$I \subset \mathbb{R}^n$ $\quad I = (a_1,b_1]\times(a_2,b_2]\times \dots \times (a_n,b_n]$ $\quad a_i \le b_i \quad \forall i=1 \dots n$

$= \prod_{i=1}^{n} (a_i,b_i]$ $\quad$ n-intervallo

$vol(I) = \prod_{i=1}^{n} (b_i-a_i)$

Se $A\subseteq\mathbb{R}^n$ aperto $\Rightarrow \exists (I_k)_{k\geq1}$ famiglia numerabile di n-intervalli disgiunti 2 a 2 t.c. $A=\bigcup_{k\geq1} I_k$

$E\subseteq\mathbb{R}^n$ MISURA ESTERNA $\mathcal{L}^{n*}(E)$:

$$\mathcal{L}^{n*}(E) := \inf\left\{ \sum_{k\geq1} vol(I_k) \;,\; (I_k)_{k\geq1}\in\mathcal{J} \text{ t.c. } E\subseteq\bigcup_{k\geq1} I_k \right\}$$

A) $\mathcal{L}^{n*}(E)\in[0,+\infty]$ $\quad \forall E\subseteq\mathbb{R}^n$

B) $E\subseteq F$ $\quad \mathcal{L}^{n*}(E)\leq\mathcal{L}^{n*}(F)$

C) $(E_j)_{j\geq1}\subseteq\mathbb{R}^n$ $\Rightarrow$ $\mathcal{L}^{n*}\left(\bigcup_{j\geq1} E_j\right)\leq\sum_{j\geq1}\mathcal{L}^{n*}(E_j)$

D) $I\in\mathcal{J}$ $\Rightarrow$ $\mathcal{L}^{n*}(I)=vol(I)$

E) $\mathcal{L}^{n*}(E) = \inf\{\mathcal{L}^{n*}(A) : A \text{ aperto t.c. } A\supseteq E\}$

F) $\mathcal{L}^{n*}(\emptyset)=0$

G) $\mathcal{L}^{n*}(E)=0$ $\quad \forall E\subseteq\mathbb{R}^n$ discreto (cioè numerabile o finito)

H) I n-intervallo $\Rightarrow$ $\mathcal{L}^{n*}(\partial E)=0$

K) TEST DI CARATHÉODORY

$E,F\subseteq\mathbb{R}^n$ se $\inf\{\|x-y\| : x\in E, y\in F\}>0$ $\Rightarrow$ $\mathcal{L}^{n*}(E\cup F)=\mathcal{L}^{n*}(E)+\mathcal{L}^{n*}(F)$

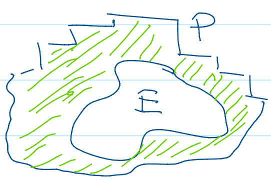
J) $(I_k)_{k=1}^{K}$ è una famiglia di n-intervalli a 2 a 2 disgiunti

$\Rightarrow$ $\mathcal{L}^{n*}\left(\bigcup_{k=1}^{K} I_k\right) = \sum_{k=1}^{K}\underbrace{\mathcal{L}^{n*}(I_k)}_{=vol(I_k)}$

INSIEMI MISURABILI SECONDO LEBESGUE

DEF Sia $E\subseteq\mathbb{R}^n$. Dico che E è misurabile secondo Lebesgue se $\forall\varepsilon>0$ $\exists (I_k)_{k\geq1}$ famiglia numerabile di n-intervalli t.c., posto $P:=\bigcup_{k\geq1} I_k$ si ha che

$$\begin{cases} P\supseteq E \\ \mathcal{L}^{n*}(P\setminus E)<\varepsilon \end{cases}$$



La famiglia degli insiemi misurabili secondo Lebesgue si indica $\mathcal{M}^n$ ($\mathcal{M}$)

Se $E\in\mathcal{M}$, la misura esterna di E si indica $\mathcal{L}^n(E)$ e si dice

La famiglia degli insiemi misurabili secondo Lebesgue si indica $\mathcal{M}$ ($\mathcal{M}$)
Se $E \in \mathcal{L}$, la misura esterna di E si indica $\mathcal{L}^n(E)$ e si dice semplicemente MISURA (DI LEBESGUE) DI E

N.B. $\mathcal{L}^{n*}(E) = 0 \Rightarrow E \in \mathcal{M}$

$$\mathcal{L}^{n*}(E) = \inf \left\{ \sum_{k \geq 1} \mathrm{vol}(I_k) \quad \text{t.c.} \quad E \subseteq I_k, \ I_k \in \mathcal{I} \ \forall k \right\}$$

$$\mathcal{L}^{n*}(E) = 0 \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists (I_k)_{k \geq 1} \quad E \subseteq \cup I_k \quad \text{t.c.} \sum_{k \geq 1} \mathrm{vol}(I_k) < \varepsilon$$

Sia $P := \cup I_k$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{n*}(P \setminus E) \leq \mathcal{L}^{n*}(P) < \varepsilon$$

In particolare: $\phi \in \mathcal{M}$, ogni insieme discreto è misurabile

PROPRIETÀ (1) Ogni insieme aperto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è misurabile

DIM Posso scrivere $A = \bigcup_{k \geq 1} I_k$ $(I_k)_{k \geq 1}$ famiglia numerabile di n-intervalli a 2 a 2 disgiunti

Mi basta prendere $P = A$

$$\mathcal{L}^{n*}(P \setminus A) = \mathcal{L}^{n*}(\phi) = 0 < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$$

(2) Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Allora $E \in \mathcal{M}$ sse $\forall \varepsilon > 0$ $\exists A$ aperto di $\mathbb{R}^n$ t.c. $A \supseteq E$ e $\mathcal{L}^{n*}(A \setminus E) < \varepsilon$

(NO DIM)

(3) Sia $F \subseteq \mathbb{R}^n$ chiuso e limitato, allora $F \in \mathcal{M}$

(4) Sia $(E_k)_{k \geq 1}$ famiglia numerabile di insiemi misurabili, allora $\bigcup_{k \geq 1} E_k \in \mathcal{M}$.

DIM So che E_k è misurabile $\forall k \Rightarrow$
$\forall \varepsilon > 0$ $\exists A_k$ aperto t.c. $A_k \supseteq E_k$ e $\mathcal{L}^{n*}(A_k \setminus E_k) < \varepsilon 2^{-k}$

Sia $A := \bigcup_{k \geq 1} A_k$. So che A è un aperto di $\mathbb{R}^n$

Sicuramente $A = \bigcup_{k \geq 1} A_k \supseteq \bigcup_{k \geq 1} E_k$

$$A \setminus \left(\bigcup_{k \geq 1} E_k \right) = \left(\bigcup_{k \geq 1} A_k \right) \setminus \left(\bigcup_{k \geq 1} E_k \right) \underset{(*)}{\subseteq} \bigcup_{k \geq 1} (A_k \setminus E_k)$$

(*) Sia $x \in (\cup A_k) \setminus (\cup E_k)$ $\Rightarrow$ $x \in \cup A_k \Rightarrow \exists \bar{k}$ t.c. $x \in A_{\bar{k}}$, $x \notin \bigcup_{k \geq 1} E_k$ cioè $\forall k \geq 1$ $x \notin E_k$

In particolare $x \notin E_{\bar{k}}$ $\Rightarrow$ $x \in A_{\bar{k}} \setminus E_{\bar{k}} \subseteq \bigcup_{k \geq 1} (A_k \setminus E_k)$

$$\mathcal{L}^{n*}\left(A \setminus \left(\bigcup_{k \geq 1} E_k\right)\right) \leq \mathcal{L}^{n*}\left(\bigcup_{k \geq 1} (A_k \setminus E_k)\right) \leq \sum_{k \geq 1} \mathcal{L}^{n*}(A_k \setminus E_k)$$

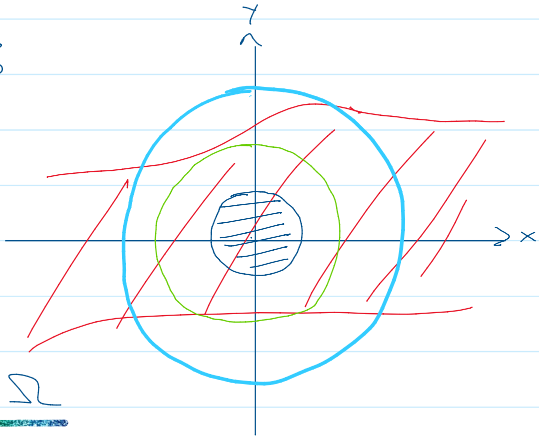
$$\mathcal{L}\left(H\setminus\left(\bigcup_{k\geq 1}E_k\right)\right)\leq \mathcal{L}\left(\bigcup_{k\geq1}(H_k\setminus E_k)\right)\leq \sum_{k\geq1}\mathcal{L}(H_k\setminus E_k)$$

$$\leq \sum_{k\geq 1}\varepsilon 2^{-k}=\varepsilon\sum_{k\geq1}2^{-k}=\varepsilon \qquad \frac{1}{1-\frac{1}{2}}-1=2-1=1$$

(5) Sia $F\subseteq\mathbb{R}^n$ chiuso $\Rightarrow$ $F\in\mathcal{M}$

DIM $k\geq 1$ $\quad D_k(0)=\{\underline{x}\in\mathbb{R}^n:\ \|\underline{x}\|\leq k\}$ è chiuso e limitato

$$F=\bigcup_{k\geq1}\Big(\underbrace{F\cap D_k(0)}_{\text{chiuso e limitato }\in\mathcal{M}}\Big)\in\mathcal{M}$$



DEF Sia Ω un insieme non vuoto e sia $\mathcal{E}$ una famiglia di sottoinsiemi di Ω. Allora $\mathcal{E}$ si dice una <u>σ-ALGEBRA DI Ω</u> se

(1) $\emptyset,\Omega\in\mathcal{E}$

(2) Se $(E_k)_{k\geq1}$ famiglia numerabile contenuta in $\mathcal{E}$, allora deve essere $\bigcup_{k\geq1}E_k$

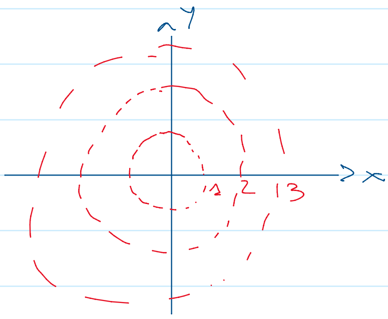
(3) Se $E\in\mathcal{E}$ $\Rightarrow$ $E^c:=\Omega\setminus E\in\mathcal{E}$

TEOREMA $\mathcal{M}^n$ è una σ-algebra di $\mathbb{R}^n$

DIM (1A) $\emptyset\in\mathcal{M}^n$ già visto

(1B) $\mathbb{R}^n\in\mathcal{M}^n$ $\qquad \mathbb{R}^n=\bigcup_{k\geq1}B_k(0)$

$\forall k$ $B_k(0)$ è un aperto $\Rightarrow B_k(0)\in\mathcal{M}^n$
$\Rightarrow \mathbb{R}^n\in\mathcal{M}^n$



(2) già visto

(3) $E\in\mathcal{M}$: $\forall k\in\mathbb{N}$ $\exists A_k$ aperto t.c. $A_k\supseteq E$ $\mathcal{L}^{n*}(A_k\setminus E)<2^{-k}$

$$E^c=\left(\bigcup_{k\geq1}A_k^c\right)\cup\left(E^c\setminus\left(\bigcup_{k\geq1}A_k^c\right)\right)=$$ unione di due misurabili $\Rightarrow$ è misurabile

$\forall k$ A_k^c è chiuso $\Rightarrow$ è misurabile $\Rightarrow$ $\boxed{\bigcup_{k\geq1}A_k^c \text{ è misurabile}}$

$j\in\mathbb{N}$ $\quad E^c\setminus\left(\bigcup_{k\geq1}A_k^c\right)\subseteq E^c\setminus A_j^c=A_j\setminus E$ (dim per esercizio)

$$\mathcal{L}^{n*}\left(E^c\setminus\left(\bigcup_{k\geq1}A_k^c\right)\right)\leq\mathcal{L}^{n*}(A_j\setminus E)<2^{-j}$$

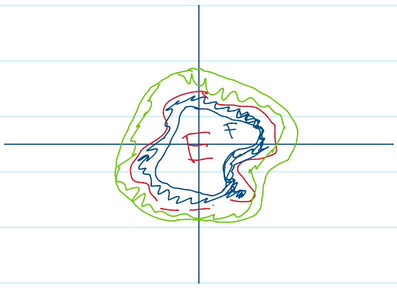
$$\sim \left(E \setminus \left(\bigcup_{k\geq 1} A_k\right)\right) \leq \mathcal{L}(A_j \setminus C) < 2$$

$$\cdot\ \mathcal{L}^{n*}\left(E^c \setminus \left(\bigcup_{k\geq 1} A_k^c\right)\right) < 2^{-j} \qquad \forall j \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{n*}\left(E^c \setminus \left(\bigcup_{k\geq 1} A_k^c\right)\right) = 0 \quad \Rightarrow \boxed{E^c \setminus \left(\bigcup_{k\geq 1} A_k^c\right) \in \mathcal{M}}$$

COROLLARIO (no dim) Sia $(E_k)_{k\geq 1}$ una famiglia numerabile di insiemi misurabili allora $\bigcap_{k\geq 1} E_k$ è misurabile

COROLLARIO Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Allora E è misurabile sse $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists F$ chiuso t.c. $\begin{cases} F \subseteq E \\ \mathcal{L}^{n*}(E \setminus F) < \varepsilon \end{cases}$



$\mathcal{L}^{n*}(A \setminus E) < \varepsilon$

$\mathcal{L}^{n*}(E \setminus F) < \varepsilon$

TEOREMA Sia $(E_k)_{k\geq 1}$ famiglia numerabile di insiemi misurabili t.c. $E_k \cap E_j = \emptyset \quad \forall k, j \quad k \neq j$. Allora

$$\mathcal{L}^n\left(\bigcup_{k\geq 1} E_k\right) = \sum_{k\geq 1} \mathcal{L}^n(E_k) \longleftarrow$$

σ-ADDITIVITÀ DELLA MISURA DI LEBESGUE

In generale: $\mathcal{L}^{n*}\left(\bigcup_{k\geq 1} E_k\right) \leq \sum_{k\geq 1} \mathcal{L}^{n*}(E_k)$

$\mathcal{L}^{n*}\left(\bigcup_{k\geq 1} E_k\right) = \mathcal{L}^n\left(\bigcup_{k\geq 1} E_k\right)$, $\quad \mathcal{L}^{n*}(E_k) = \mathcal{L}^n(E_k)$

TEOREMA Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Le seguenti condizioni sono equivalenti

1) $E \in \mathcal{M}$
2) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists A$ aperto t.c. $A \supseteq E \quad \mathcal{L}^{n*}(A \setminus E) < \varepsilon$
3) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists F$ chiuso t.c. $F \subseteq E \quad \mathcal{L}^{n*}(E \setminus F) < \varepsilon$
4) $\exists (A_k)_{k\geq 1}$ successione monotona <u>decrescente</u> di aperti t.c. $A_k \supseteq E$ e $A_{k+1} \subseteq A_k$

$\exists N \subseteq \mathbb{R}^n$ t.c. $\mathcal{L}^n(N) = 0$ t.c.

$$E = \left(\bigcap_{k\geq 1} A_k\right) \setminus N$$

$$E = \left(\bigcap_{k\geq 1} A_k\right) \setminus N$$

5) $\exists (F_k)_{k\geq 1}$ successione monotona crescente di chiusi t.c. $F_k \subseteq E$ e

$\exists N \subseteq \mathbb{R}^n$ t.c. $\mathcal{L}^n(N) = 0$ e $E = \left(\bigcup_{k\geq 1} F_k\right) \cup N$

DIM di $2 \Rightarrow 4$ $\quad \forall k \in \mathbb{N}$ $\exists A_k$ aperto $\quad A_k \supseteq E$
$\mathcal{L}^{n*}(A_k \setminus E) < 2^{-k}$

$B_1 = A_1$ aperto $\quad B_1 \supseteq E$

$B_2 = A_2 \cap B_1$ aperto $\quad B_2 \supseteq B_1 \supseteq E$

$\vdots$ per induzione

$B_k = A_k \cap B_{k-1}$ aperto $\quad B_k \supseteq B_{k-1} \supseteq E \qquad B_k \subseteq A_k$

$\bigcap_{k\geq 1} B_k$ soddisfa la richiesta insieme ad un opportuno insieme N:

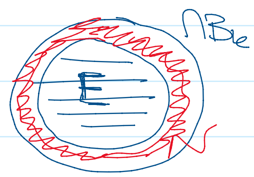
$$\mathcal{L}^{n*}(B_k \setminus E) \leq \mathcal{L}^{n*}(A_k \setminus E) < 2^{-k}$$

$$\forall j \in \mathbb{N} \quad \mathcal{L}^{n*}\left(\left(\bigcap_{k\geq 1} B_k\right) \setminus E\right) \leq \mathcal{L}^{n*}(B_j \setminus E) < 2^{-j}$$

$$\mathcal{L}^{n*}\left(\left(\bigcap_{k\geq 1} B_k\right) \setminus E\right) < 2^{-j} \quad \forall j \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}^{n*}\left(\left(\bigcap_{k\geq 1} B_k\right) \setminus E\right) = 0$$

$$N := \left(\bigcap_{k\geq 1} B_k\right) \setminus E \qquad \mathcal{L}^{n*}(N) = 0 \Rightarrow N \in \mathcal{L} \text{ e } \mathcal{L}^n(N) = 0$$

$$E = \left(\bigcap_{k\geq 1} B_k\right) \setminus N$$



TEOREMA (CONTINUITÀ DELLA MISURA)

Sia $(E_k)_{k\geq 1}$ una successione monotona crescente di insiemi misurabili:

$\forall k \quad E_k \in \mathcal{L}$ e $E_k \subseteq E_{k+1}$

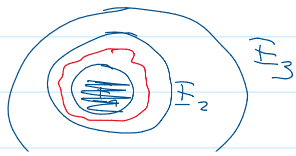
Allora $\quad \mathcal{L}^n\left(\bigcup_{k\geq 1} E_k\right) = \lim_{k\to\infty} \mathcal{L}^n(E_k) = \sup_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{L}^n(E_k)$

DIM $\quad E_k \subseteq E_{k+1} \Rightarrow \mathcal{L}^n(E_k) \leq \mathcal{L}^n(E_{k+1})$

$E_1 \subseteq E_2 \subseteq E_3 \subseteq \dots$

$F_1 = E_1$

$F_2 = E_2 \setminus E_1$

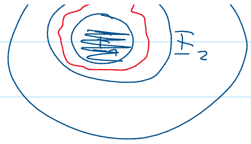


$F_1 = E_1$

$F_2 = E_2 \setminus E_1$

$\vdots$

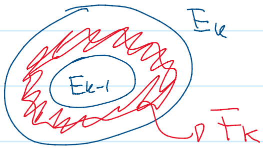
$\to F_k = E_k \setminus E_{k-1} \Leftarrow \quad \underline{E_k = F_k \cup E_{k-1} \qquad F_k \cap E_{k-1} = \emptyset}$



$j \neq k \qquad F_k \cap F_j = \emptyset$ per costruzione e $\bigcup_{k \geq 1} F_k = \bigcup_{k \geq 1} E_k$

$$\mathcal{L}^n\Big(\bigcup_{k\geq 1} E_k\Big) = \mathcal{L}^n\Big(\bigcup_{k\geq 1} F_k\Big) \overset{\sigma\text{-additività}}{=} \underline{\sum_{k \geq 1} \mathcal{L}^n(F_k)} =$$

$k \geq 2$



$\to E_k = E_{k-1} \cup F_k \qquad F_k \cap E_{k-1} = \emptyset$

$$\mathcal{L}^n(E_{k-1} \cup F_k) = \mathcal{L}^n(E_{k-1}) + \mathcal{L}^n(F_k)$$

$$\mathcal{L}^n(F_k) = \mathcal{L}^n(E_{k-1} \cup F_k) - \mathcal{L}^n(E_{k-1})$$
$$= \mathcal{L}^n(E_k) - \mathcal{L}^n(E_{k-1})$$

$$\mathcal{L}^n\Big(\bigcup_{k\geq 1} E_k\Big) = \mathcal{L}^n(F_1) + \sum_{k \geq 2}\Big(\mathcal{L}^n(E_k) - \mathcal{L}^n(E_{k-1})\Big) =$$

$$= \lim_{j \to +\infty} \underline{\mathcal{L}^n(F_1) + \sum_{k=2}^{j}\Big(\mathcal{L}^n(E_k) - \mathcal{L}^n(E_{k-1})\Big)}$$

$$= \lim_{j\to+\infty}\Big(\cancel{\mathcal{L}^n(F_1)}_{E_1} + \big(\cancel{\mathcal{L}^n(E_2)} - \cancel{\mathcal{L}^n(E_1)}\big) + \big(\cancel{\mathcal{L}^n(E_3)} - \cancel{\mathcal{L}^n(E_2)}\big) + \ldots$$

$$\ldots + \big(\cancel{\mathcal{L}^n(E_{j-1})} - \cancel{\mathcal{L}^n(E_{j-2})}\big) + \big(\mathcal{L}^n(E_j) - \cancel{\mathcal{L}^n(E_{j-1})}\big)\Big)$$

$$= \lim_{j\to+\infty} \mathcal{L}^n(E_j) \qquad \boxtimes$$

TEOREMA (CONTINUITÀ DELLA MISURA PER FAMIGLIE MONOTONE DECRESCENTI)

Sia $(E_k)_{k\geq 1}$ una successione monotona decrescente di insiemi misurabili e supponiamo $\mathcal{L}^n(E_1) < +\infty$

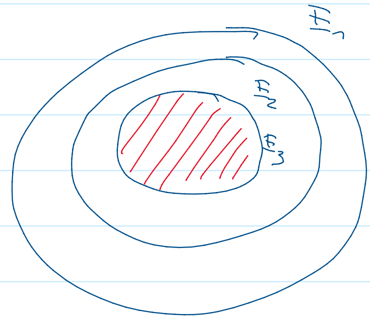
Allora

$$\mathcal{L}^n\Big(\bigcap_{k\geq 1} E_k\Big) = \lim_{k\to\infty} \mathcal{L}^n(E_k) = \inf_{k \geq 1} \mathcal{L}^n(E_k)$$

oss. $\quad E_k \subseteq E_{k-1} \ \forall k \implies E_k \subseteq E_1 \implies \mathcal{L}^n(E_k) \leq \mathcal{L}^n(E_1) < +\infty$

$$E_k \subseteq E_{k-1} \Rightarrow \mathcal{L}^n(E_k) \leq \mathcal{L}^n(E_{k-1}) \Rightarrow$$
$$\exists \lim_{k\to\infty} \mathcal{L}^n(E_k) = \inf_{k\geq 1} \mathcal{L}^n(E_k)$$

DIM $\quad k \geq 1 \quad F_k := E_1 \setminus E_k \Rightarrow E_k = E_1 \setminus F_k$



$E_k \supseteq E_{k+1} \Rightarrow F_k \subseteq F_{k+1}$ cioè

$(F_k)_{k\geq 1}$ è una successione monotona crescente di insiemi misurabili

$$\bigcap_{k\geq 1} E_k = \bigcap_{k\geq 1} (E_1 \setminus F_k) = E_1 \setminus \bigcup_{k\geq 1} F_k$$

(A) $\displaystyle\bigcap_{k\geq 1} (E_1 \setminus F_k) \subseteq E_1 \setminus \bigcup_{k\geq 1} F_k$

$x \in \displaystyle\bigcap_{k\geq 1} (E_1 \setminus F_k) \Rightarrow x \in E_1 \setminus F_k \quad \forall k \geq 1$

cioè $x \in E_1$ e $\underbrace{x \notin F_k \quad \forall k \geq 1}$

$\Downarrow$

$x \notin \displaystyle\bigcup_{k\geq 1} F_k$

$\Rightarrow x \in E_1 \setminus \left(\displaystyle\bigcup_{k\geq 1} F_k\right)$

(B) $E_1 \setminus \displaystyle\bigcup_{k\geq 1} F_k \subseteq \bigcap_{k\geq 1} (E_1 \setminus F_k)$

$x \in E_1 \setminus \displaystyle\bigcup_{k\geq 1} F_k \qquad x \in E_1$ e $\forall k \; x \notin F_k$

$\Downarrow$

$\forall k \quad x \in E_1 \setminus F_k$

$\Downarrow$

$x \in \displaystyle\bigcap_{k\geq 1} (E_1 \setminus F_k)$

$$\Rightarrow \bigcap_{k\geq 1} E_k = E_1 \setminus \left(\bigcup_{k\geq 1} F_k\right)$$

$$\mathcal{L}^n\left(\bigcap_{k\geq 1} E_k\right) = \mathcal{L}^n\left(E_1 \setminus \left(\bigcup_{k\geq 1} F_k\right)\right) = \mathcal{L}^n(E_1) - \mathcal{L}^n\left(\bigcup_{k\geq 1} F_k\right)$$

$$= \mathcal{L}^n(E_1) - \lim_{k\to\infty} \mathcal{L}^n(F_k) = \mathcal{L}^n(E_1) - \lim_{k\to\infty} \mathcal{L}^n(E_1 \setminus E_k) =$$

$$= \mathcal{L}^n(E_1) - \lim_{k\to\infty} \left(\mathcal{L}^n(E_1) - \mathcal{L}^n(E_k)\right) =$$

$$= \mathcal{L}^n(E_1) - \lim_{k\to\infty}\left(\mathcal{L}^n(E_1) - \mathcal{L}^n(E_k)\right) =$$

$$= \cancel{\mathcal{L}^n(E_1)} - \cancel{\mathcal{L}^n(E_1)} + \lim_{k\to\infty} \mathcal{L}^n(E_k)$$

FUNZIONI MISURABILI

DEF Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ misurabile e sia $f: E \to \overline{\mathbb{R}}$ $(\mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\})$

Dico che f è una funzione misurabile secondo Lebesgue se $\forall t \in \mathbb{R}$ $\{\underline{x} \in E : f(\underline{x}) \leq t\}$ è misurabile

PROPRIETÀ Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ insieme misurabile e sia $f: E \to \overline{\mathbb{R}}$

Le seguenti proprietà sono equivalenti

1) f è una funzione misurabile
2) $\forall t \in \mathbb{R}$ $\{\underline{x} \in E : f(\underline{x}) > t\}$ è misurabile
3) $\forall t \in \mathbb{R}$ $\{\underline{x} \in E : f(\underline{x}) \geq t\}$ è misurabile
4) $\forall t \in \mathbb{R}$ $\{\underline{x} \in E : f(\underline{x}) < t\}$ è misurabile
5) $\forall A \subseteq \mathbb{R}$ aperto $f^{-1}(A)$ è misurabile
6) $\forall F \subseteq \mathbb{R}$ chiuso $f^{-1}(F)$ è misurabile

Inoltre f è misurabile SSE una qualsiasi delle proprietà 1-4 vale $\forall t \in D$ dove D è un sottoinsieme denso di $\mathbb{R}$.

DIM $1 \Rightarrow 2$ $\forall t \in \mathbb{R}$ $\{\underline{x} \in E : f(\underline{x}) > t\} = \underset{\in\mathcal{M}}{E} \setminus \underbrace{\{\underline{x} \in E : f(\underline{x}) \leq t\}}_{\in\mathcal{M}} \in \mathcal{M}$

$2 \Rightarrow 3$ $t \in \mathbb{R}$ $\{\underline{x} \in E : f(\underline{x}) \geq t\} = \bigcap_{k \geq 1} \underbrace{\left\{\underline{x} \in E : f(\underline{x}) > t - \frac{1}{k}\right\}}_{\in\mathcal{M}\ \forall k} \in \mathcal{M}$

DIMOSTRARE PER ESERCIZIO

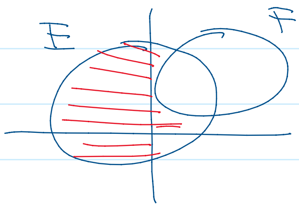
$3 \Rightarrow 4$ $\forall t \in \mathbb{R}$ $\{\underline{x} \in E : f(\underline{x}) < t\} = E \setminus \underbrace{\{\underline{x} \in E : f(\underline{x}) \geq t\}}_{\in\mathcal{M}} \in \mathcal{M}$

$4 \Rightarrow 1$ $t \in \mathbb{R}$ $\{\underline{x} \in E : f(\underline{x}) \leq t\} = \bigcap_{k \geq 1} \left\{\underline{x} \in E : f(\underline{x}) < t + \frac{1}{k}\right\}$

NON DIMOSTRIAMO LE ALTRE EQUIVALENZE

N.B. $E, F \subseteq \mathbb{R}^n$ $\quad E \setminus F = E \cap \underbrace{(\mathbb{R}^n \setminus F)}$

Se $E, F \in \mathcal{M} \Rightarrow E \setminus F \in \mathcal{M}$ perché intersezione di E con $\mathbb{R}^n \setminus F$ che sono due misurabili



LEMMA Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ misurabile, siano $f, g : E \to \overline{\mathbb{R}}$ misurabili

LEMMA Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ misurabile, siano $f, g : E \to \overline{\mathbb{R}}$ misurabili
$\Rightarrow \{x \in E : f(x) < g(x)\}$ è misurabile

PROPRIETÀ
1) Le funzioni costanti sono misurabili
2) Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$, la funzione $\mathbb{1}_E : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definita da
$$\mathbb{1}_E(x) = \begin{cases} 1 & x \in E \\ 0 & x \in \mathbb{R}^n \setminus E \end{cases}$$
è detta funzione caratteristica
è misurabile SSE E è misurabile

3) Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ misurabile e siano $f, g : E \to \mathbb{R}$ misurabili, allora sono misurabili $\max\{f, g\}$ e $\min\{f, g\}$
e se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ è misurabile anche la funzione $\alpha f + \beta g$
Sono misurabili anche $\frac{1}{f}$, f^2 e fg

4) Se $E \subseteq \mathbb{R}^n$ è misurabile, $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ è misurabile e $F \subseteq E$ è misurabile allora la funzione $f|_F : F \to \overline{\mathbb{R}}$ è misurabile

5) Se $E \subseteq \mathbb{R}^n$ è misurabile e $f : E \to \mathbb{R}$ è misurabile e se $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua (a tratti), allora la composizione $\varphi \circ f : E \to \mathbb{R}$ è misurabile

6) Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ misurabile e sia $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni definite su E e misurabili
Allora la funzione $g(x) := \inf_{k \geq 1} f_k(x)$

e la funzione $h(x) := \sup_{k \geq 1} f_k(x)$ sono misurabili

e, se $\exists \, \forall \underline{x} \in E$ $f(\underline{x}) := \lim_{k \to +\infty} f_k(\underline{x})$, allora anche f è misurabile