$E \subset \mathbb{R}^n$ insieme misurabile

$f : E \to \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$ si dice MISURABILE

se

$\forall t \in \mathbb{R} \quad \{\underline{x} \in E : f(\underline{x}) \le t\} \in \mathcal{L}^n$

DEF FUNZIONI SEMPLICI

$\varphi : E \to \mathbb{R}$ si dice una funzione semplice se

1. è misurabile
2. assume solo un numero finito di valori

Rappresentazione canonica

$a_1, a_2, \dots a_N$ = insiemi dei valori assunti da φ

$E_i = \{\underline{x} \in E : \varphi(\underline{x}) = a_i\} \qquad \forall i = 1 \dots N$

Poiché φ è misurabile ciascun E_i è misurabile

$E_i = \varphi^{-1}(\{a_i\}) \qquad \{a_i\}$ è un chiuso $\Rightarrow E_i \in \mathcal{L}^n$

$E_i = \{\underline{x} \in E : \varphi(\underline{x}) \le a_i\} \setminus \{\underline{x} \in E : \varphi(\underline{x}) < a_i\}$

$E_i \cap E_j = \emptyset$ se $i \ne j$

$\bigcup_{i=1}^{N} E_i = E \qquad \{E_1 \dots E_N\}$ partizione finita e misurabile di E

$\varphi(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{N} a_i \mathbb{1}_{E_i}(\underline{x})$ RAPPRESENTAZIONE CANONICA DELLA FUNZIONE SEMPLICE φ

Ω insieme $\quad A \subseteq \Omega$

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \in \Omega \setminus A \end{cases}$$

funzione caratteristica di A

LEMMA DI CAMPIONAMENTO

Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ insieme misurabile e sia $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ non negativa $[0, +\infty]$

Allora f è misurabile SSE

$\exists (\varphi_k)_{k \ge 1}$ successione di funzioni semplici

- $0 \le \varphi_k(\underline{x}) \le \varphi_{k+1}(\underline{x}) \qquad \forall k \ge 1 \text{ e } \forall \underline{x} \in E$
- $\lim_{k \to \infty} \varphi_k(\underline{x}) = f(\underline{x}) \qquad \forall \underline{x} \in E$

DIM (cenni) $\exists \varphi_k$ con le caratteristiche richieste $\Rightarrow$ f misurabile (già visto)

f misurabile $\Rightarrow$ $\exists \varphi_k$ con le caratteristiche richieste

Per ogni $k \ge 1$ $\qquad h = 0, 1, \ldots, 4^k - 1$

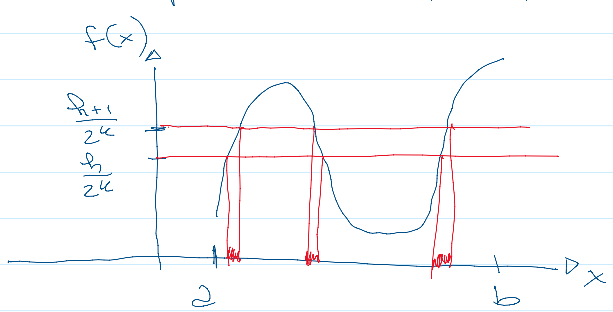
$$E_k = \{ \underline{x} \in E : f(\underline{x}) \ge 2^k \}$$

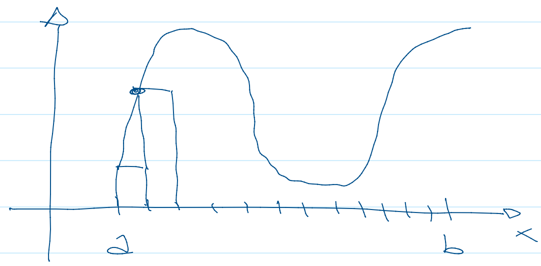
$$E_{k,h} = \left\{ \underline{x} \in E \quad \frac{h}{2^k} \le f(\underline{x}) < \frac{h+1}{2^k} \right\}$$

Sono tutti insiemi misurabili

Basta porre
$$\varphi_k(\underline{x}) = \begin{cases} 2^k & \underline{x} \in E_k \\ \dfrac{h}{2^k} & \underline{x} \in E_{k,h} \end{cases}$$

Si può verificare che $(\varphi_k)_{k \ge 1}$ soddisfa le richieste del lemma





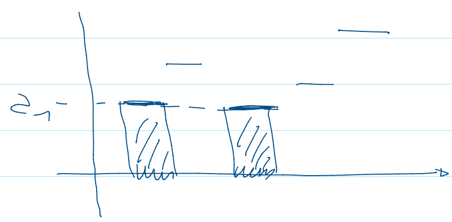
INTEGRALE DI LEBESGUE

Sia $\varphi : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ funzione semplice non negativa

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_N\} = \varphi(\mathbb{R}^n) \qquad \forall i = 1 \ldots N \quad E_i = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n : \varphi(\underline{x}) = a_i \}$$

$$\varphi(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{N} a_i \mathbb{1}_{E_i}(\underline{x})$$

$$I(\varphi) := \sum_{i=1}^{N} a_i \mathcal{L}^n(E_i)$$



OSS Se $\min_{i=1 \ldots N} a_i > 0 \Rightarrow I(\varphi) = +\infty$

CONVENZIONE Se $\exists i$ t.c. $a_i = 0$ e $\mathcal{L}^n(E_i) = +\infty$

pongo $a_i \mathcal{L}^n(E_i) := 0$

PROPRIETÀ Se φ e ψ sono due funzioni semplici non negative $\varphi: \mathbb{R}^n \to [0,+\infty)$ e se $\alpha, \beta \geq 0$, allora

$$I(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha I(\varphi) + \beta I(\psi)$$

DEF Sia $f: \mathbb{R}^n \to [0,+\infty]$ funzione misurabile non negativa. Definisco integrale di Lebesgue di f:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\underline{x})\,d\underline{x} := \sup\left\{ I(\varphi) : \varphi \text{ funzione semplice t.c. } 0 \leq \varphi(\underline{x}) \leq f(\underline{x}) \ \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n \right\}$$

PROPRIETÀ Se f, g sono due funzioni misurabili non negative, e se $\alpha, \beta \geq 0$, allora

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\alpha f + \beta g)(\underline{x})\,d\underline{x} = \alpha \int_{\mathbb{R}^n} f(\underline{x})\,d\underline{x} + \beta \int_{\mathbb{R}^n} g(\underline{x})\,d\underline{x}$$

DEF Sia $f: \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ funzione misurabile

Sia $f^+(\underline{x}) := \max\{f(\underline{x}), 0\}$ PARTE POSITIVA DI f

e sia $f^-(\underline{x}) := \max\{-f(\underline{x}), 0\}$ PARTE NEGATIVA DI f

(DIMOSTRARE PER ESERCIZIO CHE SONO MISURABILI)

Sono entrambe misurabili, nonnegative. Inoltre

$$f(\underline{x}) = f^+(\underline{x}) - f^-(\underline{x}) \quad \text{e} \quad |f(\underline{x})| = f^+(\underline{x}) + f^-(\underline{x}) \ \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n$$

(VERIFICARE PER ESERCIZIO)

Considero $\int_{\mathbb{R}^n} f^+(\underline{x})\,d\underline{x}$ e $\int_{\mathbb{R}^n} f^-(\underline{x})\,d\underline{x}$

Se almeno uno di questi due integrali è finito, dico che f è una FUNZIONE INTEGRABILE e definisco

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\underline{x})\,d\underline{x} = \int_{\mathbb{R}^n} f^+(\underline{x})\,d\underline{x} - \int_{\mathbb{R}^n} f^-(\underline{x})\,d\underline{x}$$

Se entrambi gli integrali di f^+ e di f^- sono finiti, dico che f è SOMMABILE

Se entrambi gli integrali di f^+ e di f^- sono finiti, dico che f è SOMMABILE

In questo caso sicuramente $\int_{\mathbb{R}^n} f(\underline{x})d\underline{x} \in \mathbb{R}$

Inoltre si verifica facilmente che f è sommabile SSE $\int_{\mathbb{R}^n} |f(\underline{x})|d\underline{x}$ è finito

---

Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ insieme misurabile e sia $f: E \to \overline{\mathbb{R}}$ misurabile

Estendo f a tutto $\mathbb{R}^n$ ponendo

$$\tilde{f}(\underline{x}) = \begin{cases} f(\underline{x}) & \underline{x} \in E \\ 0 & \underline{x} \in \mathbb{R}^n \setminus E \end{cases}$$

e definisco $\int_E f(\underline{x})d\underline{x} := \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(\underline{x})d\underline{x}$ se $\tilde{f}$ è integrabile in $\mathbb{R}^n$.

In questo caso dico che f è integrabile in E

Se $\int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(\underline{x})d\underline{x}$ esiste finito, dico che f è sommabile in E

PROPRIETÀ ELEMENTARI

1) Se φ è funzione semplice non negativa $I(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\underline{x})d\underline{x}$

2) Se $f: E \to \overline{\mathbb{R}}$ è integrabile in E insieme misurabile e se $F \subseteq E$ è misurabile, allora f è integrabile in F e

$$\int_F f(\underline{x})d\underline{x} = \int_E f(\underline{x}) \mathbb{1}_F(\underline{x})d\underline{x}$$

3) Se $\mathcal{L}^n(E) = 0 \Rightarrow$ ogni funzione è sommabile su E e $\int_E f(\underline{x})d\underline{x} = 0$

4) La famiglia delle funzioni sommabili su un insieme E è uno spazio vettoriale

5) Se $E \subset \mathbb{R}^n$ è misurabile e se $f: E \to [0, +\infty]$ è una funzione misurabile non negativa e se $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\int_E (\alpha f)(\underline{x})d\underline{x} = \alpha \int_E f(\underline{x})d\underline{x}$$

6) MONOTONIA Se E è misurabile, $f, g: E \to [0, +\infty]$ sono misurabili non negative t.c. $f(\underline{x}) \leq g(\underline{x}) \ \forall \underline{x} \in E$ allora

$$\int_E f(\underline{x})d\underline{x} \leq \int_E g(\underline{x})d\underline{x}$$

sono misurabili non negative t.c. $f(x) \le g(x)$ $\forall x \in E$

allora $$\int_E f(x)\,dx \le \int_E g(x)\,dx$$

LEMMA di BEPPO LEVI

Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ insieme misurabile e sia $(f_k)_{k\ge 1}$ successione monotone crescente di funzioni misurabili non negative

$$0 \le f_1(x) \le f_2(x) \le \dots \le f_k(x) \le f_{k+1}(x) \le \dots$$

Sia $f(x) := \lim_{k\to\infty} f_k(x) = \sup_{k\ge 1} f_k(x)$

Allora $$\int_E f(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} \int_E f_k(x)\,dx$$

DIM Verificare che $\{x \in E : f(x) \le t\} = \bigcap_{k\ge 1} \{x \in E : f_k(x) \le t\}$

$\Rightarrow$ So che f è misurabile non negativa e $f_k(x) \le f(x)$ $\forall k \ge 1$ e $\forall x \in E$

$$\int_E f_k(x)\,dx \le \int_E f(x)\,dx \qquad \forall k$$

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} \int_E f_k(x)\,dx \le \int_E f(x)\,dx$$

Devo dimostrare la disuguaglianza opposta

Osservo che se $\lim_{k\to\infty} \int_E f_k(x)\,dx = +\infty \Rightarrow$ è $\ge \int_E f(x)\,dx$

Considero il caso in cui questo limite è finito

Sia φ semplice non negativa $0 \le \varphi(x) \le f(x)$ $\forall x \in E$
e sia $\beta \in (0,1)$

$A_k = \{x \in E : f_k(x) \ge \beta\varphi(x)\}$ è misurabile $\forall k$

$A_k \subseteq A_{k+1}$ e $\underbrace{\bigcup_{k\ge 1} A_k = E}_{\text{perché } \beta \in (0,1)}$

$$\beta \int_{A_k} \varphi(x)\,dx = \int_{A_k} (\beta\varphi(x))\,dx \le \int_{A_k} f_k(x)\,dx = \int_E \underbrace{f_k(x)\,\mathbb{1}_{A_k}(x)}_{\le f_k(x)}\,dx$$

$$\le \int_E f_k(x)\,dx$$

$\Rightarrow$ $\beta \int_{A_k} \varphi(x)\,dx \le \int_E f_k(x)\,dx$ $\forall k \ge 1$ e $\forall \beta \in (0,1)$

$$\beta \int_{A_k} \varphi(\underline{x})\,d\underline{x} \le \int_E f_k(\underline{x})\,d\underline{x} \qquad \forall k \ge 1 \quad e \ \forall \beta \in (0,1)$$

$$\varphi(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{N} a_i \mathbb{1}_{E_i}(\underline{x}) \qquad \varphi(\underline{x})\mathbb{1}_{A_k}(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{N} a_i \mathbb{1}_{E_i \cap A_k}(\underline{x})$$

$$\int_{A_k} \varphi(\underline{x})\,d\underline{x} = \int_E \varphi(\underline{x})\mathbb{1}_{A_k}(\underline{x})\,d\underline{x} = \underline{\sum_{i=1}^{N} a_i \mathcal{L}^n(E_i \cap A_k)}$$

$$E_i \cap A_k \subseteq E_i \cap A_{k+1} \qquad \bigcup_{k \ge 1}(E_i \cap A_k) = E_i$$

Per la continuità della misura $\forall i = 1 \dots N$ $\underline{\mathcal{L}^n(E_i \cap A_k) \xrightarrow{k \to \infty} \mathcal{L}^n(E_i)}$

$$\sum_{i=1}^{N} a_i \mathcal{L}^n(E_i \cap A_k) \xrightarrow{k \to \infty} \sum_{i=1}^{N} a_i \mathcal{L}^n(E_i) = \int_E \varphi(\underline{x})\,d\underline{x}$$

Passo al limite nella disuguaglianza

$$\beta \int_E \varphi(\underline{x})\,d\underline{x} \le \lim \int_E f_k(\underline{x})\,d\underline{x} \qquad \forall \beta \in (0,1)$$

$$\beta \to 1^- \quad \Rightarrow \int_E \varphi(\underline{x})\,d\underline{x} \le \lim_{k \to \infty} \int_E f_k(\underline{x})\,d\underline{x}$$

$\forall \varphi$ funzione semplice $0 \le \varphi \le f$

Faccio l'estremo superiore rispetto a φ

$$\int_E f(\underline{x})\,d\underline{x} \le \lim_{k \to \infty} \int_E f_k(\underline{x})\,d\underline{x}$$

DEF Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ misurabile, dico che una PROPRIETÀ VALE
"q.o. in E" q.o. = quasi ovunque
"per q.o. $\underline{x} \in E$" q.o = quasi ogni

se $\exists N \subset E$ $\mathcal{L}^n(N) = 0$ t.c. la proprietà vale
per $\forall \underline{x} \in E \setminus N$

ESEMPIO $E = \mathbb{R}$ $\qquad f(x) = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 1 & x \in \mathbb{R} \end{cases}$

$\mathcal{L}^1(\mathbb{Q}) = 0$ perché $\mathbb{Q}$ è misurabile.

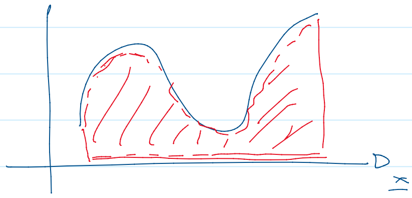
PROPRIETÀ Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ misurabile e sia $f: E \to [0, +\infty]$ funzione misurabile non negativa t.c. $\int_E f(\underline{x})\,d\underline{x} = 0$

Allora $f(\underline{x}) = 0$ per q.o. $\underline{x} \in E$

TEOREMA DI FUBINI

Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ $\mathcal{L}^n$-misurabile e sia $f: E \to [0, +\infty]$ funzione non negativa.

$$SG_{f,E} = \{(\underline{x}, t) \in \mathbb{R}^{n+1} : \underline{x} \in E, \ 0 < t < f(\underline{x})\}$$



si dice SOTTOGRAFICO di f IN E

Allora $SG_{f,E}$ è $\mathcal{L}^{n+1}$-misurabile $\Longleftrightarrow$ f è $\mathcal{L}^n$-misurabile

In tal caso $$\mathcal{L}^{n+1}(SG_{f,E}) = \int_E f(\underline{x})\,d\underline{x}$$

LEMMA (NO DIM) Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ $\mathcal{L}^n$-misurabile e sia $L > 0$

Allora
$$E \times [0, L], \quad E \times (0, L) \quad E \times (0, L] \quad E \times [0, L)$$
sono misurabili e loro misura $\mathcal{L}^{n+1}$ è $L \cdot \mathcal{L}^n(E)$

Per il Teorema dimostriamo che se f è misurabile $\Rightarrow$

$SG_{f,E}$ è $\mathcal{L}^{n+1}$-misurabile

Sia φ funzione semplice non negativa
la estendo a tutto $\mathbb{R}^n$ ponendo $\varphi(\underline{x}) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus E$

$$\varphi(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{N} a_i \mathbb{1}_{E_i}(\underline{x}) \qquad E_i = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : \varphi(\underline{x}) = a_i\}$$

$$SG_\varphi := \{(\underline{x}, t) \in \mathbb{R}^{n+1} : \underline{x} \in \mathbb{R}^n \quad 0 < t < \varphi(\underline{x})\}$$
$$= \bigcup_{i=1}^{N} \{(\underline{x}, t) : \underline{x} \in E_i \quad 0 < t < a_i\} =$$
$$= \bigcup_{i=1}^{N} \left(\{\underline{x} \in E_i\} \times (0, a_i) \right)$$
$$\mathcal{L}^{n+1}(SG_\varphi) = \sum_{i=1}^{N} \mathcal{L}^{n+1}(E_i \times (0, a_i)) = \sum_{i=1}^{N} a_i \mathcal{L}^{n}(E_i)$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\underline{x})\,d\underline{x}$$

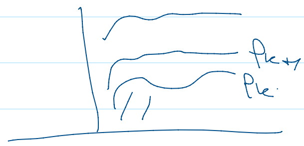
Se f è misurabile non negativa, ricorro al lemma di campionamento

$(\varphi_k)_{k \geq 1}$ funzioni semplici $0 \leq \varphi_k(\underline{x}) \leq f(\underline{x}) \quad \forall k, \forall x$

$(\varphi_k)_{k\geq 1}$ funzioni semplici $0\le \varphi_k(x)\le f(x)$ $\forall k, \forall x$

$$\lim_{k\to\infty}\varphi_k(x)=f(x) \quad \forall x$$

$$\varphi_k\le\varphi_{k+1}\le f \qquad SG_{\varphi_k}\subseteq SG_{\varphi_{k+1}}\subseteq SG_f$$



e $\bigcup_{k\geq 1} SG_{\varphi_k}=SG_f$

per continuità della misura

$$\mathcal{L}^{n+1}(SG_f)=\lim \mathcal{L}^{n+1}(SG_{\varphi_k})=\lim\int_{\mathbb{R}^n}\varphi_k(\underline{x})\,d\underline{x} =$$

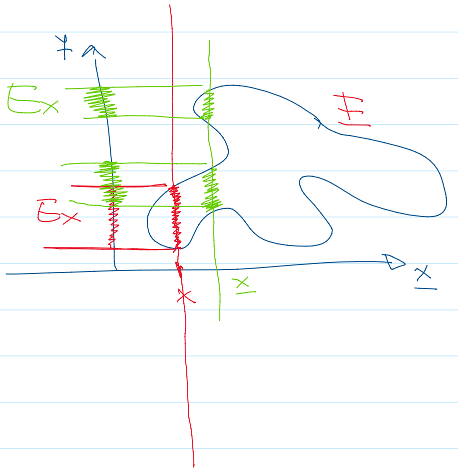
per Beppo Levi

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(\underline{x})\,d\underline{x}$$

DEF $E\subseteq\mathbb{R}^{n+k}=\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^k$

Per $\underline{x}\in\mathbb{R}^n$ chiamo FETTA DI E SOPRA $\underline{x}$

$$E_{\underline{x}}=\{y\in\mathbb{R}^k : (\underline{x},y)\in E\}$$



TEOREMA DI FUBINI

Sia $E\subset\mathbb{R}^{n+k}$ $\mathcal{L}^{n+k}$-misurabile
Allora

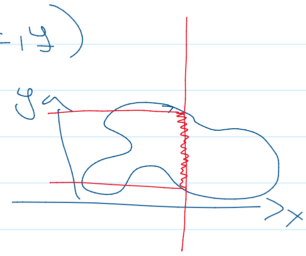
1. per q.o. $x\in\mathbb{R}^n$ la fetta di E sopra x è $\mathcal{L}^k$-misurabile
2. per $\mathcal{L}^n$-q.o. $x\in\mathbb{R}^n$ è ben definita la funzione
$$x\longmapsto\mathcal{L}^k(E_{\underline{x}})$$
3. $$\mathcal{L}^{n+k}(E)=\int_{\mathbb{R}^n}\mathcal{L}^k(E_{\underline{x}})\,d\underline{x}$$

TEOREMA DI FUBINI Sia $E\subseteq\mathbb{R}^{n+k}$ $\mathcal{L}^{n+k}$-misurabile, sia $f:E\to\overline{\mathbb{R}}$ INTEGRABILE. Allora

1. per q.o. $\underline{x}\in\mathbb{R}^n$ la funzione $f_{\underline{x}}: y\in\mathbb{R}^k\longmapsto f(\underline{x},y)$ è $\mathcal{L}^k$-misurabile.
2. per q.o. $y\in\mathbb{R}^k$ la funzione $f_{y}: \underline{x}\in\mathbb{R}^n\longmapsto f(\underline{x},y)$

② per q.o. $y \in \mathbb{R}^k$ la funzione $f_y : \underline{x} \in \mathbb{R}^n \longmapsto f(\underline{x}, y)$

è $\mathcal{L}^n$- misurabile

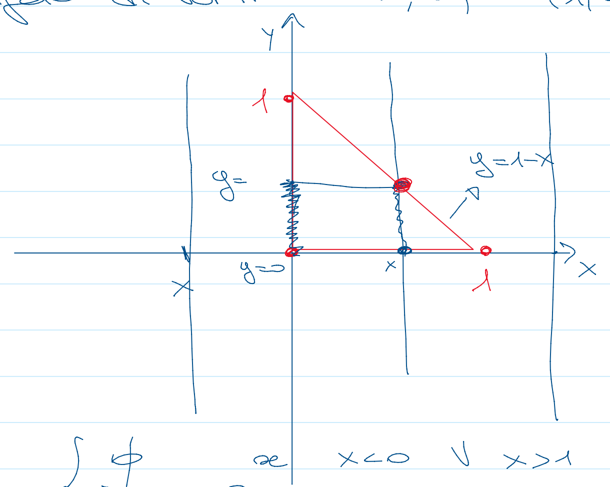


③ $$\int_E f(\underline{x}, y)\, d\underline{x}\, dy = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{E_x} f(\underline{x}, y)\, dy \right) d\underline{x}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^k} \left(\int_{E_y} f(\underline{x}, y)\, d\underline{x} \right) dy$$

ESEMPIO

E = Triangolo di vertici $(0,0)$ $(1,0)$ $(0,1)$



Scrivere $\int_T f(x,y)\, d(x,y)$

usando il Teorema di Fubini

$$E_x = \begin{cases} \phi & \text{se } x < 0 \ \vee \ x > 1 \\ [0, 1-x] & \text{se } x \in [0,1] \end{cases}$$

Retta per $(0,1)$ e $(1,0)$

$y = mx + q \qquad q = 1$

$0 = m \cdot 1 + 1 \qquad m = -1$

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{E_x} f(x,y)\,dy \right) dx = \int_{(-\infty,0)\cup[0,1]\cup(1,+\infty)} \left(\int_{E_x} f(x,y)\,dy \right) dx =$$

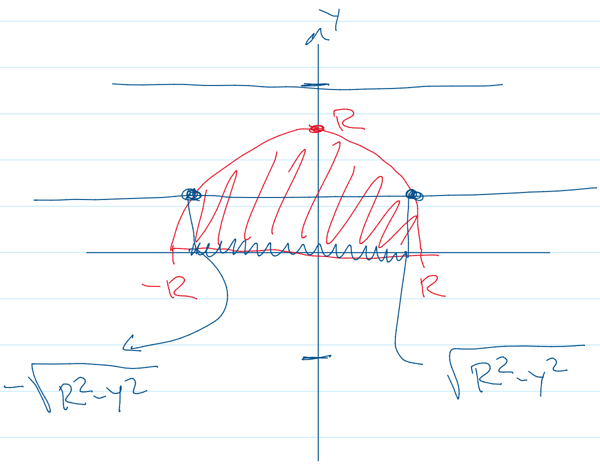
$$\underbrace{\int_{(-\infty,0)} \left(\int_{E_x} f(x,y)\,dy \right) dx}_{=0} + \int_{[0,1)} \left(\int_{E_x} f(x,y)\,dy \right) dx + \underbrace{\int_{(1,+\infty)} \left(\int_{E_x} f(x,y)\,dy \right) dx}_{=0}$$

$E_x = \emptyset$ $\quad$ $E_x = \emptyset$

$$= \int_{[0,1)} \left(\int_{[0,1-x]} f(x,y)\,dy \right) dx$$

$$\int_E f(x,y)\,d(x,y)$$

E = semicerchio centrato nell'origine, raggio R e contenuto in $y \geq 0$



$y > R \quad E_y = \emptyset$

$y < 0 \quad E_y = \emptyset$

$$x^2 + y^2 = R^2$$

$$x^2 = R^2 - y^2$$

$y \in [0, R] \qquad E_y = \left[-\sqrt{R^2-y^2}, +\sqrt{R^2-y^2} \right]$

$$\int_C f(x,y)\,d(x,y) = \int_{[0,R]} \left(\int_{[-\sqrt{R^2-y^2},\, +\sqrt{R^2-y^2}]} f(x,y)\,dx \right) dy$$