lunedì 16 novembre 2020 07:57

DISUGUAGLIANZA DI MARKOV

Sia $X : \Omega \to \mathbb{R}$ v.a. su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$. Sia $I \subset \mathbb{R}$ intervallo t.c. $I \supset X(\Omega)$

e sia $f : I \to \mathbb{R}$
- Borel-misurabile
- nonnegativa
- strettamente monotona crescente

Allora $f(t)\mathbb{P}(X > t) \leq \mathbb{E}[f \circ X] \quad \forall t \in I$

DIM

$$f(t)\mathbb{P}(X>t) = f(t)\underline{\mathbb{P}(f\circ X > f(t))} = \qquad \{X>t\} = \{f\circ X > f(t)\}$$

$$= f(t)\int_\Omega \mathbb{1}_{\{f\circ X > f(t)\}}(\omega)\,\mathbb{P}(d\omega) = \int_\Omega f(t)\,\mathbb{1}_{\{f\circ X > f(t)\}}(\omega)\,\mathbb{P}(d\omega) \leq$$

$$\leq \int_\Omega (f\circ X)(\omega)\,\mathbb{1}_{\{f\circ X > f(t)\}}(\omega)\,\mathbb{P}(d\omega) \leq \qquad f(t)\,\mathbb{1}_{\{f\circ X > f(t)\}}(\omega) \leq (f\circ X)(\omega)\cdot \mathbb{1}_{\{f\circ X > f(t)\}}$$

$$\leq \int_\Omega (f\circ X)(\omega)\,\mathbb{P}(d\omega) = \mathbb{E}[f\circ X]$$

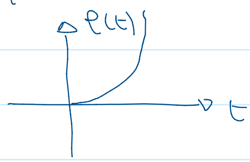
DISUGUAGLIANZA DI CHEBYCHEV

Sia $X : \Omega \to \mathbb{R}$ v.a. su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ t.c. $\mathbb{E}[X]$ esiste ed è finito

Allora

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| > t) \leq \frac{\mathrm{Var}[X]}{t^2} \qquad \forall t > 0$$

DIM $\quad Y := |X - \mathbb{E}[X]| \qquad I = [0, +\infty) \qquad f(t) = t^2$



$$t^2\,\mathbb{P}(Y>t) \leq \mathbb{E}[Y^2]$$

$$t^2\,\mathbb{P}(|X-\mathbb{E}[X]|>t) \leq \mathbb{E}[|X-\mathbb{E}[X]|^2] = \mathrm{Var}[X]$$

DISTRIBUZIONE DI BERNOULLI

$\{0,1\} \qquad p_1 = p \in [0,1] \qquad p_0 = 1-p \in [0,1]$

$X : \Omega \to \mathbb{R}$ v.a. su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ t.c. $\mathbb{P}(X \notin \{0,1\}) = 0$

$\mathbb{P}(X=1) = p, \quad \mathbb{P}(X=0) = 1-p$

Lancio di una moneta $\quad \Omega = \{T, C\} \qquad \mathcal{E} = \mathcal{P}(\Omega)$

Lancio di una moneta $\Omega = \{T, C\}$ $\mathcal{E} = \mathcal{P}(\Omega)$

$X : \Omega \to \mathbb{R}$

$X(T) = 1$

$X(C) = 0$

Se la probabilità che in un singolo lancio esca Testa è p

io pongo $\mathbb{P}(\{T\}) = p$ $\mathbb{P}(\{C\}) = 1-p$

e ottengo $\mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}(\{T\}) = p$

$\mathbb{P}(X=0) = \mathbb{P}(\{C\}) = 1-p$

Se una v.a. X ha questa distribuzione si scrive $\mathbb{P}_X = Ber(p)$

$\mathbb{E}[X] = \sum t_k \mathbb{P}(X=t_k) = \sum t_k p_k = 0 \cdot (1-p) + 1 \cdot p = p$

$\mathbb{E}[X^2] = \sum t_k^2 \mathbb{P}(X=t_k) = 0^2 \cdot (1-p) + 1^2 \cdot p = p$

$Var[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = p - p^2 = p(1-p)$

DISTRIBUZIONE BINOMIALE DI PARAMETRI n E p

$n \geq 1$, $p \in [0,1]$

È la distribuzione concentrata su $\{0, 1, \dots n\}$ con

$$p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \forall k = 0, 1, \dots n \qquad p_k \geq 0 \quad \sum_{k=0}^{n} p_k = 1$$

Se una v.a. X ha questa distribuzione si indica $\mathbb{P}_X = B(n,p)$

$$\mathbb{E}[X] = \sum t_k \mathbb{P}(X=t_k) = \sum t_k p_k = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} =$$

$$= (1-p)^n \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} \left(\frac{p}{1-p}\right)^k \qquad x := \frac{p}{1-p}$$

$$= (1-p)^n \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} x^k \leftarrow$$

Sappiamo che $\forall x \in \mathbb{R}$ $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$

derivo:

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k x^{k-1} = x^{-1} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k x^k =$$

$$= x^{-1} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k x^k$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k x^k = n x (1+x)^{n-1}}$$

$$\mathbb{E}[X] = (1-p)^n \, n x (1+x)^{n-1} \Big|_{x = \frac{p}{1-p}} \qquad x = \frac{p}{1-p}$$

$1 - \cancel{p} + \cancel{p}$

$$\mathbb{E}[X] = (1-p)\ n x (1+x)\Big|_{x=\frac{p}{1-p}}$$ $x = \frac{1}{1-p}$

$1+x = \frac{1-\cancel{p}+\cancel{p}}{1-p}$

$$= \cancel{(1-p)^n}\, n \frac{p}{\cancel{1-p}} \frac{1}{\cancel{(1-p)^{n-1}}} = np$$

$$\mathbb{E}[X^2] = \sum t_k^2 p_k = \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} =$$ $k^2 = k(k-1+1)$

$$= \sum_{k=0}^{n} \Big(k(k-1)+k \Big) \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}_{= \mathbb{E}[X] = np}$$

$$\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}\left(\frac{p}{1-p}\right)^k (1-p)^n =$$ $x := \frac{p}{1-p}$

$$= (1-p)^n \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} x^k$$

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

derivo: $n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k\, x^{k-1}$

derivo: $n(n-1)(1+x)^{n-2} = \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} k(k-1)\, x^{k-2}$

moltiplico per x^2: $n(n-1)\, x^2 (1+x)^{n-2} = \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} k(k-1)\, x^k$

$$\mathbb{E}[X^2] = (1-p)^n\, n(n-1)\, x^2 (1+x)^{n-2}\Big|_{x=\frac{p}{1-p}} + np$$ $1+x = \frac{1}{1-p}$

$$= \cancel{(1-p)^n}\, n(n-1) \frac{p^2}{\cancel{(1-p)^2}} \frac{1}{\cancel{(1-p)^{n-2}}} + np$$

$$= n(n-1)p^2 + np = np\big((n-1)p+1\big)$$

$$\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = np\big((n-1)p+1\big) - (np)^2 =$$

$$= np\left(\cancel{np} - p + 1 - \cancel{np}\right) = np(1-p)$$

Ho una moneta su cui a ogni singolo lancio esce Testa con probabilità p e croce con probabilità $1-p$
La lancio n volte.

p è croce con probabilità $1-p$

Lo lancio n volte.

$\Omega = \{T,C\}^n = \{\omega = (\omega_1 \_\_ \omega_n) : \omega_i \in \{T,C\}\}$

$\mathcal{E} = \mathcal{P}(\Omega)$

$\bar{\omega} = (\bar{\omega}_1 \dots \bar{\omega}_n)$ $\quad \mathbb{P}(\{\bar{\omega}\}) = p^{\#\text{volte che } \bar{\omega}_i = T} (1-p)^{\#\text{volte che } \bar{\omega}_i = C}$

$$X : \omega \in \Omega \longmapsto |\{i = 1 \dots n : \omega_i = T\}|$$

$$X(\Omega) = \{0, 1 \dots n\}$$

Se fisso $k \in \{0, 1 \dots n\}$ $\quad \mathbb{P}(X=k)$

$X(\omega) = k$ SSE in ω ci sono k Teste e $n-k$ croci

$\Rightarrow X(\omega) = k \Rightarrow \mathbb{P}(\{\omega\}) = p^k (1-p)^{n-k}$

$\{X=k\}$ $\quad \mathbb{P}(X=k) = \underbrace{|\{\omega \in \Omega : \omega \text{ contiene } k \text{ Teste e } n-k \text{ croci}\}|}_{\binom{n}{k}} \, p^k (1-p)^{n-k}$

$$\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$\sum_{k=0}^{n} p_k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = (p + (1-p))^n = 1^n = 1$$

DISTRIBUZIONE IPERGEOMETRICA DI PARAMETRI $b, r, n \in \mathbb{N}_+$ $\quad b+r \geq n$

E' la distribuzione concentrata su $\{0, 1, \dots n\}$ t.c.

$$p_k = \frac{\binom{b}{k}\binom{r}{n-k}}{\binom{b+r}{n}} \qquad \forall k = 0, 1 \dots n$$

Considero un'urna che contiene b palline bianche e r palline rosse. Estraggo n palline senza reimbussolare.

$\Omega = \{\omega : \omega$ è sottoinsieme di $\{1, 2, 3, \dots b \,|\, b+1, \dots b+r\}$ avente cardinalità $n\}$ $\quad \mathcal{E} = \mathcal{P}(\Omega)$

$\omega \in \Omega \quad \mathbb{P}(\{\omega\}) = \dfrac{1}{|\Omega|} = \dfrac{1}{\binom{b+r}{n}}$

$X(\omega)$ = numero di palline bianche contenute in ω

$$|\Omega| \qquad \binom{b+r}{n}$$

$X(\omega)$ = numero di palline bianche contenute in ω

$$\mathbb{P}(X=k) = \frac{\binom{b}{k}\binom{r}{n-k}}{\binom{b+r}{n}}$$

Si dimostra che se X è una v.a. avente questa distribuzione, allora

$$\mathbb{E}[X] = n\frac{b}{b+r} \quad ; \quad Var[X] = \frac{nbr}{(b+r)^2}\left(1-\frac{n-1}{b+r-1}\right)$$

OSS. Se Y è una v.a. con $\mathbb{P}_Y = B\left(n, p=\frac{b}{b+r}\right) \Rightarrow \mathbb{E}[Y] = np$

cioè $\mathbb{E}[Y] = n\frac{b}{b+r} = \mathbb{E}[X]$

$$Var[Y] = np(1-p) = n\frac{b}{b+r}\left(1-\frac{b}{b+r}\right) = \frac{nbr}{(b+r)^2}$$

DISTRIBUZIONE DI POISSON DI PARAMETRO $\lambda > 0$

È distribuita su tutto $\mathbb{N}$

$$p_k = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \qquad \forall k = 0, 1, 2, \dots$$

$$p_k \geq 0 \quad \forall k \qquad \sum_{k\geq 0} p_k = \sum_{k\geq 0} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\underbrace{\sum_{k\geq 0}\frac{\lambda^k}{k!}} = e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda} = 1$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!} + R_n(x,0) \qquad R_n(x,0) = \frac{e^{\xi}x^{n+1}}{(n+1)!}$$

con ξ compreso nell'intervallo di estremi 0 e x

$$|R_n(x,0)| = \frac{e^{\xi_n}|x|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\xi \in [0,x] \qquad e^{\xi_n} \leq e^x \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

$$a_n = \frac{|x|^n}{n!} > 0 \qquad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\,\frac{n!}{|x|^n} = |x|\frac{1}{n+1} \to 0$$

$$\to \sum a_n \text{ converge } \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

$$e^x = \sum_{k\geq 0}\frac{x^k}{k!} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Se una v.a. X ha questa distribuzione si scrive $\mathbb{P}_X = \mathcal{P}(\lambda)$

$\mathbb{E}[X] = ?$ $\quad Var[X] = ?$

$\lambda \cdot \lambda^{k-1}$

$E[X] = ? \qquad Var[X] = ?$

$$E[X] = \sum t_k p_k = \sum_{k\geq 0} k\, e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \sum_{k\geq 1} \cancel{k}\, e^{-\lambda} \frac{\overset{\lambda\cdot\lambda^{k-1}}{\lambda^k}}{\underset{(k-1)!}{\cancel{k!}}} =$$

$$= e^{-\lambda}\lambda \sum_{k\geq 1} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = e^{-\lambda}\lambda \underbrace{\boxed{\sum_{j\geq 0}\frac{\lambda^j}{j!}}}_{=e^{\lambda}} = \qquad j = k-1, \quad k\geq 1 \Leftrightarrow j \geq 0$$

$$= e^{-\lambda}\cdot\lambda\cdot e^{\lambda} = \lambda$$

$$E[X^2] = \sum t_k^2 p_k = \sum_{k\geq 0} k^2 e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \qquad k^2 = k(k-1+1) = k(k-1)+k$$

$$= \sum_{k\geq 0}\big(k(k-1)+k\big) e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = \sum_{k\geq 0} k(k-1)e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} + \underbrace{\sum_{k\geq 0} k e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}}_{=E[X]=\lambda}$$

$$\sum_{k\geq 0} k(k-1)e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = \sum_{k\geq 2} \cancel{k(k-1)}\, e^{-\lambda}\frac{\overset{\lambda^2\cdot\lambda^{k-2}}{\lambda^k}}{\underset{(k-2)!}{\cancel{k!}}}$$

$$= e^{-\lambda}\lambda^2 \sum_{k\geq 2}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} = \qquad j = k-2 \quad k\geq 2 \Leftrightarrow j\geq 0$$

$$= e^{-\lambda}\lambda^2 \underbrace{\sum_{j\geq 0}\frac{\lambda^j}{j!}}_{e^{\lambda}} = e^{-\lambda}\cdot\lambda^2\cdot e^{\lambda} = \lambda^2$$

$$E[X^2] = \lambda^2 + \lambda \qquad Var[X] = \lambda^2 + \lambda - (\lambda)^2 = \lambda$$

Sia $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [0,1]$ t.c. $\lim_{n\to\infty} np_n = \lambda > 0$ $\left(\Rightarrow \lim_{n\to\infty} p_n = 0\right)$

$B(n,p_n) \qquad p_k = \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} \quad \forall k = 0, \ldots, n$

Fisso $k\in\mathbb{N}$ $\quad \forall n\geq k \quad p_k = \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k}$

$$\binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{(np_n)^k}{n^k}(1-p_n)^{n-k} =$$

$$= \frac{1}{k!}\underbrace{\frac{\overset{n^k + \text{addendi di grado inferiore a } k}{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}}{n^k}}_{\to 1 \text{ quando } n\to\infty} \underbrace{(np_n)^k}_{\to \lambda^k} (1-p_n)^{n-k} \qquad p_n \to 0 \quad \text{"}1^{\infty}\text{"}$$

$$(1-p_n)^{n-k} = \qquad \lim_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}} = e^{-1}$$

$$(1-p_n)^{n-k} = \left[\underbrace{(1-p_n)^{\frac{1}{p_n}}}_{\downarrow\; e^{-1}}\right]^{p_n(n-k)} \longrightarrow (e^{-1})^{\lambda} = e^{-\lambda}$$

$$\lim_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}} = e^{-1}$$

$$\longrightarrow \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

$$(1-x)^{x} = \left((1-x)^{-x}\right)^{-1}$$

$y=-x$

$$\left(\underbrace{(1+y)^{y}}_{\downarrow\; e}\right)^{-1} \longrightarrow e^{-1}$$

$$p_n(n-k) = np_n - kp_n \longrightarrow \lambda - 0 = \lambda$$

$$\binom{n}{k}p_n^k(1-p_n)^{n-k} \longrightarrow \underbrace{\frac{1}{k!}\lambda^k e^{-\lambda}}$$

DISTRIBUZIONE GEOMETRICA DI PARAMETRO $p \in (0,1)$

È distribuita sugli interi positivi $\{1,2,3,4,\ldots\ldots\}$ e

$$\forall k \geq 1 \qquad p_k = p(1-p)^{k-1}$$

$$p_k > 0 \quad \forall k \geq 1 \qquad \sum_{k\geq 1} p_k = \sum_{k\geq 1} p(1-p)^{k-1}$$

$j = k-1$
$k \geq 1$
$\Updownarrow$
$j \geq 0$

$$= \sum_{j\geq 0} p(1-p)^j = p\sum_{j\geq 0} x^j \Big|_{x=1-p}$$

OSS
$$\sum_{j\geq 0} x^j = \begin{cases} +\infty & x \geq 1 \\ \dfrac{1}{1-x} & |x|<1 \\ \text{non è definita} & x < -1 \end{cases}$$

$x = 1-p \qquad p\in(0,1)$
$\Downarrow$
$0 < 1-p < 1$

$$\Rightarrow \sum_{k\geq 1} p_k = p\,\frac{1}{1-x}\Big|_{x=1-p} = \frac{p}{1-(1-p)} = 1$$

EXCURSUS NELLE SERIE DI POTENZE

Sia $(a_k)_{k\geq 0}$ successione a valori reali

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n = \sum_{k=0}^{n} a_kx^k$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} a_kx^k = \sum_{k\geq 0} a_kx^k$$

1) $x=0 \qquad \sum_{k=0}^{n} a_kx^k = a_0 \qquad \forall n\in\mathbb{N} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} a_kx^k = a_0$

(2) Chiamo INSIEME DI CONVERGENZA DELLA SERIE DI POTENZE $\sum_{k\geq 0} a_k x^k$ l'insieme

$$I = \{x \in \mathbb{R} : \sum_{k\geq 0} a_k x^k \text{ converge}\}$$

(3) Si può dimostrare che l'insieme di convergenza è di uno dei seguenti tipi

(A) $I = \{0\}$

(B) È un intervallo centrato in 0 — $[-R,R]$, $(-R,R)$, $(-R,R]$, $[-R,R)$

(C) È tutto $\mathbb{R}$

(4) Se I è un intervallo centrato in 0 o se $I = \mathbb{R}$ considero $f : x \in I \mapsto \sum_{k\geq 0} a_k x^k \in \mathbb{R}$

(5) Si dimostra che f è derivabile infinite volte in $\mathrm{int}(I)$ (o tutto $\mathbb{R}$ se $I=\mathbb{R}$ o $(-R,R)$ e I è un intervallo centrato in 0 e semiampiezza R) e la serie delle derivate $\sum_{k\geq 1} k a_k x^{k-1}$ converge in $\mathrm{int}(I)$

e $\frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} \sum_{k\geq 0} a_k x^k = \sum_{k\geq 1} k a_k x^{k-1} = \sum_{k\geq 1} \frac{d}{dx}\left(a_k x^k\right)$

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k \qquad I = (-1,1)$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$$

$$f'(x) = (1-x)^{-2}$$

$$= \sum_{k\geq 0} \frac{d}{dx} x^k = \sum_{k\geq 1} k x^{k-1}$$

$$\boxed{\forall x \in (-1,1) \quad \sum_{k\geq 1} k x^{k-1} = (1-x)^{-2}} \longleftarrow$$

$f'(x) = \sum_{k\geq 1} k x^{k-1} \quad \forall x \in (-1,1) \qquad f''(x) = \sum_{k\geq 1} \frac{d}{dx} k x^{k-1}$

$f'(x) = (1-x)^{-2} \quad f''(x) = 2(1-x)^{-3} = \sum_{k\geq 2} k(k-1) x^{k-2}$

$$\boxed{\forall x \in (-1,1) \quad \sum_{k\geq 2} k(k-1) x^{k-2} = 2(1-x)^{-3}} \longleftarrow$$

Sia X v.a. con distribuzione geometrica di parametro $p \in (0,1)$

Si scrive $\mathbb{P}_X = G(p)$

$$\mathbb{E}[X] = \sum t_k p_k = \sum_{k\geq 1} k\, p(1-p)^{k-1} = p \sum_{k\geq 1} k x^{k-1} \Big|_{x=1-p}$$

$$= p(1-x)^{-2}\Big|_{x=1-p} = p\, p^{-2} = \frac{1}{p} \qquad x=1-p \Rightarrow 1-x=p$$

$$\mathbb{E}[X^2] = \sum t_k^2 p_k = \sum_{k\geq 1} k^2 p(1-p)^{k-1} \qquad k^2 = k(k-1+1) = k(k-1)+k$$

$$= \sum_{k\geq 1} k(k-1)p(1-p)^{k-1} + \underbrace{\sum_{k\geq 1} k\, p(1-p)^{k-1}}_{= \mathbb{E}[X] = \frac{1}{p}}$$

$$\sum_{k\geq 1} k(k-1)p(1-p)^{k-1} = p(1-p)\sum_{k\geq 2} k(k-1)(1-p)^{k-2} =$$

$$= p(1-p)\sum_{k\geq 2} k(k-1)x^{k-2}\Big|_{x=1-p} = 2p(1-p)(1-x)^{-3} = 2p(1-p)\cdot p^{-3} = \frac{2(1-p)}{p^2}$$

$$\mathbb{E}[X^2] = \frac{2(1-p)}{p^2} + \frac{1}{p}$$

$$\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = \frac{2-2p}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} =$$

$$= \frac{2-2p+p-1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$$

— o —

X = # di prova in cui ottengo il 1° successo

$X(\Omega) = \{1, 2, 3, \ldots\} \cup \{+\infty\}$

$\mathbb{P}(X=k) = (1-p)^{k-1}\, p$

$$\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_{k-1}, \omega_k \ldots)$$

ω_1: ins, ω_2: ins, ω_3: ins, ω_{k-1}: ins, ω_k: successo

$$\mathbb{P}(X=+\infty) = 1 - \mathbb{P}(X<+\infty) = 1 - \mathbb{P}\Big(\bigcup_{k\geq 1}\{X=k\}\Big) =$$

$$= 1 - \sum_{k\geq 1}\mathbb{P}(X=k) = 1 - \underbrace{\sum_{k\geq 1} p(1-p)^{k-1}}_{=1} = 1-1 = 0$$

Y := # di insuccessi che ottengo prima di ottenere il 1° successo

N.B. $Y = X-1$

$Y(\Omega) = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$

N.B. $Y = X - 1$

$Y(\Omega) = \mathbb{N}_{\geq 0} \cup \{+\infty\}$

$\forall k \geq 0 \quad \mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(X - 1 = k) = \mathbb{P}(X = k+1) = p(1-p)^{(k+1)-1}$
$= p(1-p)^k$

$\mathbb{P}(Y = +\infty) = \mathbb{P}(X - 1 = +\infty) = \mathbb{P}(X = +\infty) = 0$

La distribuzione concentrata sugli interi non negativi data da

$$p_k = p(1-p)^k \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

si dice distribuzione geometrica modificata di parametro $p \in (0,1)$
Si scrive $\mathbb{P}_Y = G'(p)$

$$\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[X - 1] = \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[1] = \frac{1}{p} - 1 = \frac{1-p}{p}$$

$$\mathrm{Var}[Y] = \mathrm{Var}[X - 1] = \mathrm{Var}[X] = \frac{1-p}{p^2}$$

PROPRIETÀ DELLA MANCANZA DI MEMORIA

Sia X una v.a. distribuita sugli interi nonnegativi.
Se $\mathbb{P}(X \leq i + j \mid X \geq j) = \mathbb{P}(X \leq i) \quad \forall i, j \in \mathbb{N}$
dico che X MANCA DI MEMORIA