X v.a. su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$

$X : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ t.c. $\forall t \in \mathbb{R}$ $\{X \leq t\} \in \mathcal{E}$

$F_X : t \in \mathbb{R} \mapsto \mathbb{P}(X \leq t) \in [0,1]$

1) F_X è monotona non decrescente

$s, t \in \mathbb{R}$ $s \leq t$ $\Rightarrow$ $\{X \leq s\} \subseteq \{X \leq t\}$

$\Downarrow$

$F_X(s) = \mathbb{P}(X \leq s) \leq \mathbb{P}(X \leq t) = F_X(t)$

2) $\lim_{t \to -\infty} F_X(t) = \mathbb{P}(X = -\infty)$ NO DIM

3) $\lim_{t \to +\infty} F_X(t) = 1 - \mathbb{P}(X = +\infty)$ NO DIM

4) F_X è una funzione continua da destra $\lim_{s \to t^+} F_X(s) = F_X(t)$

LEMMA DI COLLEGAMENTO Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $x_0 \in \mathbb{R}$

Allora $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ SSE $\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ $x_n \to x_0$ si ha $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = L$

$\to$ Allora $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$ ($x \to x_0^-$) SSE $\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monotone decrescente (crescente) t.c. $x_n \to x_0$ si ha $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = L$

DIM DI 4) Sia $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ successione monotone decrescente $s_n \to t$

$\{X \leq s_n\}$ $s_{n+1} \leq s_n$ $\{X \leq s_{n+1}\} \subseteq \{X \leq s_n\}$

$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{X \leq s_n\} = \{X \leq t\}$

(1) $\subseteq$

$\omega \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{X \le s_n\}$: $X(\omega) \le s_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

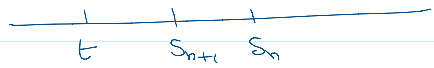
$X(\omega) \le \lim_{n\to\infty} s_n = t$

$\Rightarrow \quad \omega \in \{X \le t\}$

$\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\{X\le s_n\} \subseteq \{X \le t\}$

(2) $\supseteq$

$\omega \in \{X\le t\} \qquad X(\omega) \le t \le s_n \quad \forall n\in\mathbb{N}$



$\Rightarrow \omega \in \{X\le s_n\} \quad \forall n \in\mathbb{N}$ cioè

$\omega \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{X\le s_n\}$

cioè $\{X\le t\} \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{X \le s_n\}$

$$F_X(t) = \mathbb{P}(X\le t) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\{X\le s_n\}\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X\le s_n) = \lim_{n\to\infty} F_X(s_n)$$

$\Rightarrow$ Per il lemma di collegamento $F_X(t) = \lim_{s\to t^+} F_X(s)$

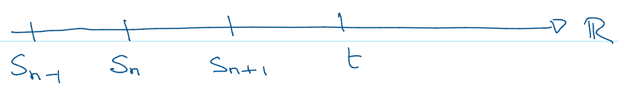
5) $\lim_{s\to t^-} F_X(s) = F_X(t) - \mathbb{P}(X=t)$

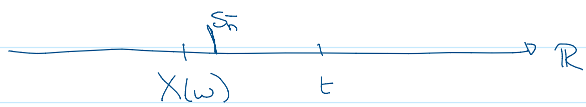
Sia $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successione monotona crescente t.c. $s_n \to t$

$\{X<t\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{X\le s_n\} \qquad \{X\le s_n\} \subseteq \{X\le s_{n+1}\}$

(1) $\subseteq$

$\omega\in\{X<t\} \qquad X(\omega)<t$





$X(\omega)<t \Rightarrow \exists \bar n$ t.c. $s_{\bar n} > X(\omega)$

$\Rightarrow \forall n>\bar n \qquad s_n \ge s_{\bar n} > X(\omega)$

$\exists \bar n$ t.c. $\forall n>\bar n \quad X(\omega) \le s_n$

$\exists \bar n$ t.c. $\forall n>\bar n \quad \omega\in\{X\le s_n\}$

$\Rightarrow \omega \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{X\le s_n\}$

$\Rightarrow \{X<t\} \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{X\le s_n\}$

(2) $\supseteq$

$\omega \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{X\le s_n\}$

$\exists \bar n$ T.c. $\omega\in\{X\le s_{\bar n}\}$

$\Downarrow$

$X(\omega) \le s_{\bar n} < t$

$\Downarrow$

$\omega\in\{X<t\}$

$\Downarrow$

$\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{X\le s_n\} \subseteq \{X<t\}$

$$\mathbb{P}(X<t) = \mathbb{P}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{X\le s_n\}\Big) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X\le s_n) = \lim_{n\to\infty} F_X(s_n)$$

$$\Rightarrow \lim_{s\to t^-} F_X(s) = \mathbb{P}(X<t) \qquad \{X<t\} = \{X\le t\}\setminus\{X=t\}$$

$$= \mathbb{P}(X\le t) - \mathbb{P}(X=t) = F_X(t) - \mathbb{P}(X=t)$$

OSS F_X è discontinua in un pto $\bar{t}\in\mathbb{R}$ SSE $\mathbb{P}(X=\bar{t})>0$

Tle F_X è monotona $\Rightarrow$ $\exists$ al più un'infinità numerabile di pti $t\in\mathbb{R}$ t.c. $\mathbb{P}(X=t)>0$

DISTRIBUZIONE DI UNA V.A.

$(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato $\qquad X:\Omega\to\overline{\mathbb{R}}$ v.a.

Allora $\{X=+\infty\}, \{X=-\infty\}$ sono eventi

$\forall A\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ $\{X\in A\}$ è un evento

$$\forall A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}) \qquad \mathbb{P}_X(A) := \mathbb{P}(X\in A)$$

$$\mathbb{P}_X : A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}) \mapsto \mathbb{P}(X\in A) \in [0,1]$$

È una misura su $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

$(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ famiglia numerabile di Boreliani di $\mathbb{R}$ $\quad A_n\cap A_k=\emptyset \quad n\ne k$

$$\Rightarrow \mathbb{P}_X\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \mathbb{P}\Big(X\in\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \qquad X(\omega)\in\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

SSE

$$= \mathbb{P}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{X\in A_n\}\Big) = \star \qquad \exists n \text{ t.c. } X(\omega)\in A_n$$

$A_n\cap A_k=\emptyset \quad n\ne k \qquad$ Se $X(\omega)\in A_n \Rightarrow X(\omega)\notin A_k$

$$\Rightarrow \{X\in A_n\}\cap\{X\in A_k\} = \emptyset$$

$$\star \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(X\in A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}_X(A_n) \leftarrow$$

$$\mathbb{P}_X(\mathbb{R}) = \mathbb{P}(X\in\mathbb{R}) = \qquad \{X\in\mathbb{R}\} = \Omega\setminus\big(\{X=+\infty\}\cup\{X=-\infty\}\big)$$

$$= 1 - \big(\mathbb{P}(X=+\infty) + \mathbb{P}(X=-\infty)\big)$$

$$= 1 \quad \text{SSE} \quad \begin{cases} \mathbb{P}(X=+\infty) = 0 \\ \mathbb{P}(X=-\infty) = 0 \end{cases}$$

LAVORIAMO NEL CASO $\quad X:\Omega\to\overline{\mathbb{R}}$ con $\mathbb{P}(X=+\infty) = \mathbb{P}(X=-\infty) = 0$

Questo ci assicura che $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbb{P}_X)$ è uno spazio probabilizzato

LAVORIAMO NEL CASO $X:\Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ con $\mathbb{P}(X=+\infty)=\mathbb{P}(X=-\infty)=0$

Questo ci assicura che $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbb{P}_X)$ è uno spazio probabilizzato

$\mathbb{P}_X$ si dice DISTRIBUZIONE DEI VALORI DI X

$$F_X(t)=\mathbb{P}(X\le t)=\mathbb{P}(X\in[-\infty,t])=\cancel{\mathbb{P}(X=-\infty)}^{=0 \text{ per ipotesi}}+\mathbb{P}(X\in(-\infty,t])$$
$$=\mathbb{P}_X((-\infty,t])$$

$$\{E\in\mathcal{E} \; : \; E=X^{-1}(A),\ A\in\mathcal{B}(\mathbb{R})\}\subseteq\mathcal{E}$$

è una σ-algebra di Ω (no dim) e si dice σ-ALGEBRA DEGLI EVENTI RILEVATI DA X

VALORE ATTESO DI UNA V.A.

Sia $(\Omega,\mathcal{E},\mathbb{P})$ spazio probabilizzato

1) Sia $X:\Omega\to\mathbb{R}$ una v.a. che assume solo un numero finito di valori che indico $c_1, c_2 \ldots c_N$, cioè X funzione semplice

$E_k=\{X=c_k\}=\{\omega\in\Omega : X(\omega)=c_k\} \Rightarrow E_1 \ldots E_N$ è una partizione misurabile di Ω

e $$X(\omega)=\sum_{k=1}^{N} c_k \mathbb{1}_{E_k}(\omega)$$

Pongo $$\int_\Omega X(\omega)\,\mathbb{P}(d\omega) := \sum_{k=1}^{N} c_k \mathbb{P}(E_k)=\sum_{k=1}^{N} c_k \mathbb{P}(X=c_k)$$

2) $X:\Omega\to\overline{\mathbb{R}}$ v.a. non negativa

$$\sup\left\{\int_\Omega Y(\omega)\mathbb{P}(d\omega) \; ; \; 0\le Y\le X \; ; \; Y \text{ funzione semplice}\right\}$$

si dice $$\int_\Omega X(\omega)\mathbb{P}(d\omega)$$

3) $X:\Omega\to\overline{\mathbb{R}}$ v.a. qualsiasi

$X^+(\omega):=\max\{X(\omega),0\}$ PARTE POSITIVA DI X

$X^-(\omega):=\max\{-X(\omega),0\}$ PARTE NEGATIVA DI X

Si dimostra che sono entrambe v.a. nonnegative, che $X^+-X^-=X$

che $\quad X^+ - X^- = X$

$\quad\quad X^+ + X^- = |X|$

Se almeno uno tra $\int_\Omega X^+(\omega)\mathbb{P}(d\omega)$ e $\int_\Omega X^-(\omega)\mathbb{P}(d\omega)$ è finito, dico che X è una V.A integrabile rispetto a $\mathbb{P}$ e pongo

$$\int_\Omega X(\omega)\mathbb{P}(d\omega) := \int_\Omega X^+(\omega)\mathbb{P}(d\omega) - \int_\Omega X^-(\omega)\mathbb{P}(d\omega)$$

Se entrambi $\int_\Omega X^+(\omega)\mathbb{P}(d\omega)$ e $\int_\Omega X^-(\omega)\mathbb{P}(d\omega)$ sono finiti dico che X è SOMMABILE RISPETTO A $\mathbb{P}$

— o —

$$\int_\Omega X(\omega)\mathbb{P}(d\omega) = \frac{1}{\mathbb{P}(\Omega)}\int_\Omega X(\omega)\mathbb{P}(d\omega)$$

per questo $\int_\Omega X(\omega)\mathbb{P}(d\omega)$ si dice anche VALORE ATTESO DI X e si indica $\mathbb{E}[X]$.

— o —

Sia $X: \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ v.a. su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$

Abbiamo anche $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbb{P}_X)$ $\leftarrow$

$\varphi: \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ t.c. $\forall t \in \mathbb{R}$ $\{x \in \mathbb{R} : \varphi(x) \le t\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

è una v.a. su $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbb{P}_X)$. φ si dice FUNZIONE BORELLIANA o FUNZIONE DI BOREL o FUNZIONE BOREL-MISURABILE

$\Rightarrow$ è anche ben definito $\int_\mathbb{R} \varphi(x)\mathbb{P}_X(dx)$ se φ è nonnegativa

— o —

V.A. CON DISTRIBUZIONE DISCRETA

$(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato $X: \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ v.a. si dice una V.A. con distribuzione discreta se $\exists (t_j)_{j\in\mathcal{J}} \subset \mathbb{R}$ finito ($\mathcal{J} = \{1..N\}$) o numerabile ($\mathcal{J} = \mathbb{N}$)

t.c. $\mathbb{P}\left(X \in \bigcup_{j\in\mathcal{J}}\{t_j\}\right) = 1$

cioè $\mathbb{P}_X\left(\bigcup_{j\in\mathcal{J}}\{t_j\}\right) = 1$ o equivalentemente $\mathbb{P}_X\left(\mathbb{R} \setminus \bigcup_{j\in\mathcal{J}}\{t_j\}\right) = 0$

Pongo $\quad p_j := \mathbb{P}(X = t_j) = \mathbb{P}_X(\{t_j\})$

Tengo $\quad p_j := \mathbb{P}(X = t_j) = \mathbb{P}_X(\{t_j\})$

$$p_j \geq 0 \quad e \quad \sum_{j\in J} p_j = \sum_{j\in J} \mathbb{P}(X=t_j) = \mathbb{P}\Big(X \in \bigcup_{j\in J}\{t_j\}\Big) = 1$$

$A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \qquad \mathbb{P}_X(A) = ?$

$$A = \Big(A \setminus \bigcup_{j\in J}\{t_j\}\Big) \cup \Big(A \cap \bigcup_{j\in J}\{t_j\}\Big) =$$

$$= \Big(A \setminus \bigcup_{j\in J}\{t_j\}\Big) \cup \bigcup_{j\in J}\big(A \cap \{t_j\}\big)$$

$$\mathbb{P}_X(A) = \cancel{\mathbb{P}_X\Big(A \setminus \bigcup_{j\in J}\{t_j\}\Big)}^{=0} + \mathbb{P}_X\Big(\bigcup_{j\in J}(A\cap\{t_j\})\Big) =$$

$$A \setminus \bigcup_{j\in J}\{t_j\} \subseteq \underbrace{\mathbb{R} \setminus \bigcup_{j\in J}\{t_j\}} \Rightarrow \mathbb{P}_X\Big(A \setminus \bigcup_{j\in J}\{t_j\}\Big) = 0$$

$$k \neq j \qquad (A\cap\{t_k\}) \cap (A \cap \{t_j\}) = \emptyset$$

$$= \sum_{j\in J} \mathbb{P}_X(A \cap \{t_j\}) \qquad A\cap\{t_j\} = \begin{cases} \emptyset & t_j \notin A \\ \{t_j\} & t_j \in A \end{cases}$$

$$\mathbb{P}_X(\emptyset) = 0$$

$$= \sum_{j\in J : t_j \in A} \mathbb{P}_X(\{t_j\}) = \sum_{j \in J: t_j \in A} p_j$$

$$F_X(t) = \mathbb{P}_X((-\infty, t]) = \sum_{j\in J: t_j \leq t} p_j$$

$\varphi : \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ funzione Borel-misurabile nonnegativa

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, \mathbb{P}_X(dx) = \sum_{j\in J} \varphi(t_j)\, p_j$$

(1) φ funzione semplice $\qquad \varphi(x) = \sum_{k=1}^{N} c_k \mathbb{1}_{E_k}(x)$

$$E_k := \{x \in \mathbb{R} : \varphi(x) = c_k\}$$

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\mathbb{P}_X(dx) = \sum_{k=1}^{N} c_k\, \mathbb{P}_X(E_k)$$

$$\mathbb{P}_X(E_k) = \sum_{j\in J : t_j \in E_k} p_j$$

$$\int \varphi(x)\mathbb{P}_X(\ \ ) = \sum^{N} c_k \sum \quad p_j = \sum^{N} \sum \quad c_k p_j$$

$j\in J: t_j \in E_k$

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\mathbb{P}_X(dx) = \sum_{k=1}^{N} c_k \sum_{j\in J: t_j\in E_k} p_j = \sum_{k=1}^{N} \underbrace{\sum_{j\in J: t_j\in E_k} c_k p_j}_{\to\, c_k = \varphi(t_j)}$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \sum_{j\in J: t_j\in E_k} \varphi(t_j)p_j = \sum_{j\in J} \varphi(t_j)p_j$$

(2) φ Borel misurabile non negativa

Uso il lemma di campionamento : $\exists\, (\varphi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ successione monotone crescente di funzioni semplici non negative t.c. $\lim_{i\to\infty} \varphi_i(x) = \varphi(x) \quad \forall x\in\mathbb{R}$

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\mathbb{P}_X(dx) = \int_{\mathbb{R}} \left(\lim_{i\to\infty}\varphi_i(x)\right)\mathbb{P}_X(dx) \underset{\substack{\text{Beppo Levi}\\ \text{per l'integrale}\\ \text{rispetto a } \mathbb{P}_X}}{=} \lim_{i\to\infty}\int_{\mathbb{R}} \varphi_i(x)\mathbb{P}_X(dx)$$

$$= \lim_{i\to\infty} \sum_{j\in J} \varphi_i(t_j)p_j =$$

$$= \sum_{j\in J} \lim_{i\to\infty}\varphi_i(t_j)p_j = \sum_{j\in J}\varphi(t_j)p_j$$

V.A. CON DISTRIBUZIONE A.C.

Sia la v.a. X t.c. $\exists f: \mathbb{R}\to[0,+\infty)$ misurabile secondo Lebesgue e non negativa t.c.

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1 \quad \text{e} \quad \forall A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}) \quad \mathbb{P}_X(A) = \int_{\mathbb{R}} f(x)dx$$

In particolare $A = (-\infty, t]$ $\quad F_X(t) = \int_{(-\infty,t]} f(x)dx = \int_{-\infty}^{t} f(x)dx$

- In particolare la legge è continua $\Rightarrow \mathbb{P}(X=t) = 0 \quad \forall t\in\mathbb{R}$
- Se f è continua in un pto $\bar{t}\in\mathbb{R} \Rightarrow F_X'(\bar{t}) = f(\bar{t})$

· Se $\varphi: \mathbb{R}\to[0,+\infty]$ funzione Borel misurabile non negativa

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\mathbb{P}_X(dx) = \int_{\mathbb{R}}\varphi(x)f(x)\,dx$$

(1) φ funzione semplice non negativa $\quad \varphi(x) = \sum_{k=1}^{N} c_k \mathbb{1}_{E_k}(x)$

$E_k = \{x\in\mathbb{R} : \varphi(x) = c_k\}$

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\mathbb{P}_X(dx) = \sum_{k=1}^{N} c_k \mathbb{P}_X(E_k) =$$

$$\sum_{k=1}^{N} c_k \int f(x)dx \quad \sum_{k=1}^{N}\int \underbrace{c_k}_{\varphi(x)} f(x)dx \quad \sum_{k=1}^{N}\int \varphi(x)f(x)dx \ldots$$

$$= \sum_{k=1}^{N} c_k \int_{E_k} f(x)dx = \sum_{k=1}^{N} \int_{E_k} \underbrace{c_k}_{\varphi(x)} f(x)dx = \sum_{k=1}^{N} \int_{E_k} \varphi(x)f(x)dx =$$

$$= \int_{\bigcup_{k=1}^{N} E_k} \varphi(x)f(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)f(x)dx$$

(2) φ Borel misurabile nonnegativa

$\exists (\varphi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ successione monotone crescente di funzioni semplici t.c.

$$\lim_{i\to\infty} \varphi_i(x) = \varphi(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\mathbb{P}_X(dx) = \int_{\mathbb{R}} \lim_{i\to\infty} \varphi_i(x)\,\mathbb{P}_X(dx) = \lim_{i\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \varphi_i(x)\,\mathbb{P}_X(dx)$$

Beppo Levi per l'integrazione rispetto a $\mathbb{P}_X$

$$= \lim_{i\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \varphi_i(x)f(x)dx \qquad g_i(x) = \varphi_i(x)f(x)$$

$$= \lim_{i\to\infty} \int_{\mathbb{R}} g_i(x)dx = \qquad 0 \le g_i(x) \le g_{i+1}(x)$$

Beppo Levi all'integrale rispetto alla misura di Lebesgue

$$\lim_{x\to\infty} g_i(x) = \varphi(x)f(x)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \lim_{i\to\infty} g_i(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)f(x)dx$$

La funzione $f(x)$ si dice DENSITÀ DELLA DISTRIBUZIONE $\mathbb{P}_X$

TEOREMA Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato e sia $X: \Omega \to \mathbb{R}$ v.a. su tale spazio

Sia $\varphi: \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ funzione di Borel nonnegativa

Allora $\varphi \circ X$ è una v.a su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ e

$$\mathbb{E}[\varphi\circ X] := \int_{\Omega} (\varphi\circ X)(\omega)\,\mathbb{P}(d\omega) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,\mathbb{P}_X(dx)$$

DIM (A) $\varphi\circ X$ è una v.a.

Sia $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$\{\varphi\circ X \in A\} = \{\omega\in\Omega: \varphi(X(\omega)) \in A\} =$$
$$= \{\omega\in\Omega: X(\omega) \in \underbrace{\varphi^{-1}(A)}_{\in\mathcal{B}(\mathbb{R})}\} \in \mathcal{E}$$

(B) φ funzione semplice non negativa

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{N} c_k \mathbb{1}_{E_k}(x) \qquad E_k = \{x\in\mathbb{R}: \varphi(x) = c_k\}$$

(b) φ funzione semplice non negative

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{N} c_k \mathbb{1}_{E_k}(x) \qquad E_k = \{x \in \mathbb{R} : \varphi(x) = c_k\}$$

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \mathbb{P}_X(dx) = \sum_{k=1}^{N} c_k \mathbb{P}_X(E_k) = \sum_{k=1}^{N} c_k \mathbb{P}(X \in E_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} c_k \mathbb{P}(\varphi \circ X = c_k) =$$

$$= \int_{\Omega} (\varphi \circ X)(\omega) \mathbb{P}(d\omega)$$

N.B. $\{X \in E_k\} = \{\varphi \circ X = c_k\}$

ω t.c. $X(\omega) \in E_k$

$(\varphi \circ X)(\omega) = \varphi(X(\omega)) = c_k$

$\{X \in E_k\} \subseteq \{\varphi \circ X = c_k\}$

ω t.c. $\varphi \circ X(\omega) = c_k$

$\varphi(X(\omega)) = c_k$

$\Rightarrow X(\omega) \in E_k$

$\{\varphi \circ X = c_k\} \subseteq \{X \in E_k\}$

(c) φ Borel misurabile nonnegativa

$\exists (\varphi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ successione monotone crescente di funzioni semplici non negative t.c.

$$\lim_{i \to \infty} \varphi_i(x) = \varphi(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \mathbb{P}_X(dx) \underset{\text{Beppo Levi per } \mathbb{P}_X}{=} \lim_{i \to \infty} \int_{\mathbb{R}} \varphi_i(x) \mathbb{P}_X(dx) =$$

$$= \lim_{i \to \infty} \int_{\Omega} (\varphi_i \circ X)(\omega) \mathbb{P}(d\omega) =$$

$$= \lim_{i \to \infty} \int_{\Omega} Y_i(\omega) \mathbb{P}(d\omega) \underset{\text{Beppo Levi per } \mathbb{P}}{=}$$

$$= \int_{\Omega} \lim Y_i(\omega) \mathbb{P}(d\omega) =$$

$$= \int_{\Omega} (\varphi \circ X)(\omega) \mathbb{P}(d\omega)$$

$Y_i := \varphi_i \circ X$ è una funzione semplice non negative su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$

$Y_i(\omega) = \varphi_i(X(\omega)) \leq$

$\leq \varphi_{i+1}(X(\omega)) = Y_{i+1}(\omega)$

$\lim_{i \to \infty} Y_i(\omega) = \lim_{i \to \infty} \varphi_i(X(\omega))$

$= (\varphi \circ X)(\omega)$

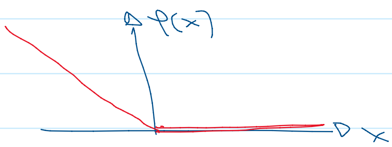
COROLLARIO Sia $X : \Omega \to \mathbb{R}$ v.a. su uno spazio probabilizzato $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ t.c. $\underline{\mathbb{E}[X] \text{ esiste}}$.

Allora $\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} x \, \mathbb{P}_X(dx)$

$\underline{\text{DIM}}$ Nel Teorema scelgo $\varphi(x) = x^+ = \max\{x, 0\}$

$$\omega \in \Omega \quad (\varphi \circ X)(\omega) = \varphi(X(\omega)) = \max\{X(\omega), 0\} = X^+(\omega)$$

- $\mathbb{E}[X^+] = \int_{\mathbb{R}} \max\{x, 0\} \mathbb{P}_X(dx)$



Scelgo $\varphi(x) = x^- = \max\{-x, 0\}$

$\omega \in \Omega \quad (\varphi \circ X)(\omega) = \varphi(X(\omega)) = \max\{-X(\omega), 0\} = X^-(\omega)$

- $\mathbb{E}[X^-] = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \mathbb{P}_X(dx) = \int_{\mathbb{R}} \max\{-x, 0\} \mathbb{P}_X(dx)$

$$\mathbb{E}[X^+] - \mathbb{E}[X^-] = \int_{\mathbb{R}} \left(\max\{x,0\} - \max\{-x,0\} \right) \mathbb{P}_X(dx) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} (x^+ - x^-) \mathbb{P}_X(dx) \underset{\Delta}{=} \int_{\mathbb{R}} x \, \mathbb{P}_X(dx)$$

$$\max\{x,0\} - \max\{-x,0\} = \begin{cases} x - 0 & x \geq 0 \\ 0 - (-x) & x < 0 \end{cases} = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

V.A. CON DISTRIBUZIONE DISCRETA

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \mathbb{P}_X(dx) = \sum_{j \in J} \varphi(t_j) p_j$$

$\{t_j\}_{j \in J}$ è l'insieme discreto su cui è concentrata la distribuzione $p_j := \mathbb{P}_X(\{t_j\})$

$\varphi(x) = \max\{x, 0\} = x^+ \qquad \int_{\mathbb{R}} x^+ \mathbb{P}_X(dx) = \sum_{j \in J} \max\{t_j, 0\} p_j \quad (1)$

$\varphi(x) = \max\{-x, 0\} = x^- \qquad \int_{\mathbb{R}} x^- \mathbb{P}_X(dx) = \sum_{j \in J} \max\{-t_j, 0\} p_j \quad (2)$

(1) $\int_{\mathbb{R}} x^+ \mathbb{P}_X(dx) = \sum_{j \in J : t_j \geq 0} t_j p_j \quad \Leftarrow$

(2) $\int_{\mathbb{R}} x^- \mathbb{P}_X(dx) = \sum_{j \in J : t_j < 0} -t_j p_j \quad \Leftarrow$

Se $\mathbb{E}[X]$ esiste $\Rightarrow$ sottraendo membro a membro ottengo

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{j \in J : t_j \geq 0} t_j p_j + \sum_{j \in J : t_j < 0} + t_j p_j = \sum_{j \in J} t_j p_j$$

V.A. CON DISTRIBUZIONE A.C. con densità $f(x)$

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} x \, \mathbb{P}_X(dx) = \int_{\mathbb{R}} x f(x) \, dx$$

FORMULA DI COMPOSIZIONE

$X : \Omega \to \mathbb{R}$ v.a. su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$

FORMULA DI COMPOSIZIONE

$X : \Omega \to \mathbb{R}$ v.a. su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$

$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Borel-misurabile

$\psi : \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ Borel-misurabile nonnegative

Allora

$$\int_{\mathbb{R}} (\psi \circ \varphi)(t)\, \mathbb{P}_X(dt) = \int_{\mathbb{R}} \psi(s)\, \mathbb{P}_{\varphi \circ X}(ds) \longleftarrow$$

DIM

$$\int_{\mathbb{R}} (\psi \circ \varphi)(t)\, \mathbb{P}_X(dt) = \int_{\Omega} (\psi \circ \varphi) \circ X(\omega)\, \mathbb{P}(d\omega) =$$

$$= \int_{\Omega} \psi\big(\varphi \circ X(\omega)\big)\, \mathbb{P}(d\omega) = \int_{\mathbb{R}} \psi(s)\, \mathbb{P}_{\varphi \circ X}(ds)$$

VARIANZA

Sia X v.a. su uno spazio probabilizzato $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ t.c. $\mathbb{E}[X]$ esiste ed è finito

Definisco VARIANZA DI X $:= \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2 \right]$

Lo indico $\mathrm{Var}[X]$

PROPRIETÀ ① $\mathrm{Var}[X] \geq 0$; $\mathrm{Var}[X] = 0$ SSE X è $\mathbb{P}$-qc costante e uguale al suo valore atteso

② $\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$

DIM $\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}\left[X^2 - 2\mathbb{E}[X]X + (\mathbb{E}[X])^2 \right]$

$$= \mathbb{E}[X^2] - 2\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[X] + (\mathbb{E}[X])^2 = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$$

$$\int_{\Omega} c\, \mathbb{P}(d\omega) = c$$

③ $\mathrm{Var}[\alpha X + \beta] = \alpha^2 \mathrm{Var}[X]$ $\qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

DIM $\mathrm{Var}[\alpha X + \beta] = \mathbb{E}\left[\left((\alpha X + \beta) - \mathbb{E}[\alpha X + \beta] \right)^2 \right] =$

$$= \mathbb{E}\left[\left(\alpha X + \cancel{\beta} - (\alpha \mathbb{E}[X] + \cancel{\beta}) \right)^2 \right] = \mathbb{E}\left[\alpha^2 (X - \mathbb{E}[X])^2 \right]$$

$$= \alpha^2 \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \alpha^2 \mathrm{Var}[X]$$