lunedì 2 novembre 2020 11:04

VENERDÌ 20/11 ORE 15:00
SOLO IN REMOTO
e-l.unifi.it AN2ProQuiz

COEFFICIENTI BINOMIALI

Dato k e n interi non negativi, definisco

$$\binom{n}{k} := \begin{cases} 0 & k > n \\ \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!} & 0 \le k \le n \end{cases}$$

Per induzione

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

N.B. $x = y = 1$ $\quad 2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ $\qquad x=-1 \quad y=1 \quad n \geq 1$

$$0 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$$

N.B. Se $0 \le k \le n \Rightarrow \binom{n}{n-k} = \dfrac{n!}{(n-k)!\,(\cancel{n}-(\cancel{n}-k))!} =$

$$= \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \binom{n}{k}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} =$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)\overbrace{\cancel{(n-k)(n-k-1)\cdots 2\cdot 1}}^{=(n-k)!}}{k!\,\cancel{(n-k)!}} =$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

COEFFICIENTI BINOMIALI GENERALIZZATI

$\alpha \in \mathbb{R}$ $\quad$ k intero non negativo

$$\binom{\alpha}{k} = \begin{cases} \dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} & k > 0 \\ 1 & k = 0 \end{cases}$$

Sia A insieme finito di cardinalità n
Sia $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Quanti sottoinsiemi di A aventi cardinalità k ci sono?

$k = 0 \quad \emptyset \qquad\qquad k = n \quad A$

Indico con $d_{n,k}$ il numero dei sottoinsiemi di A aventi cardinalità k

$d_{n,0} = d_{n,n} = 1$

A = insieme dei giocatori di uno sport di squadra
Quante squadre di K giocatori con 1 capitano posso fare?

1) Scelgo il capitano e poi $K-1$ giocatori tra gli $n-1$ rimasti

$n \cdot d_{n-1,k-1}$

2) Scelgo i K giocatori e tra questi K il capitano

$d_{n,K} \cdot K$

$n \cdot d_{n-1,k-1} = K \cdot d_{n,k}$ $\quad\quad d_{n,k} = \frac{n}{K} d_{n-1,k-1}$

$d_{n,0} = 1 \quad \forall n$

$d_{n,1} = \frac{n}{1} d_{n-1,0} = \frac{n}{1} \cdot 1 = n$

$d_{n,2} = \frac{n}{2} d_{n-1,1} = \frac{n}{2}(n-1) \leftarrow$

$d_{n,3} = \frac{n}{3} d_{n-1,2} = \frac{n}{3} \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ $\Rightarrow$ Per induzione si dimostra

che $d_{n,k} = \binom{n}{k}$ $\quad \forall k \in \{0, 1, \dots n\}$

Tutti gli insiemi sono $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

Sia A un insieme finito, $\#A = |A|$ n
Un'applicazione
$\pi : A \to A$ invertibile si dice una PERMUTAZIONE su A

$A = \{1 \dots n\}$ $\quad \{x_1, x_2 \dots x_n\}$ $\quad \pi(x_1)$
$\pi(x_2)$
$\vdots$
$\pi(x_n)$

$\pi(1)$ n possibilità
$\pi(2)$ $n-1$ possibilità
$\pi(3)$ $n-2$ possibilità $\Rightarrow n(n-1)(n-2) \dots 1$ diverse permutazioni
$\vdots$
cioè $n!$ diverse permutazioni
$\pi(n)$ 1 possibilità

MULTINSIEMI

$A = \{a, b, c\}$ $\quad\quad a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5$
$b_1\ b_2$
$c_1\ c_2\ c_3$ $\quad\quad a^5 b^2 c^3$

Dato A insieme finito, $|A|=n$, un multinsieme su A è la coppia
(A,α) dove $\alpha: A \to \mathbb{N}\cup\{+\infty\}$ che conta la molteplicità di ciascun elemento di A nel multinsieme (A,α)
Chiamo CARDINALITÀ DEL MULTIINSIEME $\sum_{x\in A} \alpha(x)$

Se $k\in\mathbb{N}$, quanti multinsiemi distinti di cardinalità k riesco a costruire?
Sia $A=\{x_1 \_\_ x_n\}$

$$\underbrace{0 \dots 0}_{\alpha(x_1)\text{ volte}} 1 \underbrace{0 \dots 0}_{\alpha(x_2)\text{ volte}} 1 \dots\dots 1 \underbrace{0 \dots 0}_{\alpha(x_n)\text{ volte}}$$

La stringa è lunga $n-1+k$

$\Rightarrow$ ci sono $\binom{n-1+k}{n-1}$ diverse stringhe e quindi $\binom{n-1+k}{n-1}$ diversi multiinsiemi di cardinalità k $= \binom{n-1+k}{k}$

LISTA O PAROLA
Sia A insieme finito, $|A|=n$
Chiamo k-lista o k-parola su A una k-upla ordinata di elementi di A

$(1,2) \neq (2,1)$ $\{1,2\}=\{2,1\}$

Se $|A|=n$ k-lista $x_1 x_2 \dots x_k$ $x_i \in A$

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & \dots & x_k \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ n & n & \dots & n \end{array} \Rightarrow n^k \text{ diverse } k\text{-parole}$$

$A=|n|$ $0\le k\le n$ $f:\{1, \_\_ k\}\to A$

Quante sono le diverse funzioni iniettive da $\{1 \_\_ k\}$ in A

$f(1)$ n diverse scelte
$f(2)$ $n-1$ diverse scelte
$f(3)$ $n-2$ diverse scelte
$\vdots$
$f(k)$ $\underbrace{n-(k-1)}_{=n-k+1}$ diverse scelte

$= n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) =$
$= \dfrac{n!}{(n-k)!}$

FUNZIONE MONOTONE NON DECRESCENTI

$f:\{1 \_\_ k\}\to\{1 \_\_ n\}$

$1 \ 2 \ 3 \ 4 \dots k$

Sia x_1 = numero di $i \in \{1 \ldots k\}$ t.c. $f(i) = 1$

$$\underbrace{1 \ldots 1}_{x_1} \; \underbrace{2 \ldots 2}_{x_2}$$

x_2 = numero di $i \in \{1 \ldots k\}$ t.c. $f(i) = 2$

$\forall j = 1 \ldots n \quad x_j :=$ numero di $i \in \{1 \ldots k\}$ t.c. $f(i) = j$

$$\underbrace{1 \ldots 1}_{x_1} \; \underbrace{2 \ldots 2}_{x_2} \; \ldots \ldots \; \underbrace{n \ldots n}_{x_n \text{ volte}}$$

Ho costruito un multiinsieme su $\{1, \ldots n\}$ con cardinalità k

$\Rightarrow \binom{n+k-1}{k}$ diverse funzioni monotone non decrescenti

---

FUNZIONI STRETTAMENTE CRESCENTI

$f : \{1 \ldots k\} \to \{1 \ldots n\}$

f monotone $\Rightarrow$ f iniettiva $\Rightarrow$ $n \geq k$

$\{f(1), f(2), \ldots, f(n)\}$ Se conosco $Im(f)$ conosco perfettamente la funzione.

$\Rightarrow$ Ogni immagine corrisponde ad un sottoinsieme di avente cardinalità k $\Rightarrow$ ci sono $\binom{n}{k}$ diverse funzioni strettamente monotone crescenti

---

FUNZIONI SURIETTIVE

$f : \{1 \ldots k\} \to \{1 \ldots n\}$ suriettiva $\Rightarrow k \geq n$

Si dimostra che ci sono $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} (n-j)^k$

diverse funzioni suriettive

---

5 rosse 3 nere

ESTRAZIONI ORDINATE SENZA RIMBUSSOLAMENTO (REIMMISSIONE)

Sia A insieme finito, $|A| = n$
Estraggo k oggetti

$f(1)$
$f(2)$

f iniettiva perché non reinserisco l'oggetto estratto

$f(1)$ … iniettiva perché non reinserisco l'oggetto estratto

$f(2)$

$\vdots$

$f(k)$

$f : \{1 \ldots k\} \to \{1 \ldots n\}$ iniettive

$$\frac{n!}{(n-k)!}$$ diverse estrazioni ordinate senza reimmissione.

ESTRAZIONI ORDINATE CON RIMBUSSOLAMENTO

$f(1)$
$f(2)$
$\vdots$
$f(k)$

$f : \{1 \ldots k\} \to \{1 \ldots n\}$ funzione qualsiasi

Ci sono n^k diverse possibili estrazioni ordinate con rimbussolamento

---

TT TC CT CC

Urna 10 palline rosse 6 palline nere

Estraggo 3 palline (senza reimbussolamento)
Calcolare la probabilità che escano 2 rosse e 1 nera

CASI POSSIBILI sono $\binom{16}{3}$

CASI FAVOREVOLI $\binom{10}{2}\binom{6}{1}$

$$\frac{\binom{10}{2}\binom{6}{1}}{\binom{16}{3}}$$

IMPOSTAZIONE FREQUENTISTA

$$\lim_{n \to \infty} \frac{S_n}{n}$$

n = numero di ripetizione dell'esperimento

S_n = numero di successi nelle n prove

IMPOSTAZIONE SOGGETTIVA

$p \in [0,1]$ = grado di fiducia che ho nel fatto che l'evento favorevole si verifichi

---

IMPOSTAZIONE ASSIOMATICA

(Kolmogorov)

Identifico l'insieme dei casi possibili con un insieme Ω che chiamo EVENTO CERTO.
I vari eventi che voglio considerare devono essere identificati con sottoinsiemi di Ω.

Lancio 2 monete $\qquad \Omega = \{TT, TC, CT, CC\}$

"Escono due Teste" $\qquad A = \{TT\}$

σ-ALGEBRA DI Ω

Sia Ω un insieme non vuoto e sia $\mathcal{E}$ una famiglia di sottoinsiemi di Ω.
Dico che $\mathcal{E}$ è una σ-algebra di Ω se

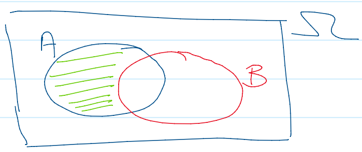
1) $\emptyset, \Omega \in \mathcal{E}$
2) $\forall (A_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{E} \quad \left(A_n \in \mathcal{E} \quad \forall n \geq 1 \right) \Rightarrow \bigcup_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{E}$
3) $A \in \mathcal{E} \Rightarrow A^c := \Omega \setminus A \in \mathcal{E}$

N.B. La famiglia dei sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ che sono misurabili secondo Lebesgue è una σ-algebra di $\mathbb{R}^n$

N.B. $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{E} \qquad A_n = \emptyset \quad \forall n \geq k+1$

$(A_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{E} \qquad \mathcal{E} \ni \bigcup_{n\geq 1} A_n = A_1 \cup A_2 \dots \cup A_k$

$A, B \in \mathcal{E} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{E}$



$$A \setminus B = A \underset{\mathcal{E}}{\cap} \underbrace{(\Omega \setminus B)}_{\in \mathcal{E}} \in \mathcal{E}$$

σ-ALGEBRA GENERATA DA UNA FAMIGLIA DI SOTTOINSIEMI

$\mathcal{D}$ famiglia di sottoinsiemi di Ω

Chiamo σ-ALGEBRA GENERATA DA $\mathcal{D}$

$\sigma(\mathcal{D}) :=$ la più piccola σ-algebra di Ω che contiene tutti i sottoinsiemi della famiglia

$$= \bigcap \{ \mathcal{E} : \mathcal{E} \text{ σ-algebra di } \Omega \text{ e } \mathcal{E} \supseteq \mathcal{D} \}$$

σ-ALGEBRA DI BOREL $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$

è la σ-algebra generata dalla famiglia degli aperti di $\mathbb{R}^n$

Abbiamo visto che $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{L}^n$

$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ è la σ-algebra generata dagli n-intervalli

MISURA

Sia Ω insieme non vuoto e sia $\mathcal{E}$ una σ-algebra di Ω
Una funzione $\quad \mathbb{P} : \mathcal{E} \to [0,+\infty]$

si dice una MISURA su $\mathcal{E}$ (o su $(\Omega,\mathcal{E})$) se

$\forall (A_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{E}$ t.c. $A_n \cap A_k = \phi$ se $n \neq k$ si ha $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right) = \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(A_n)$

Dico che $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ è uno SPAZIO DI MISURA

Se, inoltre, $\mathbb{P}(\Omega) = 1$, allora dico che $\mathbb{P}$ è una (MISURA DI) PROBABILITÀ su $(\Omega,\mathcal{E})$ e la terna $(\Omega,\mathcal{E},\mathbb{P})$ si dice uno SPAZIO PROBABILIZZATO

DEF Sia $(\Omega,\mathcal{E},\mathbb{P})$ uno spazio probabilizzato
Ω si dice EVENTO CERTO
Se $\Omega_0 \in \mathcal{E}$ e $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$, dico che Ω_0 è un evento quasi certo

PROPRIETÀ ELEMENTARI

1) $\mathbb{P}(\phi) = 0 \qquad A_1 = \Omega \quad A_n = \phi \quad \forall n \geq 2 \quad (A_n)_{n\geq 1}$

$$\bigcup_{n\geq 1} A_n = \Omega \Rightarrow 1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right) = \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(A_n) =$$

$$= \mathbb{P}(\underset{\Omega}{A_1}) + \sum_{n\geq 2} \mathbb{P}(\underset{\phi}{A_n}) = 1 + \sum_{n\geq 2} \mathbb{P}(\phi)$$

$$\sum_{n\geq 2} \mathbb{P}(\phi) = 0$$

1) $\mathbb{P}(\phi) > 0 \qquad \sum_{n\geq 2} \mathbb{P}(\phi) = +\infty$

2) $\mathbb{P}(\phi) = 0 \qquad \sum_{n\geq 2} \mathbb{P}(\phi) = 0$

DEFINIZIONE L'insieme vuoto si dice EVENTO IMPOSSIBILE
Se $N \in \mathcal{E}$ t.c. $\mathbb{P}(N) = 0$, N si dice EVENTO QUASI IMPOSSIBILE

PROPRIETÀ ① $\forall A \in \mathcal{E} \Rightarrow \mathbb{P}(A) \in [0,1]$

$A_1 = A \quad A_2 = \Omega \setminus A \quad A_n = \phi \quad n \geq 3 \quad (A_n)_{n\geq 1}$

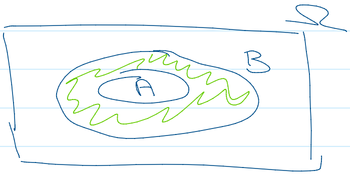
$$\mathbb{P}\left(\bigcup A_n\right) = \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\Omega \setminus A) + \sum_{n\geq 3} \mathbb{P}(\phi) =$$

$$= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\Omega \setminus A)$$

$\Rightarrow \mathbb{P}(A \cup (\Omega \setminus A))$
$\quad \parallel$
$\mathbb{P}(\Omega) = 1$

$$\mathbb{P}(A) + \underbrace{\mathbb{P}(\Omega \setminus A)}_{\geq 0} = 1 \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq 1$$

② $A, B \in \mathcal{E}$ $\quad A \subseteq B \qquad \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A)$



$B = A \cup (B \setminus A)$

$A_1 = A \qquad A_2 = B \setminus A \qquad A_n = \emptyset \quad \forall n \geq 3$

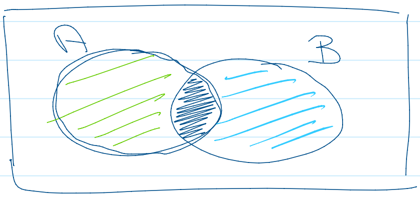
$(A_n)_{n \geq 1}$

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{n \geq 1} A_n\Big) = \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A) + \overbrace{\sum_{n \geq 3} \mathbb{P}(\emptyset)}^{=0}$$

$$\mathbb{P}(A \cup (B \setminus A)) = \mathbb{P}(B) \implies \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \underbrace{\mathbb{P}(B \setminus A)}_{\geq 0}$$

N.B. $\quad A \subseteq B \implies \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$

③ $A, B \in \mathcal{E} \implies \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$



$A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)$

$A_1 = A \setminus B \qquad A_2 = B \setminus A \qquad A_3 = A \cap B$

$A_n = \emptyset \quad n \geq 4$

$\implies \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A \setminus B) + \mathbb{P}(B \setminus A) + \mathbb{P}(A \cap B)$

$A \setminus B = A \setminus (A \cap B) \qquad B \setminus A = B \setminus (A \cap B)$

$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \setminus B) + \mathbb{P}(A \cap B) \qquad \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \setminus A) + \mathbb{P}(A \cap B)$

$\rightarrow \mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) \qquad \mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \leftarrow$

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) - \cancel{\mathbb{P}(A \cap B)} + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) + \cancel{\mathbb{P}(A \cap B)} \qquad \leq$$

In particolare $\quad \mathbb{P}(A \cup B) \leq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$

④ Se $(A_n)_{n \geq 1} \subseteq \mathcal{E} \implies \mathbb{P}\Big(\bigcup_{n \geq 1} A_n\Big) \leq \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(A_n)$

PARTIZIONI MISURABILI DI Ω

Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato e sia $(D_i)_{i \in I}$ famiglia finita ($I = \{1 \dots N\}$) o numerabile ($I = \mathbb{N}$)
Dico che la famiglia $(D_i)_{i \in \mathbb{N}}$ è una partizione misurabile di Ω se

1) $\bigcup_{i \in I} D_i = \Omega$

2) $D_i \cap D_j = \emptyset \quad \forall i, j \in I$ t.c. $i \neq j$

3) $D_i \in \mathcal{E} \quad \forall i \in I$

LEGGE DELLE PROBABILITÀ TOTALI

LEGGE DELLE PROBABILITÀ TOTALI

Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ uno spazio probabilizzato e sia $(D_i)_{i \in J}$ una partizione numerabile.

Allora $\forall A \in \mathcal{E}$ $\quad \mathbb{P}(A) = \sum_{i \in J} \mathbb{P}(A \cap D_i)$

DIM

$A_i := A \cap D_i \quad \forall i \in J$

Se $i \neq j$ $\quad A_i \subset D_i, \; A_j \subset D_j \implies A_i \cap A_j \subseteq D_i \cap D_j = \emptyset$

$$\bigcup_{i \in J} A_i = \bigcup_{i \in J} (A \cap D_i) = A \cap \left(\bigcup_{i \in J} D_i \right) = A \cap \Omega = A$$

verificare l'uguaglianza

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i \in J} A_i \right) = \sum_{i \in J} \mathbb{P}(A_i) = \sum_{i \in J} \mathbb{P}(A \cap D_i)$$

CONTINUITÀ DELLA MISURA

Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato. Sia $(A_n)_{n \geq 1}$ una famiglia numerabile contenuta in $\mathcal{E}$.

1) Se $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad A_n \subseteq A_{n+1}$, allora $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n \right) = \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(A_n) = \sup_{n \in \mathbb{N}} (A_n)$

2) Se $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad A_n \supseteq A_{n+1}$, allora

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n \geq 1} A_n \right) = \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(A_n) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$$