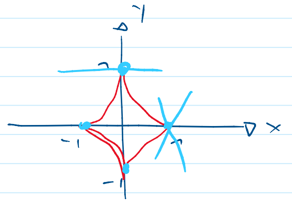
venerdì 25 settembre 2020 09:57

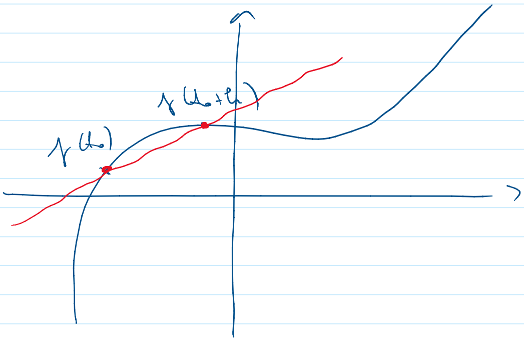
I intervallo, $\gamma : t \in I \mapsto \gamma(t) \in \mathbb{R}^m$, $t_0 \in I$

$$\gamma'(t_0) := \lim_{t \to t_0} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0}$$ se questo limite esiste finito

$\gamma' : t \in I \mapsto \gamma'(t) \in \mathbb{R}^m$ funzione derivata

ES. ASTROIDE $\quad \gamma \begin{cases} x(t) = \cos^3(t) \\ y(t) = \sin^3(t) \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$





$\gamma : t \in I \mapsto \gamma(t) \in \mathbb{R}^n$

t_0, $t_0 + h$

DIREZIONE $v_h = \dfrac{\gamma(t_0+h) - \gamma(t_0)}{\|\gamma(t_0+h) - \gamma(t_0)\|}$

$v_h \parallel \gamma(t_0+h) - \gamma(t_0)$

La retta secante è parallela a $\gamma(t_0+h) - \gamma(t_0)$ $\Rightarrow$ è anche parallela a $\dfrac{\gamma(t_0+h) - \gamma(t_0)}{h}$ $\forall h \neq 0$

$$\frac{\gamma(t_0+h) - \gamma(t_0)}{h} \to \gamma'(t_0)$$

Se $\gamma'(t_0) \neq 0$ viene individuata una direzione limite alla direzione delle rette secanti che è $\dfrac{\gamma'(t_0)}{\|\gamma'(t_0)\|} =: T(t_0)$ VERSORE TANGENTE AL SOSTEGNO IN t_0

DEF Sia $I \subset \mathbb{R}$ intervallo. Se $\gamma : t \in I \mapsto \gamma(t) \in \mathbb{R}^n$ è t.c.

1) $\gamma(t) \in C^1$ (γ è derivabile e γ' è una funzione continua)

2) $\forall t \in I$ $\gamma'(t) \neq 0$,

dico che γ è un ARCO DI CURVA REGOLARE

Se γ è regolare $\Rightarrow$ è ben definito $T(t) := \dfrac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$ $\forall t \in I$

Se fisso $t_0 \in I$ $\Rightarrow$ è ben definita la retta tangente al sostegno in $\gamma(t_0)$:

Retta per $\gamma(t_0)$ e parallela a $T(t_0)$

$x \in \mathbb{R}^m : \quad x - \gamma(t_0) \parallel T(t_0)$

$x \in \mathbb{R}^m : \quad \exists \lambda \in \mathbb{R} \quad x - \gamma(t_0) = \lambda T(t_0)$

$x \in \mathbb{R}^m : \quad x - \gamma(t_0) \parallel T(t_0)$

$x \in \mathbb{R}^m : \quad \exists \lambda \in \mathbb{R}$ t.c. $x - \gamma(t_0) = \lambda T(t_0)$

$$x = \gamma(t_0) + \lambda T(t_0) \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$x = \gamma(t_0) + \lambda \frac{\gamma'(t_0)}{\|\gamma'(t_0)\|}$$

$$\tau := \frac{\lambda}{\|\gamma'(t_0)\|} \qquad \boxed{x = \gamma(t_0) + \tau \gamma'(t_0)}$$

ESEMPIO Circonferenza centrata in $(5,3)$ e raggio 5

$$\gamma \begin{cases} x = 5 + 5\cos(t) \\ y = 3 + 5\sin(t) \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi)$$

Scrivere la retta Tg al sostegno in $\gamma\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$$\gamma\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(5 + 5 \cdot \frac{1}{2},\ 3 + 5\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\frac{15}{2},\ \frac{6 + 5\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\gamma' = \begin{cases} x' = -5\sin(t) \\ y' = 5\cos(t) \end{cases}$$

$$\gamma'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(-5\frac{\sqrt{3}}{2}, 5\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{-5\sqrt{3}}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 15/2 \\ \frac{6+5\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \tau \begin{pmatrix} -\frac{5\sqrt{3}}{2} \\ 5/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = \frac{15}{2} - \tau \frac{5\sqrt{3}}{2} \\ y = \frac{6 + 5\sqrt{3}}{2} + \tau \frac{5}{2} \end{cases} \qquad \tau \in \mathbb{R}$$

$$\frac{2}{5}\left(y - \frac{6 + 5\sqrt{3}}{2}\right) = \tau \frac{\cancel{5}}{\cancel{2}} \frac{\cancel{2}}{\cancel{5}}$$

$$x = \frac{15}{2} - \frac{\cancel{5}\sqrt{3}}{\cancel{2}} \frac{\cancel{2}}{\cancel{5}} \left(y - \frac{6 + 5\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\frac{-x}{\sqrt{3}} = \frac{15}{2\sqrt{3}} - y + \frac{6 + 5\sqrt{3}}{2}$$

$$15 = 3 \cdot 5 = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot 5$$

$$y = \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{\overset{5\sqrt{3}}{\cancel{15}}}{2\cancel{\sqrt{3}}} + \frac{6 + 5\sqrt{3}}{2}$$

$$y = \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{10\sqrt{3} + 6}{2} \qquad y = \frac{x}{\sqrt{3}} + 5\sqrt{3} + 6$$

DEF ARCO DI CURVA REGOLARE A TRATTI

Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo e sia $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$.

Dico che γ è un arco di curva regolare a tratti se:

1) γ è continua su I

2) $\exists$ dei pti $\inf(I) = t_1 < t_2 < \dots < t_k = \sup(I) \in I$ t.c. γ è regolare in ciascun intervallo (t_i, t_{i+1}) $\forall i = 1, \dots, k-1$

ASTROIDE

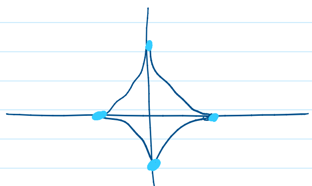
$$\gamma(t) \begin{cases} x(t) = \cos^3(t) \\ y(t) = \sin^3(t) \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$\gamma'(t) = \left(-3\cos^2(t)\sin(t),\ 3\sin^2(t)\cos(t)\right)$$

$\gamma'(t) = 0$ SSE $\|\gamma'(t)\| = 0$

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{9\cos^4(t)\sin^2(t) + 9\sin^4(t)\cos^2(t)} =$$

$$= \sqrt{9\cos^2(t)\sin^2(t)\left(\underbrace{\cos^2(t) + \sin^2(t)}_{=1}\right)} = 3\left|\cos(t)\sin(t)\right|$$



—— o ——

INTEGRALE DI UNA FUNZIONE A VALORI VETTORIALI

$\gamma : t \in [a,b] \mapsto \gamma(t) \in \mathbb{R}^n$

$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots, \gamma_n(t))$

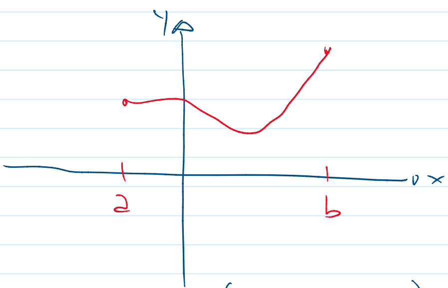
$$\int_a^b \gamma(t)\,dt := \left(\int_a^b \gamma_1(t)\,dt,\ \int_a^b \gamma_2(t)\,dt,\ \dots\ \int_a^b \gamma_n(t)\,dt\right)$$

PROPRIETÀ $\quad \left\|\int_a^b \gamma(t)\,dt\right\| \le \int_a^b \|\gamma(t)\|\,dt$

—— o ——

GRAFICO DI FUNZIONE

$f : x \in [a,b] \mapsto f(x) \in \mathbb{R}$



$$\gamma(t) \begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases} \quad t \in [a,b]$$

Supponiamo che f sia derivabile con derivata continua

$$\gamma'(t) = (1, f'(t)) \neq 0 \quad \forall t \in [a,b]$$

$$\gamma'(t) = (1, f'(t)) \neq 0 \quad \forall t \in [a,b]$$

$$\gamma(a) = (a, f(a)) \qquad \gamma(b) = (b, f(b))$$

$a \neq b \quad \gamma(a) \neq \gamma(b) \implies$ non è chiusa

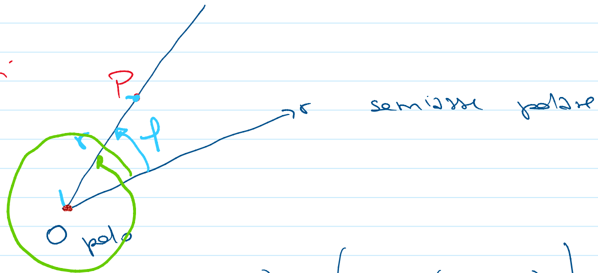
$$a \leq t_1 < t_2 \leq b \qquad \gamma(t_1) = (t_1, f(t_1))$$
$$\gamma(t_2) = (t_2, f(t_2))$$

$t_1 \neq t_2 \implies \gamma(t_1) \neq \gamma(t_2) \implies \gamma$ è semplice

— o —

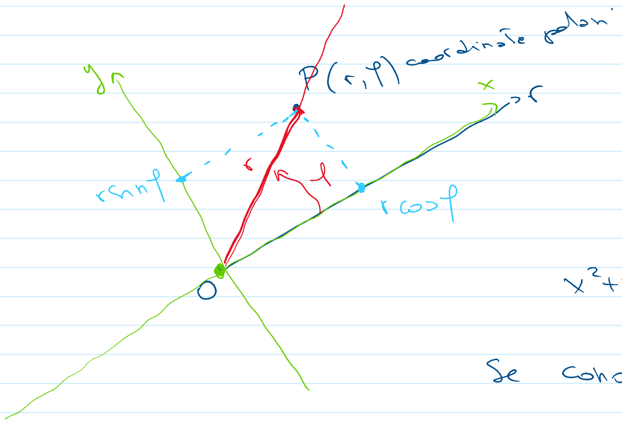
CURVE IN FORMA POLARE

Coordinate polari



$P(r, \varphi)$ $\qquad \varphi \in [0, 2\pi) \quad \left(\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right]\right)$

$r > 0$



(r, φ) $\qquad x = r\cos\varphi$

(x, y) $\qquad y = r\sin\varphi$

$$x^2 + y^2 = (r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2 = r^2$$

Se conosco (x,y) ricavo subito

$$r = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\underbrace{\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}} \qquad \underbrace{\sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}$$

$\implies$ Se conosco le coordinate cartesiane so ricavare le coordinate polari

CURVA IN FORMA POLARE

$\rho = f(\theta)$ $\qquad \theta \in [\theta_1, \theta_2]$ indica la coordinata angolare

$\rho = f(\theta)$ indica la distanza dal polo

$$\gamma(\theta) = \begin{cases} x = f(\theta)\cos(\theta) \end{cases} \qquad \theta \in [\theta_1, \theta_2]$$

$$\gamma(\theta) = \begin{cases} x = f(\theta)\cos(\theta) \\ y = f(\theta)\sin(\theta) \end{cases} \qquad \theta \in [\theta_1, \theta_2)$$

f sia derivabile con derivata continua

$$\gamma'(\theta) = \left(f'(\theta)\cos(\theta) - f(\theta)\sin(\theta),\ f'(\theta)\sin(\theta) + f(\theta)\cos(\theta) \right)$$

$$\|\gamma'(\theta)\| = \sqrt{\left(f'(\theta)\cos(\theta) - f(\theta)\sin(\theta)\right)^2 + \left(f'(\theta)\sin(\theta) + f(\theta)\cos(\theta)\right)^2}$$

$$= \Big((f'(\theta))^2\cos^2(\theta) + f^2(\theta)\sin^2(\theta) \cancel{- 2f(\theta)f'(\theta)\sin(\theta)\cos\theta} +$$
$$+ (f'(\theta))^2\sin^2(\theta) + f^2(\theta)\cos^2(\theta) \cancel{+ 2f(\theta)f'(\theta)\sin(\theta)\cos(\theta)} \Big)^{1/2}$$

$$= \sqrt{(f'(\theta))^2 + f^2(\theta)} = 0 \quad \text{SSE} \quad \boxed{f(\theta) = f'(\theta) = 0}$$

$\rho = f(\theta) \qquad \theta \in [\theta_1, \theta_2]$

$P(\rho, \theta)$ CHIUSA SSE $\theta_2 - \theta_1 = 2k\pi$ e $f(\theta_1) = f(\theta_2)$

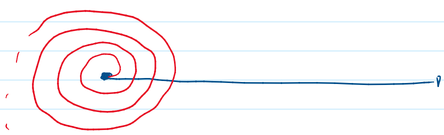
SEMPLICE?

Non è semplice sse $\exists\, \varphi_1, \varphi_2 \in [\theta_1, \theta_2]$ $\varphi_1 \neq \varphi_2$ e non $\varphi_1 = \theta_1$ $\varphi_2 = \theta_2$ t.c.

$$\varphi_2 - \varphi_1 = 2k\pi$$
$$f(\varphi_2) = f(\varphi_1)$$

SPIRALE DI ARCHIMEDE

$A > 0 \qquad \rho = A\theta \qquad \theta \in [0, +\infty)$



$$\gamma(\theta) \begin{cases} x(\theta) = A\theta\cos(\theta) \\ y(\theta) = A\theta\sin(\theta) \end{cases}$$

$$\rightarrow \gamma'(\theta) = \left(A\cos(\theta) - A\theta\sin(\theta),\ A\sin(\theta) + A\theta\cos(\theta) \right)$$

$$\|\gamma'(\theta)\| = \sqrt{f^2(\theta) + (f'(\theta))^2} \qquad f(\theta) = A\theta \qquad f'(\theta) = A$$

$$= \sqrt{A^2\theta^2 + A^2} = |A|\sqrt{\theta^2 + 1} = A\sqrt{\theta^2 + 1}$$

$$T(\theta) = \frac{\cancel{A}\left(\cos(\theta) - \theta\sin(\theta),\ \sin(\theta) + \theta\cos(\theta) \right)}{\cancel{A}\sqrt{\theta^2 + 1}}$$

—— o ——

LUNGHEZZA DI UN ARCO DI CURVA

$\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ arco di curva continua

$\gamma(a) = \gamma(t_0)$

Sa $t_0 = a < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$ dico che $t_0, t_1 \dots t_n$ è una partizione di $[a,b]$

Indico con P una generica partizione

LUNGHEZZA DELLA SPEZZATA ASSOCIATA ALLA PARTIZIONE P

$$L(P) := \sum_{i=1}^{n} \| \gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}) \|$$

Considero $\sup \{ L(P) : P \text{ partizione di } [a,b] \}$

Se questo estremo superiore è finito, lo chiamo LUNGHEZZA DELLA CURVA γ e dico che γ è una curva rettificabile.

TEOREMA (no dim) Sia $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ una curva regolare. Allora γ è rettificabile e la sua lunghezza $\ell(\gamma)$ è

$$\int_a^b \| \gamma'(t) \| \, dt .$$

LUNGHEZZA DI UN GRAFICO

$y = f(x)$ $x \in [a,b]$ derivabile con derivata continua

$\gamma \begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases}$ $t \in [a,b]$

$\gamma'(t) = (1, f'(t))$ $\quad \| \gamma'(t) \| = \sqrt{1 + (f'(t))^2}$

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2} \, dt$$

LUNGHEZZA DI UNA CURVA IN FORMA POLARE

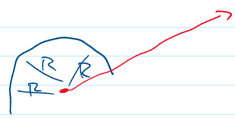
$\rho = f(\theta)$ $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ f derivabile con derivata continua

$\gamma \begin{cases} x = f(\theta)\cos(\theta) \\ y = f(\theta)\sin(\theta) \end{cases}$ $\quad \| \gamma'(\theta) \| = \sqrt{(f'(\theta))^2 + f^2(\theta)}$

$$\ell(\gamma) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{(f'(\theta))^2 + f^2(\theta)} \, d\theta$$

— o —

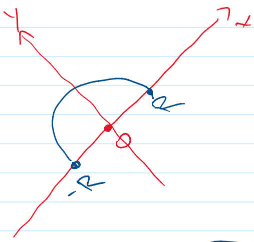
Semicirconferenza di raggio $R > 0$



$\rho = R \qquad \theta \in [0, \pi]$

$f(\theta) = R \qquad \theta \in [0,\pi] \qquad \Rightarrow \quad f'(\theta) = 0$

$$\ell(\gamma) = \int_0^{\pi} \sqrt{0 + R^2}\, d\theta = \int_0^{\pi} R\, d\theta = R\pi \qquad \Leftarrow$$



$$(x,y) : \begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

$y^2 = R^2 - x^2 \qquad y = \sqrt{R^2 - x^2}$

$f(x) = \sqrt{R^2 - x^2} \qquad x \in [-R, R]$

$$f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{R^2-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

$$\ell(\gamma) = \int_{-R}^{R} \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}\right)^2}\, dx = \int_{-R}^{R} \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2-x^2}}\, dx$$

$$= \int_{-R}^{R} \sqrt{\frac{R^2}{R^2-x^2}}\, dx = R \int_{-R}^{R} \frac{1}{\sqrt{R^2-x^2}}\, dx$$

$x = R\sin(u) \quad u \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad R^2 - x^2 = R^2 - R^2\sin^2(u) =$

$= R^2(1 - \sin^2(u)) = R^2\cos^2(u)$

$\sqrt{R^2-x^2} = R\,|\cos(u)|$

$dx = R\cos(u)\, du$

$$\Rightarrow \ell(\gamma) = R \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{\cancel{R|\cos(u)|}} \cancel{R\cos(u)}\, du = R\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1\, du = R\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = R\pi$$

$\cancel{\cos(u)}$

ELICA CILINDRICA

$$\gamma \begin{cases} x = R\cos(t) \\ y = R\sin(t) \\ z = ht \end{cases} \qquad t \in [\alpha, \beta] \qquad R, h > 0$$

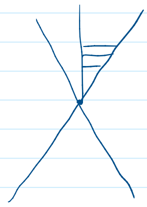
$\gamma'(t) = (-R\sin(t),\ R\cos(t),\ h)$

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{\underbrace{R^2\sin^2(t) + R^2\cos^2(t)}_{R^2} + h^2} = \sqrt{R^2 + h^2}$$

β

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{R^2}$$

$$\ell(\gamma) = \int_\alpha^\beta \sqrt{R^2 + h^2}\, dt = (\beta - \alpha)\sqrt{R^2+h^2}$$



$$x = Rt\cos(t)$$
$$y = Rt\sin(t)$$
$$z = ht$$

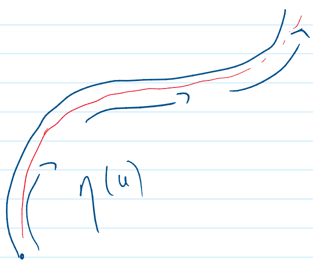
SPIRALE DI ARCHIMEDE $\quad \rho = A\theta \quad \theta \in [\theta_1, \theta_2]$

— o —

CURVE EQUIVALENTI

Siano $\gamma : t \in [a,b] \mapsto \gamma(t) \in \mathbb{R}^m$
$\eta : u \in [c,d] \mapsto \eta(u) \in \mathbb{R}^m$ due archi di curve regolari

Dico che γ e η sono curve equivalenti se



$\exists\, \varphi : u \in [c,d] \mapsto \varphi(u) \in [a,b]$

- biunivoca e strettamente crescente
- derivabile e con derivata continua
- φ^{-1} derivabile e con derivata continua

e t.c. $\boxed{\eta(u) = \gamma(\varphi(u))}$

Se φ str crescente $\Rightarrow$ $\varphi(c) = a$, $\varphi(d) = b$ $\Rightarrow$ $\gamma(\varphi(c)) = \eta(a)$, $\gamma(\varphi(d)) = \eta(b)$

N.B. Con le altre richieste immutate ma φ strettamente decrescente dico che γ e η sono l'una un cambio di orientazione dell'altra.

— o —

$$\eta(u) = \gamma(\varphi(u)) \qquad \forall u \in [c,d] \qquad \varphi : [c,d] \to [a,b]$$

$$\eta'(u) = \gamma'(\varphi(u))\,\varphi'(u) \quad \leftarrow \quad \eta'(u) \parallel \gamma'(\varphi(u))$$

$$\|\eta'(u)\| = \|\gamma'(\varphi(u))\| \cdot |\varphi'(u)|$$

$$T_\eta(u) = \frac{\eta'(u)}{\|\eta'(u)\|} = \frac{\gamma'(\varphi(u))\,\varphi'(u)}{\|\gamma'(\varphi(u))\| \cdot |\varphi'(u)|} = T_\gamma(\varphi(u)) \cdot \frac{\varphi'(u)}{|\varphi'(u)|}$$

$$T_\eta(u) = \frac{\eta'(u)}{\|\eta'(u)\|} = \frac{\gamma'(\varphi(u))\ \varphi'(u)}{\|\gamma'(\varphi(u))\| \cdot |\varphi'(u)|} = T_\gamma(\varphi(u)) \cdot \frac{\varphi'(u)}{|\varphi'(u)|}$$

Se γ e η sono equivalenti, φ è strettamente crescente $\Rightarrow \varphi'(u) \geq 0$
$\Rightarrow \varphi'(u) > 0 \Rightarrow T_\eta(u) = T_\gamma(\varphi(u))$

Se γ e η sono cambi di orientazione φ è strettamente decrescente $\Rightarrow \varphi'(u) \leq 0 \Rightarrow \varphi'(u) < 0$ $\quad T_\eta(u) = -T_\gamma(\varphi(u))$

PROPRIETÀ Curve rettificabili equivalenti o cambi di orientazione hanno la stessa lunghezza

DIM $\gamma : t \in [a,b] \to \mathbb{R}^m$
$\eta : u \in [c,d] \to \mathbb{R}^m$

$\varphi : [c,d] \to [a,b]$ con le proprietà richieste t.c. $\eta(u) = \gamma(\varphi(u))$

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|\, dt \qquad t = \varphi(u) \qquad dt = \varphi'(u)\,du$$

1) γ e η equivalenti $\quad \varphi(c) = a \quad \varphi(d) = b$

$$= \int_c^d \|\gamma'(\varphi(u))\| \cdot \varphi'(u)\, du =$$

$\varphi'(u) > 0 \Downarrow \varphi'(u) = |\varphi'(u)|$

$$= \int_c^d \|\gamma'(\varphi(u))\| \cdot |\varphi'(u)|\, du =$$

$$= \int_c^d \|\eta'(u)\|\, du = \ell(\eta)$$

2) γ e η cambio di orientazione: PER ESERCIZIO

— o —

PARAMETRO D'ARCO (o ASCISSA CURVILINEA)

$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ arco di curva regolare

$$s : t \in [a,b] \mapsto \int_a^t \|\gamma'(z)\|\, dz$$

$\|\gamma'(z)\| > 0 \quad \forall z \in [a,b] \qquad s'(t) = \|\gamma'(t)\| > 0$

$\Rightarrow s$ è una funzione strettamente crescente

$s(a) = 0$

$s(b) = \ell(\gamma)$

t

$\rightarrow \quad s: t \in [a,b] \mapsto \int_a^t \|\gamma'(\tau)\|\, d\tau \in [0, \ell(\gamma)]$ ASCISSA CURVILINEA

è invertibile, derivabile con derivata continua
la sua inversa $t = t(s)$ $\quad t: s \in [0, \ell(\gamma)] \mapsto t(s) \in [a,b]$
è derivabile con derivata continua

$$\eta(s) := \gamma(t(s)) \qquad s \in [0, \ell(\gamma)] \quad \Rightarrow \quad \gamma \text{ e } \eta \text{ sono equivalenti}$$

$$\eta'(s) = \gamma'(t(s))\, t'(s)$$

$$t'(s) = \frac{1}{s'(t)\big|_{t=t(s)}} = \frac{1}{\|\gamma'(t)\|_{t=t(s)}} = \frac{1}{\|\gamma'(t(s))\|}$$

$$\|\eta'(s)\| = \|\gamma'(t(s))\|\, |t'(s)|$$

$$= \|\gamma'(t(s))\| \cdot \frac{1}{\|\gamma'(t(s))\|} = 1 \quad \forall s$$

$$\eta'(s) = T_\eta(s) = T_\gamma(t(s))$$

ELICA CILINDRICA

$$\gamma \begin{cases} x = R\cos(\theta) \\ y = R\sin(\theta) \\ z = h\theta \end{cases} \qquad \theta \in [\theta_1, \theta_2]$$

$$\gamma'(\theta) = (-R\sin(\theta), R\cos(\theta), h) \qquad \|\gamma'(\theta)\| = \sqrt{R^2+h^2}$$

$$s(\theta) = \int_{\theta_1}^{\theta} \sqrt{R^2+h^2}\, d\tau = (\theta-\theta_1)\sqrt{R^2+h^2}$$

$$s = (\theta-\theta_1)\sqrt{R^2+h^2} \qquad \theta - \theta_1 = \frac{s}{\sqrt{R^2+h^2}} \qquad \theta = \theta_1 + \frac{s}{\sqrt{R^2+h^2}}$$

$$x = R\cos\left(\theta_1 + \frac{s}{\sqrt{R^2+h^2}}\right)$$

$$y = R\sin\left(\theta_1 + \frac{s}{\sqrt{R^2+h^2}}\right)$$

$$z = h\left(\theta_1 + \frac{s}{\sqrt{R^2+h^2}}\right)$$

$$s \in [0, \ell(\gamma)] = \left[0, \sqrt{R^2+h^2}\,(\theta_2-\theta_1)\right]$$

ESERCIZIO

$$\gamma \begin{cases} x = x_0 + R\cos(t) \\ y = y_0 + R\sin(t) \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

Trovare la curva equivalente parametrizzata dall'ascissa curvilinea.

INTEGRALI DI 1ª SPECIE

$\gamma: t \in [a,b] \longmapsto \gamma(t) \in \mathbb{R}^n$ curva regolare

$f: x \in A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ t.c. Sostegno di $\gamma \subseteq A$

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|\,dt$$

$$\int_\gamma f\,ds := \int_a^b f(\gamma(t))\,\|\gamma'(t)\|\,dt$$

PROPOSIZIONE Se γ ed η sono due curve regolari equivalenti a due cambi di orientazione, allora

$$\int_\gamma f\,ds = \int_\eta f\,ds \qquad \begin{array}{l}\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^n \\ \eta: [c,d] \to \mathbb{R}^n\end{array}$$

cioè

$$\int_a^b f(\gamma(t))\,\|\gamma'(t)\|\,dt = \int_c^d f(\eta(u))\,\|\eta'(u)\|\,du$$

f non negativa