ha distribuzione AC con densità $f(x,y)$ $\quad f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Abbiamo mostrato che $\mathbb{P}_X$ e $\mathbb{P}_Y$ sono A.C.

(X,Y) ha distribuzione AC con densità $f(x,y)$ $\quad f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Abbiamo mostrato che $\mathbb{P}_X$ e $\mathbb{P}_Y$ sono A.C

$$\mathbb{P}_X = g_1(x)\,dx \qquad g_1(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy$$

$$\mathbb{P}_Y = g_2(y)\,dy \qquad g_2(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dx$$

$$A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \qquad \mathbb{P}(X\in A, Y\in B) = \mathbb{P}(X\in A)\,\mathbb{P}(Y\in B)$$

$$\mathbb{P}(X\in A, Y\in B) = \mathbb{P}\big((X,Y)\in A\times B\big) = \int_{A\times B} f(x,y)\,dx\,dy$$

$\parallel$ per l'indipendenza

$$\mathbb{P}(X\in A)\,\mathbb{P}(Y\in B) = \left(\int_A g_1(x)\,dx\right)\left(\int_B g_2(y)\,dy\right) = \int_{A\times B} g_1(x)\,g_2(y)\,dx\,dy$$

$$\mathbb{P}_{X,Y}(A\times B) = \int_{A\times B} g_1(x)\,g_2(y)\,dx\,dy$$

$\Rightarrow$ la densità $f(x,y)$ è $= g_1(x)\,g_2(y)$

VICEVERSA Supponiamo che $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ siano indipendenti entrambe con distribuzione AC.

$$\mathbb{P}_X = g(x)\,dx$$
$$\mathbb{P}_Y = h(y)\,dy$$

$$(X,Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$$

$$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),\ \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \qquad \mathbb{P}\big((X,Y)\in A\times B\big) = \mathbb{P}(X\in A, Y\in B) = \mathbb{P}(X\in A)\,\mathbb{P}(Y\in B)$$

$$\mathbb{P}\big((X,Y)\in A\times B\big) = \left(\int_A g(x)\,dx\right)\left(\int_B h(y)\,dy\right) = \int_{A\times B} g(x)\,h(y)\,dx\,dy$$

A partire da questo si può dimostrare che $\forall C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$

$$\mathbb{P}\big((X,Y)\in C\big) = \int_C g(x)\,h(y)\,dx\,dy$$

$\Rightarrow$ $\mathbb{P}_{(X,Y)}$ è AC con densità $f(x,y) = g(x)\,h(y)$

SOMMA DI V.A. INDIPENDENTI AVENTI DISTRIBUZIONE A.C.

SOMMA DI V.A. INDIPENDENTI AVENTI DISTRIBUZIONE A.C.

$X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ indipendenti $\qquad \mathbb{P}_X = f(x)\,dx$

$\mathbb{P}_Y = g(y)\,dy$

$\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ di Borel non negativa

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(t)\, \mathbb{P}_{X+Y}(dt) = \int_{\mathbb{R}} \psi(x+y)\, \mathbb{P}_{X,Y}(dx\,dy)$$

$A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \qquad \mathbb{P}(X+Y \in A) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_A(t)\, \mathbb{P}_{X+Y}(dt) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_A(x+y)\, \mathbb{P}_{X,Y}(dx\,dy)$

$= \text{per indipendenza} = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_A(x+y)\, \mathbb{P}_Y(dy) \right) \mathbb{P}_X(dx) =$

$= \text{per AC} = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_A(x+y)\, g(y)\, dy \right) f(x)\, dx$

$t = x+y \qquad y = t-x \qquad dy = dt$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_A(t)\, g(t-x)\, dt \right) f(x)\, dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_A(t)\, g(t-x)\, f(x)\, dx\, dt =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \underline{\mathbb{1}_A(t)}\, g(t-x)\, f(x)\, dx \right) dt =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_A(t) \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} f(x)\, g(t-x)\, dx \right)} dt \qquad h(t) := \int_{\mathbb{R}} f(x)\, g(t-x)\, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_A(t)\, h(t)\, dt = \int_A h(t)\, dt$$

$\Rightarrow \mathbb{P}(X+Y \in A) = \int_A h(t)\, dt \qquad \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$\Rightarrow X+Y$ ha distribuzione AC con densità $h(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, g(t-x)\, dx$