venerdì 6 novembre 2020 08:18

PROBABILITÀ SU INSIEMI FINITI

$\Omega = \{\omega_1, \_\_, \omega_n\}$ $\quad |\Omega| = n$

Ad ogni $\omega_k \in \Omega$ assegno un valore p_k con $\begin{cases} p_k \geq 0 & \forall k = 1 \_\_ n \\ \sum_{k=1}^{n} p_k = 1 \end{cases}$

Scelgo $\mathcal{E} = \mathcal{P}(\Omega)$ = insieme delle parti di Ω =

= famiglia di tutti i sottoinsiemi di Ω

$\forall k = 1 \_\_ n \quad \mathbb{P}(\{\omega_k\}) := p_k$

$\forall A \subseteq \Omega \quad \mathbb{P}(A) =$ $\quad A = \bigcup_{k:\omega_k \in A} \{\omega_k\}$ unione di eventi disgiunti 2 a 2

$= \mathbb{P}\left(\bigcup_{k:\omega_k \in A} \{\omega_k\}\right) =$

$= \sum_{k:\omega_k \in A} \mathbb{P}(\{\omega_k\}) = \sum_{k:\omega_k \in A} p_k$

DELTA DI DIRAC

Ω insieme qualsiasi non vuoto. Fisso $x_0 \in \Omega$

Per $A \subseteq \Omega$ qualsiasi pongo $\mathbb{P}(A) = \begin{cases} 1 & x_0 \in A \\ 0 & x_0 \notin A \end{cases}$

$\mathcal{E} = \mathcal{P}(\Omega)$

$\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ perché $x_0 \notin \emptyset$

$\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ $\quad A_i \cap A_j = \emptyset \quad i \neq j$

1) $\nexists i$ t.c. $x_0 \in A_i$ $\Rightarrow \mathbb{P}(A_i) = 0 \ \forall i \Rightarrow \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_i) = 0$

$\Rightarrow x_0 \notin \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \Rightarrow \mathbb{P}\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = 0$

2) $\exists! \, \bar{i}$ t.c. $x_0 \in A_{\bar{i}}$ $\Rightarrow \begin{cases} \mathbb{P}(A_{\bar{i}}) = 1 \\ \mathbb{P}(A_i) = 0 & i \neq \bar{i} \end{cases} \Rightarrow \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_i) = 1$

$\Downarrow$

$x_0 \in \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \Rightarrow \mathbb{P}\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = 1$

PROBABILITÀ UNIFORME SU UN INSIEME FINITO

$\Omega = \{\omega_1 \_\_ \omega_n\}$

$\mathcal{E} = \mathcal{P}(\Omega)$ $\quad p_k := \mathbb{P}(\{\omega_k\}) = \frac{1}{n} \quad \forall k = 1 \_\_ n$

ESEMPIO $\quad \Omega = \{1, \_\_ n\} \quad \mathcal{E} = \mathcal{P}(\Omega)$

$\forall k = 1 \_\_ n \quad p_k = \frac{1}{\ln(n+1)} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$

$p_k > 0 \quad \forall k = 1 \_\_ n$

$p_k > 0 \quad \forall k = 1 \ldots n$

$$\sum_{k=1}^{n} p_k = \frac{1}{\ln(n+1)} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{\ln(n+1)} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) =$$

$$= \frac{1}{\ln(n+1)} \sum_{k=1}^{n} \left(\ln(k+1) - \ln(k)\right) = \frac{1}{\ln(n+1)} \left(\ln(n+1) - \ln 1\right) = \frac{\ln(n+1)}{\ln(n+1)} = 1$$

ESEMPIO : PROVE DI BERNOULLI

Successo $\quad \mathbb{P}$(successo in una singola prova) $= p \quad p \in [0,1]$

Insuccesso $\quad \mathbb{P}$(insuccesso in una singola prova) $= 1-p$

$$\Omega = \{0, 1, \ldots n\}$$

$\mathbb{P}$(ottenere k successi in n prove) $\quad k \in \Omega$

$S \qquad\qquad a_1 \ldots a_n \qquad\qquad a_i \in \{S, I\}$

I

La probabilità di ottenere una determinata sequenza di successi e insuccessi

p

$1-p$

La probabilità di ottenere una determinata sequenza $a_1 \ldots a_n$

è $\quad p^{\#\text{successi nella sequenza}} \; (1-p)^{\#\text{ insuccessi nella sequenza}}$

La probabilità di ottenere una determinata sequenza $a_1 \ldots a_n$ in cui ci siano esattamente k successi è $\boxed{p^k (1-p)^{n-k}}$

$\mathbb{P}$(ottenere k successi e n-k insuccessi) $= p^k (1-p)^{n-k}$ (Numero delle sequenze aventi k successi e n-k insuccessi)

$$= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$\Omega = \{0, 1, \ldots n\} \qquad \mathcal{E} = \mathcal{P}(\Omega)$

$\forall k \in \Omega \qquad p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \geq 0 \qquad \sum_{k=0}^{n} p_k = 1$

$$\sum_{k=0}^{n} p_k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = (p + (1-p))^n = 1^n = 1$$

ESEMPIO Ho un'urna che contiene b palline bianche e r palline rosse.
Sia $n \leq \min\{b, r\}$ e estraggo n palline (senza reimbussolamento)
Fisso $k = 0, 1, \ldots n$
Qual è la probabilità di estrarre k palline bianche
$n-k$ palline rosse

$b+r$ palline $\Rightarrow$ $\binom{b+r}{n}$ diverse possibili estrazioni

$\binom{b}{k}\binom{r}{n-k}$ diverse estrazioni favorevoli

$$\mathbb{P}(\text{estrarre } k \text{ bianche ed } n-k \text{ rosse}) = \frac{\binom{b}{k}\binom{r}{n-k}}{\binom{b+r}{n}}$$

$\Omega = \{0, 1, \ldots n\}$, $\mathcal{E} = \mathcal{P}(\Omega)$

$$\forall k \in \Omega \qquad p_k = \frac{\binom{b}{k}\binom{r}{n-k}}{\binom{b+r}{n}} > 0$$

$$1 = \mathbb{P}(\text{estrarre } n \text{ palline}) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(\text{estraggo } k \text{ bianche e } n-k \text{ rosse}) =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{b}{k}\binom{r}{n-k}}{\binom{b+r}{n}}$$

PROBABILITÀ UNIFORME SU UN INTERVALLO

Fisso $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ intervallo
Per ogni $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, pongo $\mathbb{P}(E) = \frac{1}{b-a}\mathcal{L}^1(E \cap [a,b])$

$$\mathbb{P}(\mathbb{R}) = \frac{1}{b-a}\mathcal{L}^1(\underbrace{\mathbb{R} \cap [a,b]}_{[a,b]}) = \frac{b-a}{b-a} = 1$$

PROBABILITÀ CONDIZIONATA

Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato
$B \in \mathcal{E}$ t.c. $\mathbb{P}(B) > 0$. Per ogni $A \in \mathcal{E}$ pongo $\mathbb{P}(A|B) := \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$
e chiamo questa quantità
PROBABILITÀ DI A DATO B
o PROBABILITÀ DI A CONDIZIONATA DA B

PROPRIETÀ Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato. Sia $B \in \mathcal{E}$ t.c. $\mathbb{P}(B) > 0$
e sia $\tilde{\mathbb{P}}$

PROPRIETÀ Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato, sia $B \in \mathcal{E}$ t.c. $\mathbb{P}(B) > 0$

e sia

$$\tilde{\mathbb{P}} : A \in \mathcal{E} \longmapsto \mathbb{P}(A|B) \in \mathbb{R}$$

Allora $\tilde{\mathbb{P}}$ è una misura di probabilità su $(\Omega, \mathcal{E})$

Inoltre $\tilde{\mathbb{P}}(A) = 0 \quad \forall A \in \mathcal{E}$ t.c. $A \cap B = \phi$

$\tilde{\mathbb{P}}(A) = 1 \quad \forall A \in \mathcal{E}$ t.c. $A \supseteq B$

DIM Sia $(A_k)_{k \geq 1} \subseteq \mathcal{E}$ $\quad A_k \cap A_j = \phi \quad k \neq j$

$$\tilde{\mathbb{P}}\left(\bigcup_{k \geq 1} A_k\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k \geq 1} A_k \,\Big|\, B\right) = \frac{\mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{k \geq 1} A_k\right) \cap B\right)}{\mathbb{P}(B)} =$$

$$\left(\bigcup_{k \geq 1} A_k\right) \cap B = \bigcup_{k \geq 1} (A_k \cap B)$$

sono disgiunti 2 a 2

$$= \frac{\mathbb{P}\left(\bigcup_{k \geq 1} (A_k \cap B)\right)}{\mathbb{P}(B)} = (\heartsuit)$$

$A_k \cap A_j = \phi \quad k \neq j$

$A_k \cap B \subseteq A_k$

$A_j \cap B \subseteq A_j$ $\quad \Rightarrow (A_k \cap B) \cap (A_j \cap B) \subseteq A_k \cap A_j = \phi$

$$(\heartsuit) = \frac{\sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(A_k \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \sum_{k \geq 1} \frac{\mathbb{P}(A_k \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(A_k|B) = \sum_{k \geq 1} \tilde{\mathbb{P}}(A_k)$$

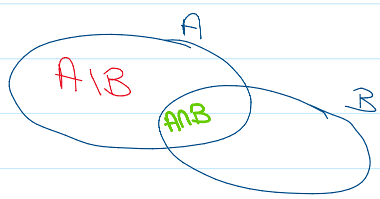
$$\tilde{\mathbb{P}}(\Omega) = \mathbb{P}(\Omega|B) = \frac{\mathbb{P}(\Omega \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = 1$$

$\Rightarrow \tilde{\mathbb{P}}$ è una misura di probabilità su $(\Omega, \mathcal{E})$

Sia $A \in \mathcal{E}$ t.c. $A \cap B = \phi$ $\quad \tilde{\mathbb{P}}(A) = \mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(\phi)}{\mathbb{P}(B)} = 0$

Sia $A \in \mathcal{E}$ t.c. $A \supseteq B$ $\quad \tilde{\mathbb{P}}(A) = \mathbb{P}(A|B) = \frac{\overbrace{\mathbb{P}(A \cap B)}^{= B}}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = 1$

$A \in \mathcal{E}$ $\quad A = (A \cap B) + (A \setminus B)$



$$\rightarrow \mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A \cap B|B) + \underbrace{\mathbb{P}(A \setminus B|B)}_{= 0}$$

FORMULA DELLA PROBABILITÀ COMPOSTA

Se $A, B \in \mathcal{E}$ e $\mathbb{P}(B) > 0$ $\Rightarrow$ $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)$

N.B. Se $\mathbb{P}(B) = 0$ $\Rightarrow$ $\mathbb{P}(A|B)$ non è definito

$\mathbb{P}(A \cap B) = 0$

N.B. Se $\mathbb{P}(B)=0 \Rightarrow \mathbb{P}(A|B)$ non è definito

$\mathbb{P}(A\cap B)=0$

$\Rightarrow$ Se $\mathbb{P}(B)=0$, interpreto $\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)$ come se fosse uno zero

LEGGE DELLE PROBABILITÀ TOTALI

Sia $(\Omega,\mathcal{E},\mathbb{P})$ spazio probabilizzato

Sia $\{D_i\}_{i\in\mathcal{J}}$ partizione misurabile (finita o numerabile) di Ω

$$\forall A\in\mathcal{E} \qquad \mathbb{P}(A)=\sum_{i\in\mathcal{J}}\mathbb{P}(A\cap D_i)=\sum_{i\in\mathcal{J}}\mathbb{P}(A|D_i)\mathbb{P}(D_i)$$

FORMULA DI BAYES

Sia $(\Omega,\mathcal{E},\mathbb{P})$ spazio probabilizzato.

Siano $A,B\in\mathcal{E}$ t.c. $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)>0$

Allora

$$\mathbb{P}(A|B)=\frac{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$$

DIM $\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)=\mathbb{P}(A\cap B)=\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)$ $\qquad A\cap B=B\cap A$

Divido per $\mathbb{P}(B)$ e ottengo $\mathbb{P}(A|B)=\dfrac{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$

Sia $\mathbb{P}(B)>0$ e sia $A\in\mathcal{E}$ $\qquad \mathbb{P}(A|B)=\mathbb{P}(A)$

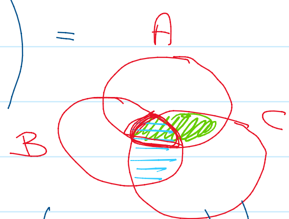
vuol dire $\dfrac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}=\mathbb{P}(A)$ cioè $\mathbb{P}(A\cap B)=\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$

DEF Sia $(\Omega,\mathcal{E},\mathbb{P})$ spazio probabilizzato e siano $A,B\in\mathcal{E}$.
Dico che A e B sono eventi indipendenti se $\mathbb{P}(A\cap B)=\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$

$A,B\in\mathcal{E} \qquad \mathbb{P}(A\cup B)=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cap B)$

$$A,B,C\in\mathcal{E} \qquad \mathbb{P}(A\cup B\cup C)=\mathbb{P}\big((A\cup B)\cup C\big)=\mathbb{P}(A\cup B)+\mathbb{P}(C)-\mathbb{P}\big((A\cup B)\cap C\big)$$

$$=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cap B)+\mathbb{P}(C)-\Big(\mathbb{P}\big((A\cap C)\cup(B\cap C)\big)\Big)=$$



$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$ $\qquad (A\cap C)\cap(B\cap C)=A\cap B\cap C$

$$=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cap B)+\mathbb{P}(C)-\Big(\mathbb{P}(A\cap C)+\mathbb{P}(B\cap C)-\mathbb{P}(A\cap B\cap C)\Big)$$

$$=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)+\mathbb{P}(C)-\mathbb{P}(A\cap B)-\mathbb{P}(A\cap C)-\mathbb{P}(B\cap C)+\mathbb{P}(A\cap B\cap C)$$

$= \mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)+\mathbb{P}(C)-\mathbb{P}(A\cap B)-\mathbb{P}(A\cap C)-\mathbb{P}(B\cap C)+\mathbb{P}(A\cap B\cap C)$

$A_1, A_2, A_3 \quad A_4$

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{4} A_i\right) = \mathbb{P}(A_1)+\mathbb{P}(A_2)+\mathbb{P}(A_3)+\mathbb{P}(A_4)-\mathbb{P}(A_1\cap A_2)-\mathbb{P}(A_1\cap A_3)-\mathbb{P}(A_1\cap A_4)$$
$$-\mathbb{P}(A_2\cap A_3)-\mathbb{P}(A_2\cap A_4)-\mathbb{P}(A_3\cap A_4)+$$
$$+\mathbb{P}(A_1\cap A_2\cap A_3)+\mathbb{P}(A_1\cap A_2\cap A_4)+\mathbb{P}(A_1\cap A_3\cap A_4)+\mathbb{P}(A_2\cap A_3\cap A_4)$$
$$-\mathbb{P}(A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4)$$

—o—

ESERCIZIO Lancio 2 dadi equilibrati

Se il punteggio minimo ottenuto nei due dadi è $\leq 2 \Rightarrow$ lancio 2 monete non truccate

Altrimenti lancio 4 monete non truccate

Calcolare la probabilità di ottenere esattamente 2 teste nel lancio di monete

D_1 = lancio 2 monete

D_2 = lancio 4 monete

$\{D_1, D_2\}$ è una partizione misurabile dell'evento certo

$T_2 :=$ ottengo esattamente 2 teste

$$\mathbb{P}(T_2) = \mathbb{P}(T_2|D_1)\mathbb{P}(D_1) + \mathbb{P}(T_2|D_2)\mathbb{P}(D_2)$$

$$\mathbb{P}(T_2|D_1) = \binom{2}{2}p^2(1-p)^{2-2}$$

$p=\frac{1}{2}$ perché le monete non sono truccate

$$= 1\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{4}$$

$$\mathbb{P}(T_2|D_2) = \binom{4}{2}p^2(1-p)^{4-2} = \frac{\cancel{4}\cdot 3\cdot 2}{\cancel{2}\cdot\cancel{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{6}{2^4} = \frac{3}{2^3} = \frac{3}{8}$$

$\mathbb{P}(D_1)$ $\qquad$ $\mathbb{P}(D_2) = 1-\mathbb{P}(D_1)$

D_1 = lancio 2 monete = ottengo punteggio minimo ≤ 2

D_2 = lancio 4 monete = ottengo punteggio minimo ≥ 3 ⟵

P_1 = punteggio del 1° dado $\qquad$ P_2 = punteggio 2° dado

$P_1 =$ punteggio del 1° dado $\qquad P_2 =$ punteggio 2° dado

$D_2 = \underbrace{\{P_1 \geq 3\}} \cap \underbrace{\{P_2 \geq 3\}}$ sono eventi indipendenti perché i due dadi non si influenzano

$\Rightarrow \mathbb{P}(\{P_1 \geq 3\} \cap \{P_2 \geq 3\}) = \mathbb{P}(\{P_1 \geq 3\})\,\mathbb{P}(\{P_2 \geq 3\}) = \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} = \left(\frac{2}{3}\right)^2$

$\mathbb{P}(D_2) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow \mathbb{P}(D_1) = 1 - \mathbb{P}(D_2) = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$

$\mathbb{P}(T_2) = \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{9} + \frac{3}{\cancel{8}_4} \cdot \frac{\cancel{4}^2}{9} = \frac{5+6}{36} = \frac{11}{36}$

ESERCIZIO Si hanno 2 urne

Urna 1: 4 palline bianche e 4 palline rosse

Urna 2: 6 palline bianche e 2 palline rosse

Probabilità di selezionare l'Urna 1 è $1/3$

Probabilità di selezionare l'Urna 2 è $1 - 1/3 = \frac{2}{3}$

Dall'urna selezionata si estraggono 3 palline

1. Calcolare la probabilità di avere estratto 1 pallina rossa e 2 palline bianche
2. Sapendo che sono state estratte 1 pallina rossa e 2 palline bianche, calcolare la probabilità di aver selezionato la prima urna.

$U_1 :=$ "seleziono la prima urna" $\qquad \{U_1, U_2\}$ è una partizione

$U_2 :=$ "seleziono la seconda urna" $\qquad$ misurabile dell'evento certo

$\rightarrow A :=$ "estraggo 1 pallina rossa e 2 palline bianche"

$\mathbb{P}(A) = \underline{\mathbb{P}(A|U_1)}\,\mathbb{P}(U_1) + \underline{\mathbb{P}(A|U_2)}\,\mathbb{P}(U_2) \qquad \mathbb{P}(U_1) = \frac{1}{3}$

$\mathbb{P}(U_2) = \frac{2}{3}$

Urna 1: 4 bianche e 4 rosse

$$\mathbb{P}(A|U_1) = \frac{\binom{4}{2}\binom{4}{1}}{\binom{8}{3}} = \frac{\cancel{4}\cdot 3 \cdot \cancel{2}}{\cancel{2 \cdot 2}} \cancel{4}\, \frac{\cancel{3!}^{3/2}\,\cancel{(8-3)!}}{\cancel{8 \cdot 7 \cdot 6}\,\cancel{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}} = \frac{3}{7}$$

Urna 2: 6 bianche e 2 rosse

$$\mathbb{P}(A|U_2) = \frac{\binom{6}{2}\binom{2}{1}}{} = \frac{\cancel{6}\cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{} \cancel{2}\, \frac{3\cancel{2}\,\cancel{(8-3)!}}{} = \frac{15}{}$$

$$\mathbb{P}(A|U_2) = \frac{\binom{6}{2}\binom{2}{1}}{\binom{8}{3}} = \frac{\cancel{6}\cdot 5\cdot \cancel{4!}}{\cancel{2}\,\cancel{(6-2)!}}\cancel{2}\;\frac{3\cdot\cancel{2}\,\cancel{(8-3)!}}{{}_4\cancel{8}\cdot 7\cdot \cancel{6}\cdot \cancel{5!}} = \frac{15}{28}$$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\cancel{3}}{7}\cdot\frac{1}{\cancel{3}} + \frac{\overset{5}{\cancel{15}}}{\underset{14}{\cancel{28}}}\cdot\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}} = \frac{1}{7} + \frac{5}{14} = \frac{2+5}{14} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}$$

(2) $$\mathbb{P}(U_1|A) = \text{BAYES} = \frac{\mathbb{P}(A|U_1)\mathbb{P}(U_1)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\frac{3}{7}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{\cancel{3}}{7}\cdot\frac{1}{\cancel{3}}\cdot 2 = \frac{2}{7}$$

ESERCIZIO Giovanni possiede 6 monete:
- 3 sono eque
- su 1 esce sempre Testa
- su 2 esce sempre croce.

Giovanni sceglie una moneta A CASO e la lancia 3 volte.

(1) Calcolare la probabilità di ottenere 3 Teste

(2) Sapendo di aver ottenuto 3 Teste, calcolare la probabilità di aver selezionato la moneta su cui esce sempre Testa.

E = Giovanni seleziona moneta equa $\quad \mathbb{P}(E) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

T = Giovanni seleziona la moneta su cui esce sempre Testa $\quad \mathbb{P}(T) = \frac{1}{6}$

C = Giovanni seleziona la moneta su cui esce sempre croce $\quad \mathbb{P}(C) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$\{E, T, C\}$ è una partizione misurabile dell'evento certo

$A :=$ Giovanni ottiene 3 Teste

$$\mathbb{P}(A) = \underbrace{\mathbb{P}(A|E)}_{p=\frac{1}{2}}\mathbb{P}(E) + \underbrace{\mathbb{P}(A|T)}_{p=1}\mathbb{P}(T) + \underbrace{\mathbb{P}(A|C)}_{p=0}\mathbb{P}(C) =$$

$$\mathbb{P}(A|E) = \binom{3}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(1-\frac{1}{2}\right)^{3-3} = \frac{1}{8}$$

$$\mathbb{P}(A|T) = \binom{3}{3} 1^3 (1-1)^{3-3} = 1$$

$$\mathbb{P}(A|C) = \binom{3}{3} 0^3 (1-0)^{3-3} = 0$$

$$= \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2} + 1\cdot\frac{1}{6} + 0\cdot\frac{1}{3} =$$

$$= \frac{1}{16} + \frac{1}{6} = \frac{3+8}{48} = \frac{11}{48}$$

$$\mathbb{P}(T|A) = \frac{\mathbb{P}(A|T)\mathbb{P}(T)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{1\cdot 1/6}{\frac{11}{48}} = \frac{1}{\cancel{6}}\cdot\frac{\overset{8}{\cancel{48}}}{11} = \frac{8}{11}$$

VARIABILE ALEATORIA

VARIABILE ALEATORIA

Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato e sia $X : \omega \in \Omega \longmapsto X(\omega) \in \overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$

Dico che X è una VARIABILE ALEATORIA su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ se $\forall t \in \mathbb{R}$

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq t\} \in \mathcal{E} \qquad (\Omega, \mathcal{E}, \cancel{\mathbb{P}})$$

$$(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n, \cancel{\mathcal{L}^n})$$

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq t\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in [-\infty, t]\}$$

$$= X^{-1}([-\infty, t]) = \{X \leq t\}$$

PROP Se $X : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ è una funzione, allora sono equivalenti

1. X è una V.A.
2. $\forall t \in \mathbb{R}$ $\quad \cancel{\{\omega \in \Omega : X(\omega) > t\}}$ $\{X > t\} \in \mathcal{E}$
3. $\forall t \in \mathbb{R}$ $\quad \{\omega \in \Omega : X(\omega) \geq t\}$ $\{X \geq t\} \in \mathcal{E}$
4. $\forall t \in \mathbb{R}$ $\quad \{\omega \in \Omega : X(\omega) < t\}$ $\{X < t\} \in \mathcal{E}$
5. $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ $\quad X^{-1}(A) \in \mathcal{E}$

DIM. Sono le condizioni già viste per le funzioni misurabili

$\forall t \in \mathbb{R}$ so che $\{X \leq t\} \in \mathcal{E} \Rightarrow$ posso calcolare $\mathbb{P}(\{X \leq t\}) = \mathbb{P}(X \leq t)$

$\mathbb{P}(X \leq t)$ è un modo breve di scrivere $\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq t\})$

$\Rightarrow$ È ben definita la funzione $F_X : t \in \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{P}(X \leq t) \in [0,1]$

La funzione F_X si dice LEGGE DI X

FUNZIONE DI RIPARTIZIONE DI X

FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE CUMULATIVA DI X

PROPRIETÀ DI UNA LEGGE DI V.A.

Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato. Sia $X : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ una v.a. su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ e sia $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ la sua legge. Allora

(1) F_X è monotona non decrescente : $s, t \in \mathbb{R}$ $s \leq t \Rightarrow F_X(s) \leq F_X(t)$

(2) $\lim F_X(t) = \mathbb{P}(X = -\infty)$

(1) F_X è monotona non decrescente : $s,t \in \mathbb{R}$ $s \leq t \Rightarrow F_X(s) \leq F_X(t)$

(2) $\lim\limits_{t \to -\infty} F_X(t) = \mathbb{P}(X = -\infty)$

(3) $\lim\limits_{t \to +\infty} F_X(t) = 1 - \mathbb{P}(X = +\infty)$

(4) F_X è continua da destra cioè $\forall t \in \mathbb{R}$ $\lim\limits_{s \to t^+} F_X(s) = F_X(t)$ ←

(5) $\lim\limits_{s \to t^-} F_X(s) = F_X(t) \underline{- \mathbb{P}(X = t)}$

N.B. F_X è discontinua in un pto $t \in \mathbb{R}$ SSE $\mathbb{P}(X = t) > 0$

F_X monotona $\Rightarrow$ F_X ha al più una quantità numerabile di pti di discontinuità

no dim

$\Rightarrow$ Esiste al più un insieme numerabile di pti $t \in \mathbb{R}$ t.c. $\mathbb{P}(X = t) > 0$.