lunedì 28 settembre 2020 11:02

FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI REALI

$f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

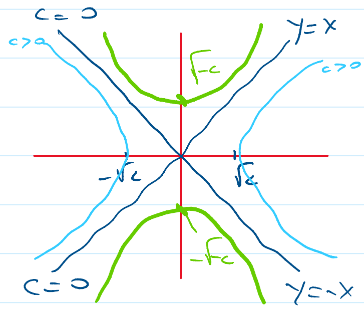
A si dice DOMINIO DI f

$Im(f) = \{ y \in \mathbb{R} : \exists x \in A : y = f(x) \}$

$c \in \mathbb{R}$ Insieme di livello c $L_c = \{ x \in A : f(x) = c \}$

Esempi $f(x,y) = x^2 - y^2$

$A = \mathbb{R}^2$ $c \in \mathbb{R}$ $\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = c \}$



1) $c = 0$ $x^2 - y^2 = 0$ $(x-y)(x+y) = 0$ $\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$

2) $c \neq 0$ $x^2 - y^2 = c$

$\frac{x^2}{c} - \frac{y^2}{c} = 1$

$c > 0$ $c = (\sqrt{c})^2$ $\frac{x^2}{(\sqrt{c})^2} - \frac{y^2}{(\sqrt{c})^2} = 1$

$c < 0$ $c = -(\sqrt{-c})^2$ $x^2 - y^2 = c$

$x^2 - y^2 = -(\sqrt{-c})^2$

$\frac{x^2}{(\sqrt{-c})^2} - \frac{y^2}{(\sqrt{-c})^2} = -1$

$f(x,y) = x^2 + y^2$ $A = \mathbb{R}^2$

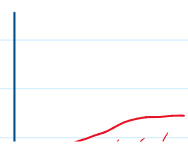
$c \in \mathbb{R}$ $L_c = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = c \}$

$c < 0$ $L_c = \emptyset$

$c = 0$ $(x,y) = (0,0)$ $L_c = \{(0,0)\}$

$c > 0$ $x^2 + y^2 = c$ è l'equazione della circonferenza centrata nell'origine e raggio $\sqrt{c}$

$f(x,y) = \sqrt{x - y^2}$

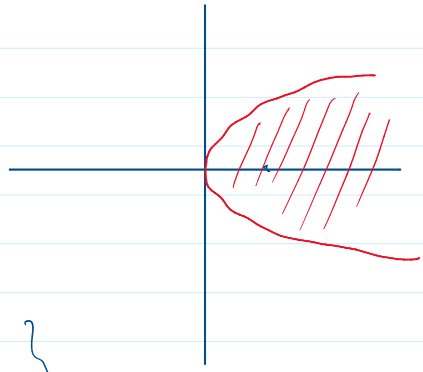


$A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x - y^2 \geq 0 \}$

$$A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x - y^2 \geq 0 \}$$

$$x - y^2 \geq 0 \qquad x \geq y^2$$

$$x = y^2$$

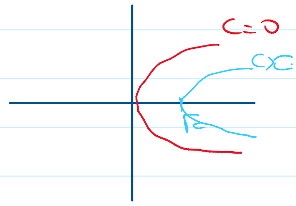


$$c \in \mathbb{R} \quad L_c = \{ (x,y) \in A : \sqrt{x - y^2} = c \}$$

$$= \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x - y^2 \geq 0 \ , \sqrt{x - y^2} = c \}$$

$$c < 0 \quad L_c = \emptyset$$

$$c = 0 \quad L_c = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x - y^2 \geq 0, \quad x - y^2 = 0 \}$$



$$c > 0 \quad L_c = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x - y^2 \geq 0 \quad x - y^2 = c^2 \}$$

$$x = y^2 + c^2$$

Intorno sferico (palla)

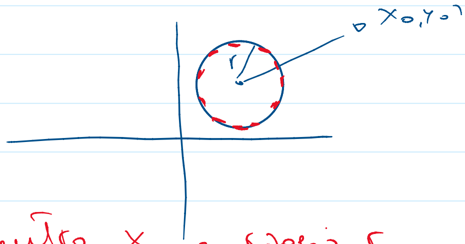
Sia $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, $r \in \mathbb{R}$ $r > 0$. Chiamo intorno sferico di CENTRO x_0 e RAGGIO r

$$\{ x \in \mathbb{R}^n : \| \underline{x} - \underline{x}_0 \| < r \} =: B(\underline{x}_0, r)$$

$\underline{n=2}$ $\underline{x} = (x,y)$ $\underline{x}_0 = (x_0, y_0)$

$$\| \underline{x} - \underline{x}_0 \| = \| (x - x_0, y - y_0) \| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < r$$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2$$



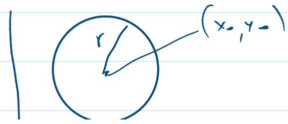
Palla chiusa o disco di centro $\underline{x}_0$ e raggio r

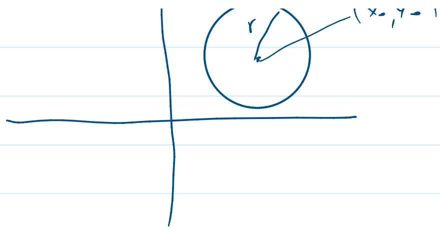
$r > 0$

$$\{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n : \| \underline{x} - \underline{x}_0 \| \leq r \} =: D(\underline{x}_0, r)$$

$$n = 2 \qquad \underline{x} = (x,y) \qquad \underline{x}_0 = (x_0, y_0)$$

$$\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \leq r^2 \qquad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq r^2$$





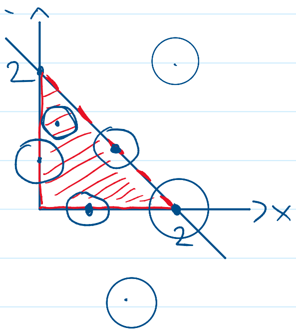
$E \subseteq \mathbb{R}^n$ $\quad \underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$

DEF Dico che $\underline{x}_0$ è interno ad E se $\exists B(\underline{x}_0, r)$, $r>0$ t.c. $B(\underline{x}_0, r) \subset E$

Dico che $\underline{x}_0$ è esterno ad E se $\exists B(\underline{x}_0, r)$, $r>0$ t.c. $B(\underline{x}_0, r) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus E$

Dico che $\underline{x}_0$ è un p.to di frontiera di E se $\forall r>0$ $\quad B(\underline{x}_0, r)$ contiene sia p.ti di E che p.ti di $\mathbb{R}^n \setminus E$

$E = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x \geq 0, \ y \geq 0, \ x+y<2 \}$



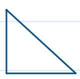
$x + y = 2$

$y = 2 - x \qquad y < 2 - x$

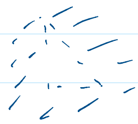
(x_0, y_0)

I p.ti interni sono i p.ti del triangolo esclusi i suoi lati

I p.ti di frontiera sono i lati del triangolo, vertici compresi



I p.ti esterni sono i p.ti che non appartengono al triangolo



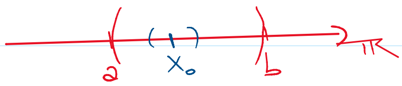
L'insieme dei p.ti interni ad un insieme E si chiama INTERNO DI E $\quad E$, $\operatorname{int}(E)$ $\qquad$ N.B. $\operatorname{int}(E) \subseteq E$

L'insieme dei p.ti esterni ad un insieme E si chiama ESTERNO DI E $\quad \operatorname{ext}(E)$ $\qquad$ N.B. $\operatorname{ext}(E) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus E$

L'insieme dei p.ti di frontiera di E si chiama FRONTIERA DI E $\quad \partial E$

DEF $E \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice APERTO se ogni suo p.to è interno ad E cioè se $E = \operatorname{int}(E)$

cioè se $E = \text{int}(E)$



$x \in \mathbb{R} : \|x - x_0\| < r$

$\|x-x_0\| = |x - x_0|$

DEF $E \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice CHIUSO se il suo complementare è aperto

PROPOSIZIONE $E \subseteq \mathbb{R}^n$ è chiuso SSE $\partial E \subset E$

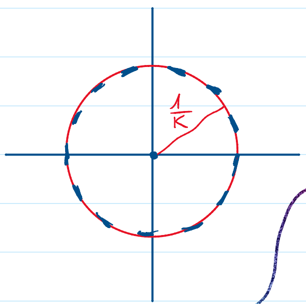
DEF Se $E \subseteq \mathbb{R}^n$ l'insieme $E \cup \partial E$ si dice CHIUSURA DI E
Si indica $\overline{E}$

PROPOSIZIONE $\forall E \subseteq \mathbb{R}^n$: $\overline{E}$ è chiuso, $\text{int}(E)$ è aperto $\text{int}(E) \subseteq E \subseteq \overline{E}$

TEOREMA L'unione di una qualsiasi famiglia di aperti è un aperto
L'intersezione di un <u>numero finito</u> di aperti è un aperto

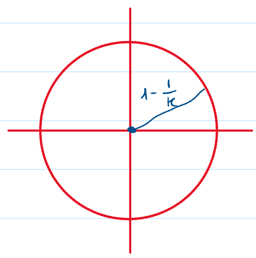
L'intersezione di una qualsiasi famiglia di chiusi è un chiuso
L'unione di un <u>numero finito</u> di chiusi è un chiuso

Controesempi $E_k = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < \frac{1}{k}\}$ $k \in \mathbb{N}$

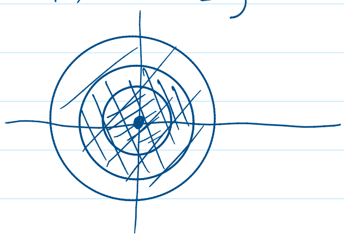


$\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k = \{(0,0)\}$ NON È APERTO

$E_k = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1 - \frac{1}{k}\}$ $k \in \mathbb{N}$



$\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$



$\underbrace{\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k}_{\text{unione di chiusi}} = \underbrace{\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\}}_{\text{aperto } B(0,1)}$

$A = B$ $A \subseteq B$ $B \subseteq A$

① $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \subseteq B(0,1)$ ② $B(0,1) \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$

$x \in \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \quad \exists \bar{k}$ T.c. $x \in E_{\bar{k}}$

$\exists \bar{k}$ T.c. $\|x\| \leq 1 - \frac{1}{\bar{k}} < 1$

$\Rightarrow \quad x \in B(0,1)$

$\Rightarrow \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \subset B(0,1)$

$\rightarrow x \in B(0,1) \quad \|x\| < 1$

$\exists \varepsilon > 0$ T.c. $\|x\| = 1 - \varepsilon$

$x \in E_{\bar{k}}$ $\exists \bar{k}$ T.c. $\|x\| \leq 1 - \frac{1}{\bar{k}}$?

$\|x\| \leq 1 - \frac{1}{\bar{k}}$ SSE $1 - \varepsilon \leq 1 - \frac{1}{\bar{k}}$

SSE $\frac{1}{\bar{k}} \leq \varepsilon$ SSE $\bar{k} \geq \frac{1}{\varepsilon}$

Se io considero $\bar{k} = 1 + \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor$

sicuramente $x \in E_{\bar{k}} \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ ⟵ $\uparrow \lfloor \ \rfloor$

cioè $B(0,1) \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$

— o —

SUCCESSIONI IN $\mathbb{R}^n$

$\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ T.c. $x_k \in \mathbb{R}^n \ \forall k \in \mathbb{N}$ si dice successione in $\mathbb{R}^n$

$x_k = (x_k^1, x_k^2, \ldots, x_k^n) \qquad x_k^i \in \mathbb{R} \quad \forall i = 1 \ldots n \quad \forall k \in \mathbb{N}$

Sia $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ successione in $\mathbb{R}^n$ e sia $x_0 \in \mathbb{R}^n$

Dico che x_k converge a x_0 per $k \to \infty$ e scrivo $\lim_{k \to \infty} x_k = x_0$

se

SSE $\lim_{k \to \infty} \|x_k - x_0\| = 0$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{k} \in \mathbb{N}$ T.c. $\forall k > \bar{k} \quad \|x_k - x_0\| < \varepsilon$ ⟵

$\|x_k - x_0\| \qquad x_k = (x_k^1, x_k^2, \ldots x_k^n) \qquad x_0 = (x_0^1, x_0^2, \ldots x_0^n)$

$\|x_k - x_0\| = \sqrt{(x_k^1 - x_0^1)^2 + (x_k^2 - x_0^2)^2 + \ldots + (x_k^n - x_0^n)^2}$

x_k converge a x_0 SSE $\forall i = 1 \ldots n \quad x_k^i \to x_0^i$

SSE $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{k} \in \mathbb{N}$ T.c. $\forall k > \bar{k} \quad x_k \in B(x_0, \varepsilon)$

LIMITE DI FUNZIONE

Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ e sia $f: E \to \mathbb{R}$. Sia $x_0 \in \bar{E}$ e sia $L \in \mathbb{R}$

Dico che

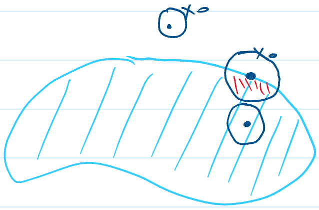
$\lim f(x) = L$

Dico che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ t.c. $\forall x \in \underbrace{E \cap B(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}}_{\neq \emptyset \ \forall \delta > 0}$ si ha

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$



TEOREMA (nodimostrato) Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$, sia $x_0 \in \bar{E}$ e sia $f : E \to \mathbb{R}$

Allora $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$

SSE $\forall \{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ $x_k \in E$ e t.c. $\lim_{k \to \infty} x_k = x_0$ si ha

$$\lim_{k \to \infty} f(x_k) = L$$

Dico che $\lim_{x \to x_0} f(x) = \underset{-\infty}{+\infty}$ se

$\forall M \in \mathbb{R}$ $\exists \delta > 0$ t.c. $\forall x \in E \cap B(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}$ si ha $\underset{f(x) < M}{f(x) > M}$

PROPRIETÀ

- Unicità del limite
- Algebra dei limiti

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \qquad \lim_{x \to x_0} g(x) = M$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \pm g(x) = L \pm M$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) g(x) = LM$$

$$\text{se } M \neq 0 \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$$

- Teorema del confronto : Se $\exists r > 0$ t.c. $\forall x \in E \cap B(x_0, r) \setminus \{x_0\}$ si ha $f(x) \leq g(x)$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \leq \lim_{x \to x_0} g(x)$$

FUNZIONI CONTINUE

FUNZIONI CONTINUE

Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$, sia $f: E \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in E$

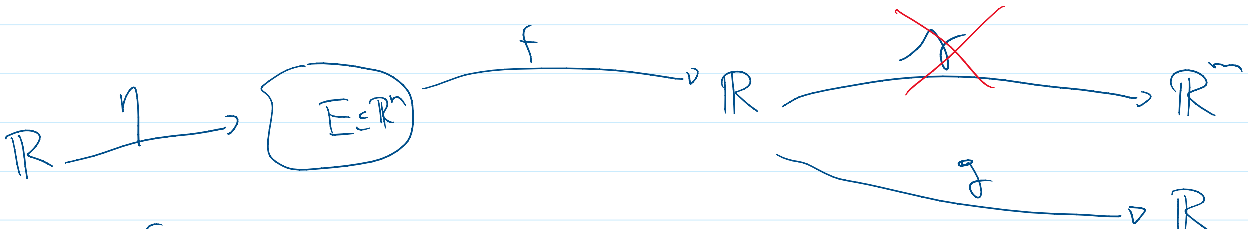
Dico che f è continua in x_0 se $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Dico che f è continua in E se è continua in ogni pto $x_0 \in E$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ t.c. $\forall x \in E \cap B(x_0, \delta) \cancel{\setminus \{x_0\}}$ $\quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

PROPRIETÀ

- Algebra delle funzioni continue
- Continuità della composizione



$f \circ \eta$ è continua $\qquad g \circ f : E \to \mathbb{R}$ è continua

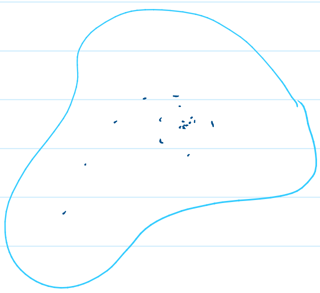
$\cancel{\gamma \circ f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n}$

ESEMPIO

$f(x,y) = x^2 - y$

$f_1(x,y) = x^2 \qquad f_2(x,y) = y \qquad f = f_1 - f_2$

TEOREMA Sia $E \subset \mathbb{R}^n$. E è chiuso SSE per ogni successione $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ t.c. $x_k \in E \ \forall k \in \mathbb{N}$ t.c. x_k converge, allora il limite della successione è un pto di E



DIM E chiuso, dimostro che E contiene i limiti di successioni

Sia $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset E$ t.c. $\exists \lim_{k \to +\infty} x_k =: x_0$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{k} = \bar{k}(\varepsilon)$ t.c. $\forall k > \bar{k}$ $\quad x_k \in B(x_0, \varepsilon)$

$\|x_k - x_0\| < \varepsilon$

Per assurdo: $x_0 \notin E$

$\Rightarrow x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus E$ che è aperto $\Rightarrow$

$\exists r > 0$ t.c. $B(x_0, r) \subset \mathbb{R}^n \setminus E$

Scelgo $\varepsilon = r$

$\exists \bar{k}$ t.c. $\forall k > \bar{k}$ $\quad x_k \in B(x_0, r) \subset \mathbb{R}^n \setminus E$

$\Rightarrow \forall k > \bar{k}$ $\quad x_k \notin E$: ASSURDO

② E contiene i pti limite $\Rightarrow$ E è chiuso

Mostro che $\mathbb{R}^n \setminus E$ è aperto

Sia $\bar{x} \in \mathbb{R}^n \setminus E$: $\exists \bar{r}$ t.c. $B(\bar{x}, \bar{r}) \subset \mathbb{R}^n \setminus E$

Per assurdo

$\forall r > 0 \quad B(\bar{x}, r) \not\subset \mathbb{R}^n \setminus E$

$\forall r > 0 \quad B(\bar{x}, r) \cap E \neq \emptyset$

$r = 1 : \quad \exists x_1 \in B(\bar{x}, 1) \cap E$

$r = \frac{1}{2} \quad \exists x_2 \in B(\bar{x}, \frac{1}{2}) \cap E$

$\vdots$

$r = \frac{1}{k} \quad k \in \mathbb{N} \qquad \exists x_k \in B(\bar{x}, \frac{1}{k}) \cap E$

$\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset E \qquad \|x_k - \bar{x}\| < \frac{1}{k} \qquad \lim_{k \to \infty} x_k = \bar{x} \notin E$

ASSURDO

TEOREMA DI PERMANENZA DEL SEGNO

Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ e sia $f : E \to \mathbb{R}$. Sia $x_0 \in \bar{E}$ e supponiamo che esiste $\lim_{x \to x_0} f(x) \quad (= L \in \mathbb{R}, +\infty, -\infty)$

1) Se il valore del limite è $L > 0$ o $+\infty$ allora $\exists r > 0$ t.c.

$$f(x) > 0 \qquad \forall x \in E \cap B(x_0, r) \setminus \{x_0\}$$

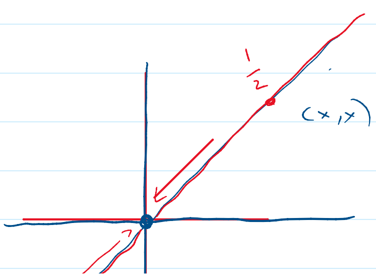
2) Se $\exists r > 0$ t.c. $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in E \cap B(x_0, r) \setminus \{x_0\}$ allora il limite è $+\infty$ o un $L \geq 0$

COROLLARIO Sia $f : E \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, sia $x_0 \in E$ e supponiamo che f sia continua in x_0. Allora

1) Se $f(x_0) > 0 \Rightarrow \exists r > 0$ t.c. $f(x) > 0 \quad \forall x \in E \cap B(x_0, r)$

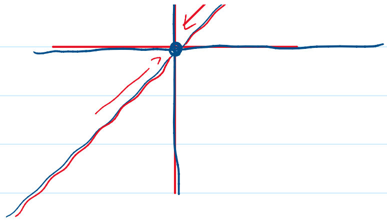
2) Se $\exists r > 0$ t.c. $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in E \cap B(x_0, r) \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x_0) \geq 0$

ESEMPIO
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$



$f(x, 0) \quad \forall x \neq 0$

$f(x,0) = \frac{x \cdot 0}{?} = \frac{0}{} = 0$



$$f(x,0)=\frac{x\cdot 0}{x^2+0}=\frac{0}{x^2}=0$$

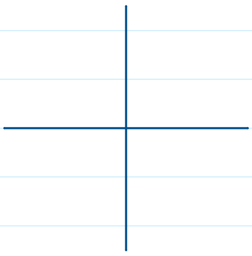
$f(0,y)$ $\quad y\neq 0$

$$f(0,y)=\frac{0\cdot y}{0+y^2}=\frac{0}{y^2}=0$$

$$f(x,x)=\frac{x\cdot x}{x^2+x^2}=\frac{x^2}{2x^2}=\frac{1}{2}$$

$c\in\mathbb{R}$ $\quad L_c=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : f(x,y)=c\}$

$c=0$ $\quad (x,y)\in L_0$ $\quad (x,y)\neq(0,0)$ t.c. $xy=0$

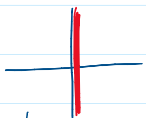


$c\neq 0$ $\quad L_c=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\} : \frac{xy}{x^2+y^2}=c\right\}$

$$\frac{xy}{x^2+y^2}=c \qquad c(x^2+y^2)-xy=0$$

$$cy^2-xy+cx^2=0$$

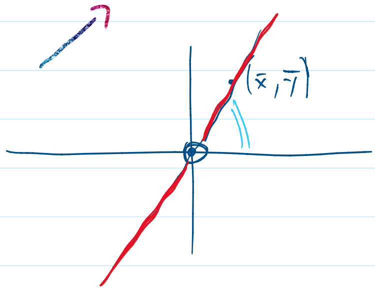
$(x,y)\in L_c$ $\quad c\neq 0$



$$c\left(\frac{y}{x}\right)^2-\frac{y}{x}+c=0$$

se $(\bar{x},\bar{y})\in L_c \Rightarrow (\lambda\bar{x},\lambda\bar{y})\in L_c$ $\quad \lambda\neq 0$

$(\lambda\bar{x},\lambda\bar{y}) = \lambda(\bar{x},\bar{y})$



$\frac{y}{x}=:m$ $\qquad cm^2-m+c=0$

$\Delta=1-4c^2$

$1-4c^2<0$ $\quad$ ∄ soluzione $\longrightarrow 4c^2>1$ $\quad c^2>\frac{1}{4}$ $\quad c>\frac{1}{2}$, $c<-\frac{1}{2}$

$1-4c^2=0$ $\quad$ ∃! soluzione $\quad c^2=\frac{1}{4}$ $\quad c=\frac{1}{2}$, $c=-\frac{1}{2}$

$1-4c^2>0$ $\quad$ ∃ 2 soluzioni reali distinte

$c<-\frac{1}{2}$ o $c>\frac{1}{2}$ $\qquad L_c=\emptyset$

$c = \frac{1}{2}$ $\quad \frac{m^2}{2} - m + \frac{1}{2} = 0 \quad \frac{1}{2}(m^2 - 2m + 1) = 0$

$\frac{1}{2}(m-1)^2 = 0 \quad m = 1$

$$L_{\frac{1}{2}} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} : y = x\}$$

$c = -\frac{1}{2}$ $\quad -\frac{1}{2}m^2 - m - \frac{1}{2} = 0 \quad -\frac{1}{2}(m^2 + 2m + 1) = 0$

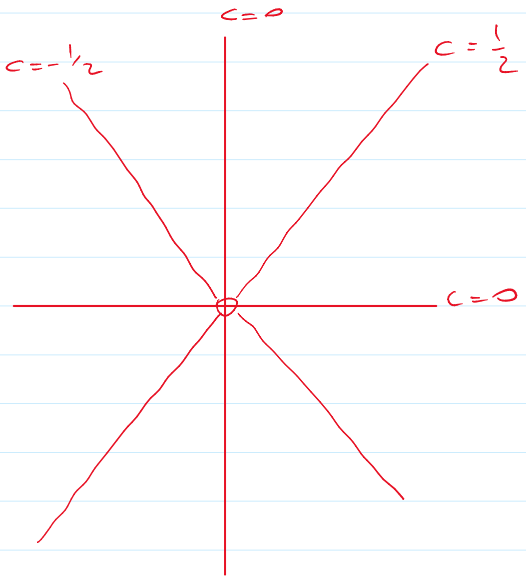
$-\frac{1}{2}(m+1)^2 = 0 \quad m = -1$

$$L_{-\frac{1}{2}} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} : y = -x\}$$

$c \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ $\quad cm^2 - m + c = 0 \quad \Delta = 1 - 4c^2$

$$m_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4c^2}}{2c}$$

$$L_c = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} : y = \frac{1+\sqrt{1-4c^2}}{2c}x \text{ o } y = \frac{1-\sqrt{1-4c^2}}{2c}x\}$$



$at^2 + bt + c = 0$

$a \neq 0 \quad D > 0$

$\underbrace{a \quad b}\underbrace{\quad c}$

$cm^2 - m + c = 0$

$c \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ $\quad + \quad - \quad +$

$m_1 > 0$

$m_2 > 0$

$c \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ $\quad - \quad - \quad -$

$m_1 < 0$

$m_2 < 0$