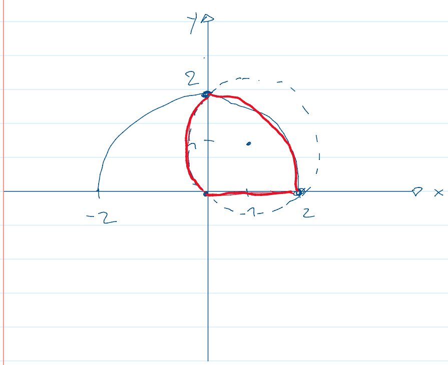
$f(x,y) = y^2(x^2+y^2-2x) \qquad D := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le 4,\ y\ge 0,\ x^2+y^2-2x-2y\le 0\}$



$x^2-2x+1-1+y^2-2y+1-1=0$

$(x-1)^2+(y-1)^2\le 2$

Cerchio $C(1,1) \quad R=\sqrt{2}$

$y=0 \qquad x^2-2x=0$
$\qquad\quad x(x-2)=0$

$x=0 \qquad y^2-2y=0$
$\qquad\quad y(y-2)=0$

$x^2+y^2-2x-2y\le 0 \qquad (x-1)^2 = x^2-2x+1$

$\underbrace{x^2-2x+1}-1+\underbrace{y^2-2y+1}-1\le 0 \qquad (x-1)^2+(y-1)^2-2\le 0$

$f(x,y) = y^2(x^2+y^2-2x)$

$f_x(x,y) = y^2(2x-2) = 2y^2(x-1)$

$f_y(x,y) = 2y(x^2+y^2-2x)+y^2\,2y = 2y(x^2+2y^2-2x)$

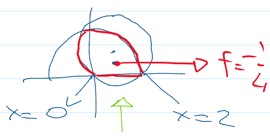
$\begin{cases}(x,y)\in \mathrm{int}(D)\\ 2y^2(x-1)=0\\ 2y(x^2+2y^2-2x)=0\end{cases}$

$y=0$ non è accettabile

$\begin{cases}(x,y)\in \mathrm{int}(D)\\ x-1=0\\ x^2+2y^2-2x=0\end{cases} \qquad \begin{cases}(x,y)\in \mathrm{int}(D)\\ x=1\\ 1+2y^2-2=0\end{cases}$

$\begin{cases}(x,y)\in \mathrm{int}(D)\\ x=1\\ 2y^2=1\end{cases} \quad y=\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \cancel{y=-\frac{1}{\sqrt{2}}}$

$P\left(1,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$



$f\left(1,\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = y^2(x^2+y^2-2x)\Big|_{(x,y)=\left(1,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-2\right) = -\frac{1}{4}$

$\gamma_1 \begin{cases} x=t\\ y=0\end{cases} \quad t\in[0,2] \qquad f(\gamma_1(t)) = f(t,0) \equiv 0$

$y^2(x^2+y^2-2x)$

$\gamma_2 \begin{cases} x=2\cos(t)\\ y=2\sin(t)\end{cases} \quad t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right] \qquad g_2(t) = f(\gamma_2(t)) = f(2\cos(t), 2\sin(t)) =$

$4\sin^2(t)\left(4-4\cos(t)\right)$

$g_2(t) = 16\sin^2(t)\left(1-\cos(t)\right) = \qquad g_2(0)=0 \quad g_2\left(\frac{\pi}{2}\right)=16$

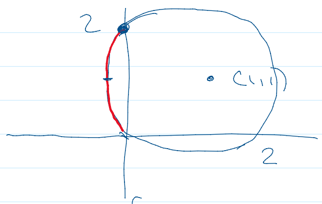
$g_2'(t) = 16\left\{2\sin(t)\cos(t)\left(1-\cos(t)\right)+\sin^2(t)\sin(t)\right\} =$

$= 16\sin(t)\left\{2\cos(t)-2\cos^2(t)+\sin^2(t)\right\} =$

$= 16\sin(t)\left\{2\cos(t)\left(1-\cos(t)\right)+\sin^2(t)\right\} > 0$

$t\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

$$= 16\sin(t)\left\{2\cos(t)\left(1-\cos(t)\right)+\sin^2(t)\right\} > 0$$



$$\begin{cases} x = 1+\sqrt{2}\cos(t) \\ y = 1+\sqrt{2}\sin(t) \end{cases} \qquad t \in ?$$

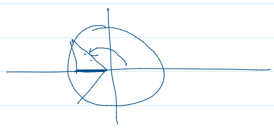
$(0,2)$ $\begin{cases} 1+\sqrt{2}\cos(t) = 0 \\ 1+\sqrt{2}\sin(t) = 2 \end{cases}$ $\quad \cos(t) = \frac{-1}{\sqrt{2}} \quad \sin(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad t = \frac{3}{4}\pi$

$(0,0)$ $\begin{cases} 1+\sqrt{2}\cos(t) = 0 \\ 1+\sqrt{2}\sin(t) = 0 \end{cases}$ $\quad \cos(t) = \frac{-1}{\sqrt{2}} \quad \sin(t) = \frac{-1}{\sqrt{2}} \quad t = \frac{5}{4}\pi$

γ_3 $\begin{cases} x = 1+\sqrt{2}\cos(t) \\ y = 1+\sqrt{2}\sin(t) \end{cases}$ $\quad t \in \left[\frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi\right]$ $\qquad y^2(x^2+y^2-2x)$

$$g_3(t) = f(\gamma_3(t)) = f\left(1+\sqrt{2}\cos(t),\ 1+\sqrt{2}\sin(t)\right) =$$
$$= \left(1+\sqrt{2}\sin(t)\right)^2 \left(\left(1+\sqrt{2}\cos(t)\right)^2 + \left(1+\sqrt{2}\sin(t)\right)^2 - 2\left(1+\sqrt{2}\cos(t)\right)\right)$$
$$= \left(1+\sqrt{2}\sin(t)\right)^2 \left(1 + \cancel{2\cos^2(t)} + \cancel{2\sqrt{2}\cos(t)} + 1 + \cancel{2\sin^2(t)} + 2\sqrt{2}\sin(t) - \cancel{2} - \cancel{2\sqrt{2}\cos(t)}\right)$$

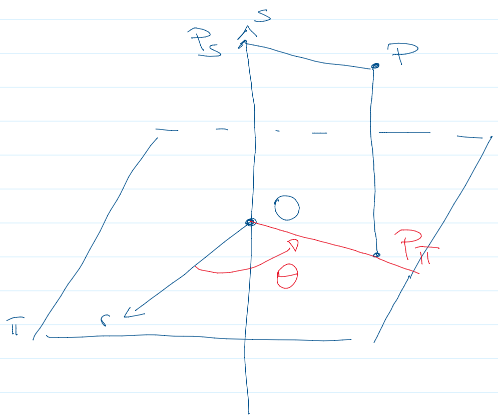
$$g_3(t) = 2\left(1+\sqrt{2}\sin(t)\right)^3 \qquad t \in \left[\frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi\right]$$



$$g_3'(t) = 6\left(1+\sqrt{2}\sin(t)\right)^2 \sqrt{2}\cos(t) =$$
$$= 6\sqrt{2}\cos(t)\left(1+\sqrt{2}\sin(t)\right)^2 < 0$$

$$\boxed{\begin{aligned} f\left(1, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) &= -\tfrac{1}{4} \\ f(0,2) &= 16 \end{aligned}} \qquad f(x,0) = 0 \quad \forall x \in [0,2]$$

COORDINATE CILINDRICHE



Fisso una retta orientata e scelgo un'origine

$\pi :=$ piano per O e perpendicolare a S

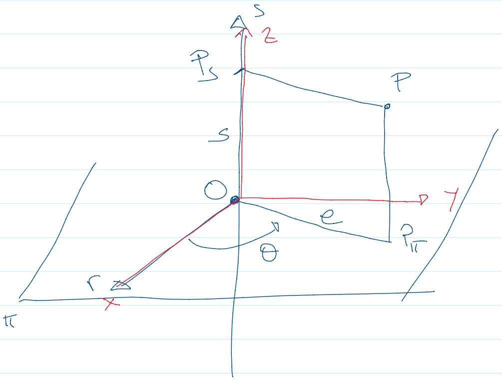
$r :=$ semiretta uscente da O e contenuta su π

$P_\pi :=$ proiezione ortogonale di P su π

$$s = \begin{cases} |P_s - O| & \text{se } P_s \text{ appartiene alla direzione positiva di } s \\ -|P_s - O| & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$\rho := |P_\pi - O|$ $\quad\theta$ l'angolo in radianti

La terna (ρ, θ, s) si dice COORDINATE CILINDRICHE DEL PUNTO P



Considero un sistema di coordinate cartesiane $Oxyz$ in cui O è l'origine che ho scelto su s

L'asse $z \equiv s$

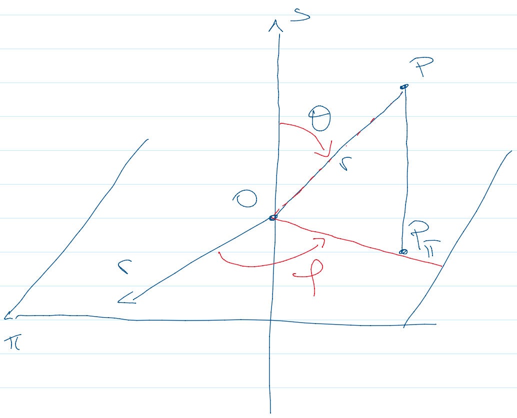
La direzione positiva dell'asse x coincide con la semiretta r

$\Rightarrow$ L'asse y è obbligato

(x, y, z) $\qquad (\rho, \theta, s)$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = s \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta : \quad \cos\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \sin\theta = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ s = z \end{cases}$$

COORDINATE SFERICHE



s = retta orientata su cui ho fissato un'origine

$\pi :=$ piano passante per O e perpendicolare a s

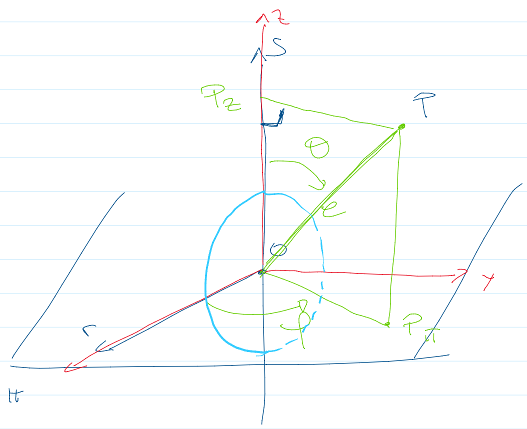
$r :=$ semiretta uscente da O e contenuta su π

$\theta \in [0, \pi]$

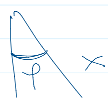
$\rho := \|P - O\| > 0$

$\varphi \in [0, 2\pi]$

(ρ, θ, φ) coordinate sferiche del punto P



Introduco un sistema di coordinate cartesiane ortogonali in cui l'origine coincide con O, l'asse z coincide con l'asse s, compreso il orientamento, la direzione positiva dell'asse x coincide con la semiretta r

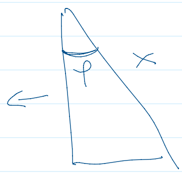


$z = \rho\cos\theta$ $\qquad \|P_\pi - O\| = \rho\sin\theta$

$z = \rho\cos\theta \qquad \|P_\pi - O\| = \rho\sin\theta$

$x = \rho\sin\theta\cos\varphi \qquad \rho > 0 \qquad \theta\in[0,\pi]$

$y = \rho\sin\theta\sin\varphi \qquad \varphi\in[0,2\pi]$



ESERCIZIO Scrivere come curva l'intersezione tra il piano $x=y$ e la sfera $x^2+y^2+z^2=4$

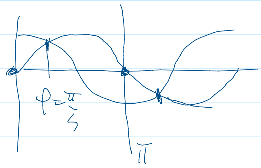
$$\begin{cases} x = \rho\sin\theta\cos\varphi \\ y = \rho\sin\theta\sin\varphi \\ z = \rho\cos\theta \end{cases} \qquad x^2+y^2+z^2=4 \qquad \rho^2=4,\ \rho>0 \Rightarrow \rho=2$$

$$\begin{cases} x = 2\sin\theta\cos\varphi \\ y = 2\sin\theta\sin\varphi \\ z = 2\cos\theta \end{cases} \qquad x=y \iff 2\sin\theta\cos\varphi = 2\sin\theta\sin\varphi$$

$$2\sin\theta(\cos\varphi-\sin\varphi)=0$$

$$\cos\varphi-\sin\varphi=0 \leftarrow$$

$(0,0,2)$ e $(0,0,-2)$



$\theta\in[0,2\pi]$

$\varphi=\frac{\pi}{4} \Rightarrow \cos\frac{\pi}{4}=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\begin{cases} x = \sqrt{2}\sin\theta \\ y = \sqrt{2}\sin\theta \qquad \theta\in[0,2\pi] \\ z = 2\cos\theta \end{cases}$$

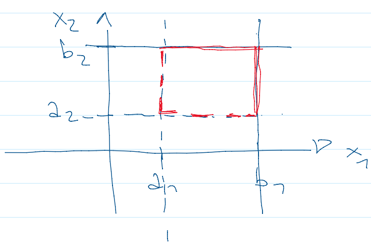
---

n-intervallo

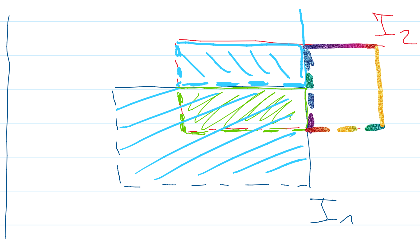
$a=(a_1,\dots,a_n),\ b=(b_1,\dots,b_n)\in\mathbb{R}^n \qquad a_i\le b_i \quad \forall i=1,\dots,n$

$I=\{x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n : \forall i=1,\dots,n \quad a_i < x_i \le b_i\}$

$n=2 \quad I=\{x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 : a_1<x_1\le b_1 \quad a_2<x_2\le b_2\}$



I si dice n-intervallo di estremi a e b.



$I_1\cap I_2$ è ancora un n-intervallo

$I_1\cup I_2$ è unione di un numero finito di n-intervalli

$I_1 \cup I_2$ è unione di un numero finito di n-intervalli

$I_1 \setminus I_2$ è unione di un numero finito di n intervalli

PROPOSIZIONE Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto qualsiasi.
Allora $\exists \{I_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ famiglia numerabile di n-intervalli, disgiunti due a due ($I_k \cap I_j = \emptyset$ se $k \neq j$) t.c. $A = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_k$

IDEA DELLA DIM

$\mathcal{J} = \{ I$ intervalli di estremi $a = (a_1 \_ a_n)$, $b = (b_1 \_ b_n)$ t.c. $I \subseteq A$, $a_i, b_i \in \mathbb{Q}$ $\forall i = 1 \_ n \}$

Si dimostra che $A = \bigcup_{I\in\mathcal{J}} I$. Li posso indicare come $\{I_k\}_{k\in\mathbb{N}}$

Pongo $J_k = I_k \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} I_j$ $\Rightarrow$ ciascun J_k è unione di un numero finito di n-intervalli disgiunti 2 e 2

Per costruzione sono disgiunti 2 e 2

e $\bigcup J_k = \bigcup I_k = A$

DEF Sia $I = \{ x \in \mathbb{R}^n : a_i < x_i \leq b_i \}$ l'n-intervallo di estremi
$a = (a_1 \_ a_n)$ e $b = (b_1 \_ b_n)$

Definisco VOLUME DI I $\prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$ Lo indico $\mathrm{vol}(I)$

$n=2$ $(b_1-a_1)(b_2-a_2)$ $n=3$ $(b_1-a_1)(b_2-a_2)(b_3-a_3)$

DEF Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un sottoinsieme qualsiasi

$$\inf \left\{ \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{vol}(I_k) : \{I_k\}_{k\in\mathbb{N}} \text{ famiglia numerabile di n-intervalli t.c. } E \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_k \right.$$

Questa quantità si dice MISURA ESTERNA DI E e si indica $\mathcal{L}^{n*}(E)$

PROPRIETÀ 1) $\mathcal{L}^{n*}(E)$ è ben definita $\forall E \subseteq \mathbb{R}^n$ e $\mathcal{L}^{n*}(E) \in [0, +\infty]$

2) MONOTONIA: se $E \subseteq F \Rightarrow \mathcal{L}^{n*}(E) \leq \mathcal{L}^{n*}(F)$

3) SUBADDITIVITÀ (NUMERABILE): $\forall \{E_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ famiglia di sottoinsiemi

2) MONOTONIA: se $E \subseteq F \Rightarrow \mathcal{L}^{n*}(E) \leq \mathcal{L}^{n*}(F)$

3) SUBADDITIVITÀ (NUMERABILE): $\forall \{E_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ famiglie di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$

$$\mathcal{L}^{n*}\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} E_j\right) \leq \sum_{j\in\mathbb{N}} \mathcal{L}^{n*}(E_j)$$

4) Se I è un n-intervallo $\Rightarrow \mathcal{L}^{n*}(I) = vol(I)$

5) $\mathcal{L}^{n*}(E) = \inf\{\mathcal{L}^{n*}(A) : A \text{ aperto t.c. } A \supseteq E\}$

6) $\mathcal{L}^{n*}(\phi) = 0$

7) $E \subseteq \mathbb{R}^n$ è un insieme discreto (cioè finito o numerabile), allora

$\mathcal{L}^{n*}(E) = 0 \leftarrow$

8) $\forall I$ n-intervallo $\mathcal{L}^{n*}(\partial I) = 0$

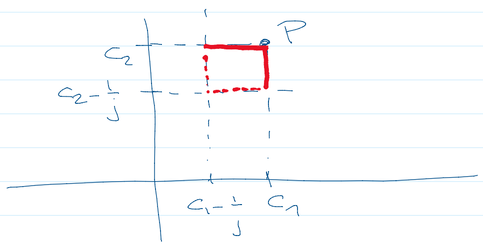
DIM $E = \{P_1 \ldots P_k\}$ $P_1 \ldots P_k \in \mathbb{R}^n$ $\{P_i\}_{i\in\mathbb{N}}$

$E = \bigcup_{i=1}^{k} \{P_i\}$ $E = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} P_i$ $\mathcal{L}^{n*}(E) \leq \sum \mathcal{L}^{n*}(\{P_i\})$

Basta far vedere che $\mathcal{L}^{n*}(\{P\}) = 0$ $\forall P \in \mathbb{R}^n$

$P = (c_1 \ldots c_n)$

$\forall j \in \mathbb{N}$ $I_j = \{x = (x_1 \ldots x_n) \in \mathbb{R}^n : c_i - \frac{1}{j} < x_i \leq c_i \quad \forall i = 1 \ldots n\}$



$\{P\} \subset I_j$

$vol(I_j) = \frac{1}{j} \cdot \frac{1}{j} = \frac{1}{j^2}$

$\mathcal{L}^{n*}(\{P\}) \leq vol(I_j) \quad \forall j \in \mathbb{N}$

$\mathcal{L}^{n*}(\{P\}) \leq \frac{1}{j^2} \quad \forall j \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \mathcal{L}^{n*}(\{P\}) = 0$

PROP (TEST DI CARATHÉODORY)

Siano $E, F \subseteq \mathbb{R}^n$ t.c. $\inf\{\|x-y\| \quad x \in E, y \in F\} > 0$

allora $\mathcal{L}^{n*}(E \cup F) = \mathcal{L}^{n*}(E) + \mathcal{L}^{n*}(F)$

PROPOSIZIONE Se $\{I_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ famiglia numerabile di n-intervalli a due a due disgiunti

Allora $\mathcal{L}^{n*}\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_k\right) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{L}^{n*}(I_k)$