http://www.dma.unifi.it/~poggiolini/didattica/2020-21-An2Pro.php

Analisi Matematica II Probabilità

Marco Bramanti, Carlo D. Pagani, Sandro Salsa, Analisi Matematica 2, Zanichelli Editore
Sandro Salsa, Annamaria Squellati, Esercizi di Analisi Matematica 2, Zanichelli Editore

— o —

Argomenti di Analisi Matematica

- funzioni di variabile reale a valori vettoriali

$$\gamma : t \in I \subset \mathbb{R} \mapsto \gamma(t) \in \mathbb{R}^m$$

I intervallo

(a,b) $[a,b]$ $(a,b]$ $[b,a)$

$[a,+\infty)$ $(a,+\infty)$

$(-\infty,b]$ $(-\infty,b)$

$\bar{I}$ chiusura di I

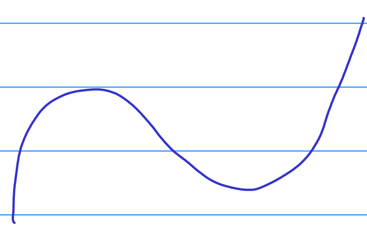
$[a,b]$ $[a,+\infty)$ o $(-\infty,b]$

$\mathrm{int}(I)$ o $\mathring{I}$ interno di I

(a,b) $(a,+\infty)$ o $(-\infty,b)$

Se t è il tempo

$$\gamma : t \in [a,b] \mapsto \gamma(t) \in \mathbb{R}^3 \qquad \gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t)) = (x(t), y(t), z(t))$$



$$\gamma(t) \in \mathbb{R}^m \qquad \gamma(t) = (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_m(t))$$

$$\gamma_j : t \in I \subset \mathbb{R} \mapsto \gamma_j(t) \in \mathbb{R} \quad \forall j = 1, \ldots, m$$

$m = 2$ $\quad \gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t)) = (x(t), y(t))$

$m = 3$ $\quad \gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t)) = (x(t), y(t), z(t))$

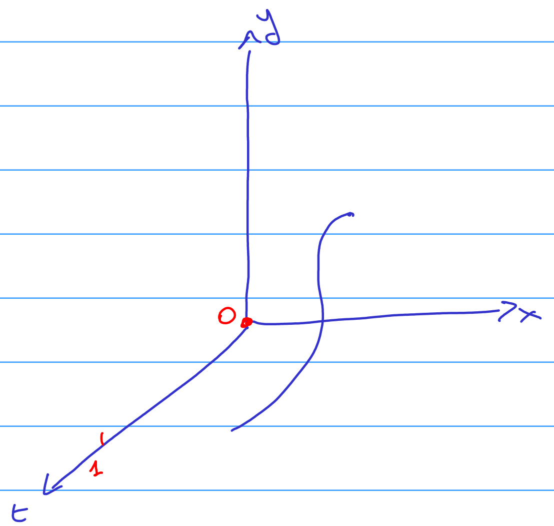
$m=2 \quad \gamma : t \in [0,1] \mapsto \gamma(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$

$Gr(\gamma) = \{ (t, x, y) \in \mathbb{R}^3 : \quad t \in [0,1], \quad x = x(t), \; y = y(t) \}$

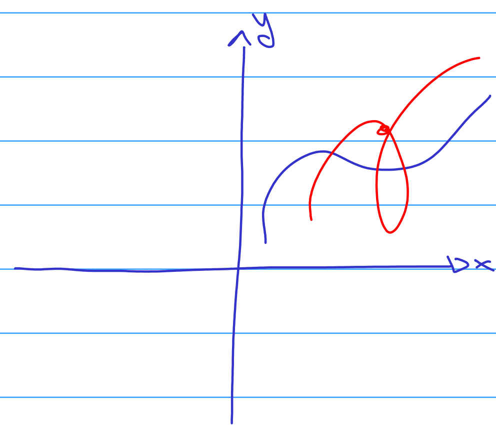
SOSTEGNO DI γ := Immagine di $\gamma : t \in I \mapsto \gamma(t) \in \mathbb{R}^m$

$m=2 \quad Im(\gamma) = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad \exists t \in [0,1] \text{ T.c. } \quad x = x(t) \text{ e } y = y(t) \}$

GRAFICO

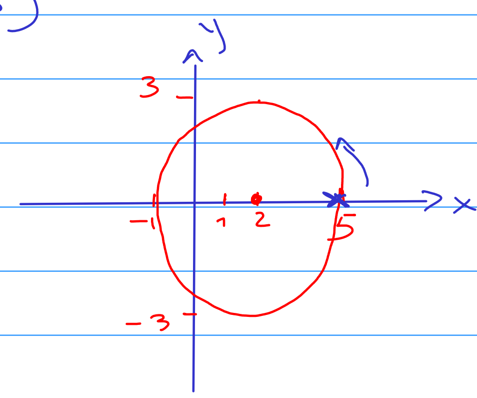


SOSTEGNO



CIRCONFERENZA CENTRATA IN (2,0) E RAGGIO 3

$\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad (x-2)^2 + (y-0)^2 = 3^2 \}$



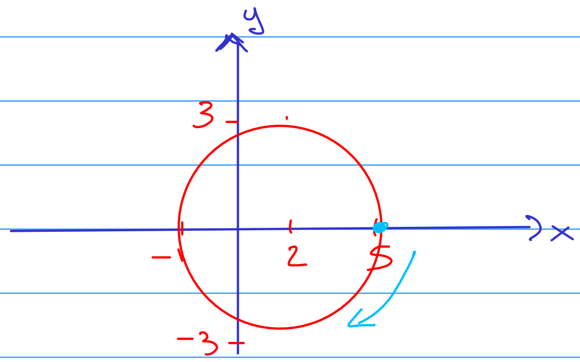
$\gamma : t \in I \mapsto \gamma(t) \in \mathbb{R}^2$

$x - 2 = 3\cos(t) \qquad t \in [0, 2\pi]$

$y = 0 = 3\sin(t)$

$$\gamma \begin{cases} x(t) = 2 + 3\cos(t) \\ y(t) = 3\sin(t) \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

$$\tilde{\gamma} : \begin{cases} \tilde{x}(t) = 2 + 3\cos(2\pi - t) \\ \tilde{y}(t) = 3\sin(2\pi - t) \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

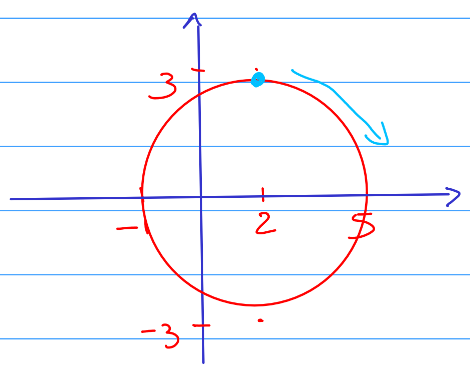


$t = 0$ $\quad \tilde{x} = 2 + 3\cos(2\pi) = 5$

$\tilde{y} = 3\sin(2\pi) = 0$

$$\bar{\gamma} : \begin{cases} \bar{x}(t) = 2 + 3\sin(t) \\ \bar{y}(t) = 0 + 3\cos(t) \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi)$$

$t = 0 \quad \bar{x} = 2 \quad \bar{y} = 3$



— o —

$x \in \mathbb{R}^m \qquad x = (x_1 \ldots x_m) \qquad x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{R}$

x_j si dice j-esima componente di x

$|x|$ o $\|x\|$ è la norma euclidea $\|x\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^{m} x_i^2}$

MODULO DI X

$x, y \in \mathbb{R}^m$ PRODOTTO SCALARE DI X E Y

$\langle x, y \rangle$ o (x, y) o $x \cdot y := \sum_{i=1}^{m} x_i y_i$

OSSERVAZIONE $\quad x \cdot x = \|x\|^2$

— o —

FUNZIONI SCALARI DI VARIABILE VETTORIALE

(funzioni reali di n variabili reali)

$f : x \in A \subset \mathbb{R}^n \mapsto f(x) \in \mathbb{R}$

n generico $\quad f(x) = f(x_1 \_\_\_ x_n)$

$$f : (x_1, \_\_\_, x_n) \in A \subset \mathbb{R}^n \longmapsto f(x_1 \_\_\_, x_n) \in \mathbb{R}$$

$n=2 \quad P \text{ o } \underline{x} \quad P = (x,y) \quad f : (x,y) \in A \subset \mathbb{R}^2 \longmapsto f(x,y) \in \mathbb{R}$

$n=3 \quad P \text{ o } \underline{x} \quad P = (x,y,z) \quad f : (x,y,z) \in A \subset \mathbb{R}^3 \longmapsto f(x,y,z) \in \mathbb{R}$

$n=2$ DOMINIO DI f, A

GRAFICO DI f

$$G_r(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in A, \ z = f(x,y)\}$$

FUNZIONI VETTORIALI DI VARIABILE VETTORIALE

$$\Phi : x \in A \subset \mathbb{R}^n \longmapsto \Phi(x) \in \mathbb{R}^m$$

$x = (x_1 \_\_\_ x_n)$

$$\Phi(x_1, \_\_, x_n) = (\Phi_1(x_1 \_\_\_ x_n), \_\_\_\_\_\_, \Phi_m(x_1, \_\_\_ x_n))$$

Se $n=m$ si dicono CAMPI VETTORIALI

SERIE DI POTENZE

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \qquad \{a_n\}_{n \geq 0} \text{ succesione a valori reali}$$

$x_0 \in \mathbb{R}$ fissato

Determinare l'insieme degli $x \in \mathbb{R}$ t.c. la serie calcolata in x converge: si dice INSIEME DI CONVERGENZA

Se indico con $\underline{I}$ l'insieme di convergenza

$$f : x \in I \longmapsto f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \in \mathbb{R}$$

Proprietà di derivabilità e integrabilità di f

FUNZIONI VETTORIALI DI VARIABILE REALE

I intervallo di $\mathbb{R}$

$\gamma : t \in I \subset \mathbb{R} \mapsto \gamma(t) \in \mathbb{R}^m$

LIMITE (DEF)

Sia $t_0 \in \bar{I}$ e sia $p \in \mathbb{R}^m$ $\quad p = (p_1, \ldots, p_m)$

Dico che $\lim_{t \to t_0} \gamma(t) = p$

se $\lim_{t \to t_0} \| \gamma(t) - p \| = 0$

$\| \gamma(t) - p \| \in \mathbb{R}$ $\qquad \gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \ldots, \gamma_m(t)) \Longrightarrow$

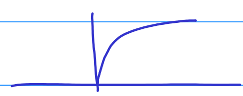
$\qquad p = (p_1, p_2, \ldots, p_m)$

$\gamma(t) - p = (\gamma_1(t) - p_1, \gamma_2(t) - p_2, \ldots, \gamma_m(t) - p_m)$

$$\| \gamma(t) - p \| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (\gamma_i(t) - p_i)^2}$$

$\lim_{t \to t_0} \| \gamma(t) - p \| = 0$ vuol dire $\lim_{t \to t_0} \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (\gamma_i(t) - p_i)^2} = 0$

$g(x) = \sqrt{x}$



$\Rightarrow$ vuol dire $\lim_{t \to t_0} \sum_{i=1}^{m} (\gamma_i(t) - p_i)^2 = 0$

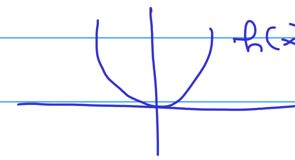
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ t.c. $\forall t \in I \cap (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ si ha

$$\left| \sum_{i=1}^{m} (\gamma_i(t) - p_i)^2 \right| < \varepsilon$$

cioè

$$\underset{\text{sempre vera}}{-\varepsilon <} \underbrace{\sum_{i=1}^{m} (\gamma_i(t) - p_i)^2}_{\text{somma di quadrati}} < \varepsilon$$

$\lim_{t \to t_0} \|f(t)-p\| = 0$ SSE $\lim_{t \to t_0} (f_i(t)-p_i)^2 = 0 \quad \forall i = 1 \dots m$



$h(x) = x^2$

SSE $\lim_{t \to t_0} f_i(t) - p_i = 0 \quad \forall i = 1 \dots m$

SSE $\lim_{t \to t_0} f_i(t) = p_i \quad \forall i = 1 \dots m$

PROPOSIZIONE $\lim_{t \to t_0} f(t) = p$ SSE $\lim_{t \to t_0} f_i(t) = p_i \quad \forall i = 1 \dots m$

CONSEGUENZE
1) Se esiste, il limite è unico
2) Algebra dei limiti

Due funzioni vettoriali $f: t \in I \mapsto f(t) \in \mathbb{R}^m$

$g: t \in I \mapsto g(t) \in \mathbb{R}^m$

due funzioni scalari $a: t \in I \mapsto a(t) \in \mathbb{R}$

$b: t \in I \mapsto b(t) \in \mathbb{R}$

Sia $t_0 \in \bar{I}$ e supponiamo che sia

$\lim_{t \to t_0} f(t) = p \qquad \lim_{t \to t_0} g(t) = q$

$\lim_{t \to t_0} a(t) = \alpha \qquad \lim_{t \to t_0} b(t) = \beta$

Considero la funzione $af + bg: t \in I \mapsto a(t)f(t) + b(t)g(t) \in \mathbb{R}^m$

Allora si ha

$$\lim_{t \to t_0} (af + bg)(t) = \alpha p + \beta q$$

— o —

DEF FUNZIONE CONTINUA IN UN PTO

Sia $I \subset \mathbb{R}$, sia $f: t \in I \mapsto f(t) \in \mathbb{R}^m$ e sia $t_0 \in I$.

Dico che f è continua in t_0 se $\lim_{t \to t_0} f(t) = f(t_0)$

OSSERVAZIONE f è continua in t_0 SSE tutte le sue componenti sono continue in t_0 cioè se $\lim_{t \to t_0} f_i(t) = f_i(t_0) \quad \forall i = 1, \dots, m$

ESEMPIO: Retta e segmento

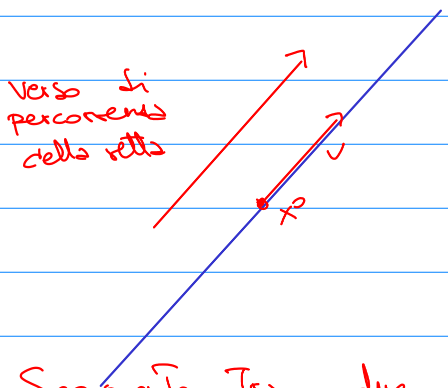
$x^0 \in \mathbb{R}^m \qquad x^0 = (x^0_1, x^0_2, \_\_, x^0_m)$

$v \in \mathbb{R}^m$ direzione (versore) $\quad v = (v_1 \_\_ v_m) \quad \sum_{i=1}^m v_i^2 = 1$

La retta per x^0 e parallela a v è, per definizione, l'insieme dei pti $x \in \mathbb{R}^m$ t.c. $x - x^0 \parallel v$

cioè l'insieme dei pti $x \in \mathbb{R}^m$ per i quali $\exists t \in \mathbb{R}$ t.c. $x - x^0 = tv$

$x = x^0 + tv \qquad \gamma : t \in \mathbb{R} \mapsto x^0 + tv \in \mathbb{R}^m$



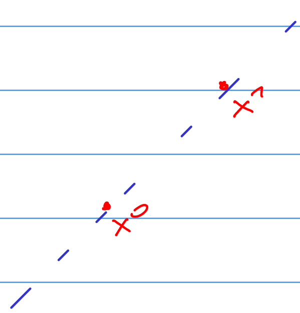
$\gamma(0) = x^0$

$\gamma(1) = x^0 + v$

Segmento tra due pti

$x^0 = (x^0_1 \_\_ x^0_m) \qquad x^1 = (x^1_1 - - x^1_m)$

Retta per i due pti



Coincide con la retta passante per x^0 e parallela alla direzione di $x^1 - x^0$

$$v = \frac{x^1 - x^0}{\|x^1 - x^0\|}$$

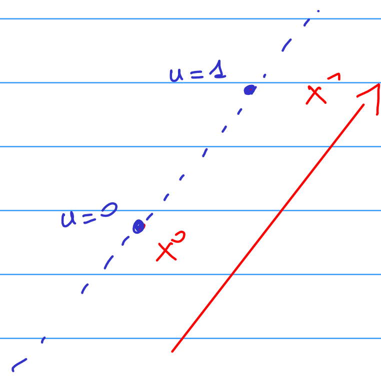
$\Rightarrow$ La retta è l'insieme dei pti $x \in \mathbb{R}^m$ t.c. $x = x^0 + tv = x^0 + t \dfrac{x^1 - x^0}{\|x^1 - x^0\|}$

$$x = x^0 + \frac{t}{\|x^1 - x^0\|}(x^1 - x^0), \quad t \in \mathbb{R}$$

$u = \dfrac{t}{\|x^1 - x^0\|} \qquad t \in \mathbb{R}$ sse $u \in \mathbb{R}$

$x = x^0 + u(x^1 - x^0) \quad u \in \mathbb{R} \qquad \gamma(u) = x^0 + u(x^1 - x^0)$

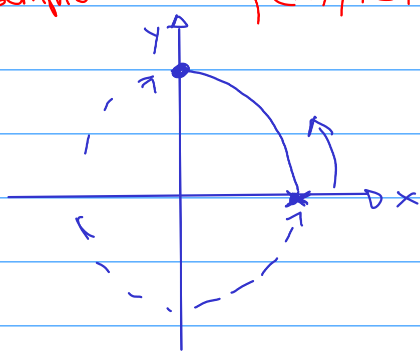
x^0, x^1 $\quad$ $\gamma(u) = x^0 + u(x^1 - x^0)$ $\quad$ ~~$u \in \mathbb{R}$~~ $\quad$ $u \in [0,1]$



$\gamma(0) = x^0$

$\gamma(1) = x^0 + x^1 - x^0 = x^1$

Esempio $\quad \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1, \ x \geq 0, \ y \geq 0\}$



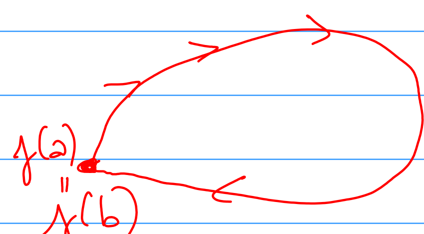
$$\gamma(t) \begin{cases} x(t) = \cos(t) \\ y(t) = \sin(t) \end{cases}$$

~~$t \in [0, 2\pi]$~~ $\quad t \in [0, \frac{\pi}{2}]$

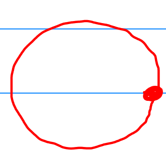
DEF ARCO DI CURVA CONTINUA (CAMMINO)

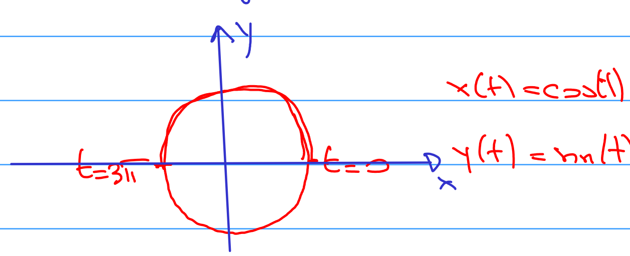
Sia $I \subset \mathbb{R}$ intervallo, sia $\gamma: I \to \mathbb{R}^m$ una funzione continua.
Dico che γ è un cammino o un arco di curva continua.
L'immagine di γ si dice SOSTEGNO DELL'ARCO.
Se $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^m$ è un arco di curva continua, dico che
1) l'arco è chiuso se $\gamma(a) = \gamma(b)$

$t \in [a,b]$

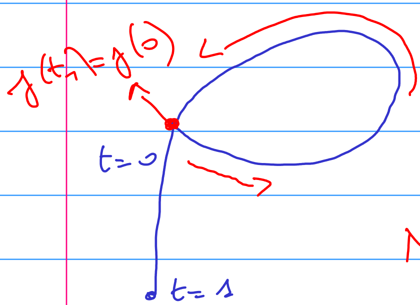


2) l'arco è semplice se $\forall t_1, t_2 \in [a,b]$ tranne al più il caso $t_1 = a$, $t_2 = b$, si ha che $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$





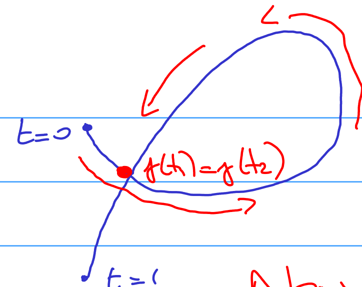
$$\gamma : t \in [0,1] \mapsto \gamma(t) \in \mathbb{R}^2$$



$t_2 = 0$

$t_1 \in (0,1)$

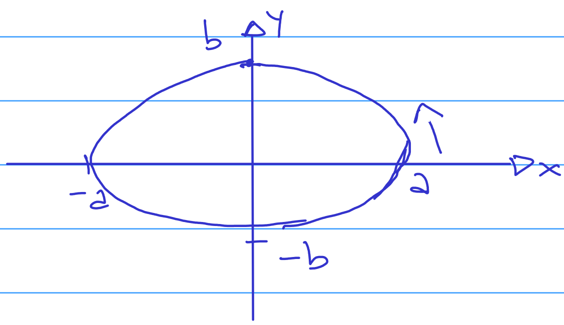
NON È SEMPLICE



$t_1, t_2 \in (0,1)$

NON È SEMPLICE

ESEMPIO ELLISSE $\left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}$ $a,b>0$



$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

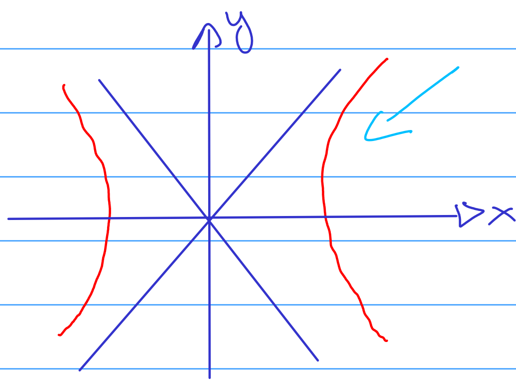
$$\frac{x(t)}{a} = \cos(t)$$

$$\frac{y(t)}{b} = \sin(t)$$

$t \in [0, 2\pi]$

$$\gamma \begin{cases} x(t) = a\cos(t) \\ y(t) = b\sin(t) \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

ESEMPIO IPERBOLE $\left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}$ $a,b>0$



RAMO DI IPERBOLE $\left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,\ x>0 \right\}$

$x>0$ $\quad \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$

$\cosh(t) := \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}$ COSENO IPERBOLICO, $t \in \mathbb{R}$ POSITIVA PARI

$\sinh(t) := \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$ SENO IPERBOLICO, $t \in \mathbb{R}$ DISPARI

$$(\cosh(t))^2 - (\sinh(t))^2 = \frac{(e^t + e^{-t})^2}{4} - \frac{(e^t - e^{-t})^2}{4} =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\cancel{e^{2t}} + \cancel{e^{-2t}} + 2 \cdot 1 - \cancel{e^{2t}} - \cancel{e^{-2t}} + 2\right) = 1$$

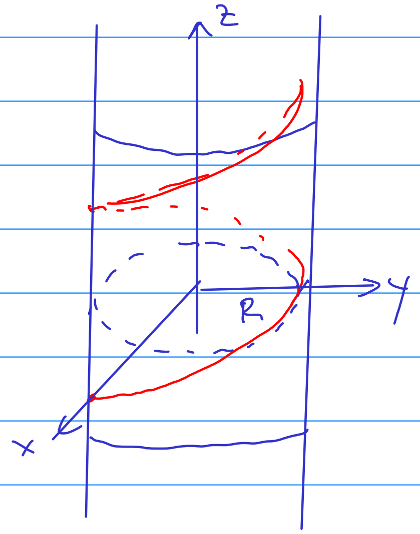
$\frac{x}{a} = \cosh(t)$

$\frac{y}{b} = \sinh(t)$ $\quad t \in \mathbb{R}$

$\gamma : t \in \mathbb{R} \mapsto \gamma(t) \in \mathbb{R}^2$

$$\gamma : \begin{cases} x(t) = a\cosh(t) \\ y(t) = b\sinh(t) \end{cases}$$

ELICA CILINDRICA



$x(t), y(t), z(t)$

$x(t) = R\cos(t)$

$y(t) = R\sin(t)$

$z(t) = ht$

$h > 0$ Assegnato

DERIVATA DI UNA FUNZIONE VETTORIALE

Sia $I \subset \mathbb{R}$ intervallo, sia $t_0 \in I$ e sia $\gamma : t \in I \to \gamma(t) \in \mathbb{R}^m$

Dico che γ è derivabile in t_0 se esiste ed è finito il

$$\lim_{t \to t_0} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0}$$

In tal caso il valore del limite si indica $\gamma'(t_0)$ e si dice DERIVATA DI γ in t_0

$\gamma(t) \in \mathbb{R}^m$, $\gamma(t_0) \in \mathbb{R}^m$ $\qquad$ $\gamma(t) - \gamma(t_0) \in \mathbb{R}^m$

$t \neq t_0$ $\quad \frac{1}{t-t_0} \in \mathbb{R}$ $\qquad$ $\frac{\gamma(t)-\gamma(t_0)}{t-t_0} = \frac{1}{t-t_0}\left(\gamma(t) - \gamma(t_0)\right)$

Se γ è derivabile in t_0, $\forall t_0 \in I$ dico che γ è un ARCO DI CURVA DERIVABILE.

La funzione $\gamma' : t_0 \in I \longmapsto \gamma'(t_0) \in \mathbb{R}^m$ si dice funzione derivata e se la funzione γ' è continua, dico che γ è un arco di curva C^1 sull'intervallo I. Si scrive $\gamma \in C^1(I)$

— o —

ESEMPIO

$$\gamma \begin{cases} x(t) = \cos^3(t) \\ y(t) = \sin^3(t) \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

Le componenti $x(t)$ e $y(t)$ sono derivabili infinite volte $\Rightarrow$ sicuramente $\gamma \in C^1([0, 2\pi])$

$$\left(x(t)\right)^{2/3} = \cos^2(t) \qquad \left(y(t)\right)^{2/3} = \sin^2(t)$$

$\Rightarrow$ il sostegno è dato dagli $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^{2/3} + y^{2/3} = 1\right\} = S$

$(x,y) \in S \Rightarrow (x,-y), (-x,y)$ e $(-x,-y) \in S$

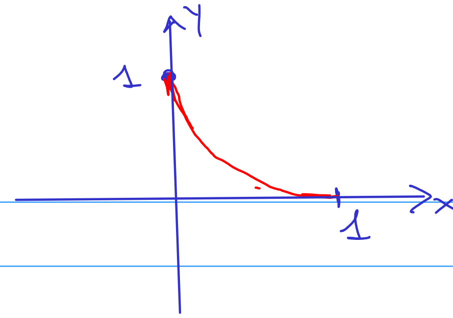
$\Rightarrow$ disegno solo la parte contenuta nel 1° quadrante

$$\begin{cases} x^{2/3} + y^{2/3} = 1 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \qquad y^{2/3} = 1 - x^{2/3} \leftarrow \begin{matrix} x^{2/3} \leq 1 \\ x \geq 0 \end{matrix}$$

$$y = \left(1 - x^{2/3}\right)^{3/2} \qquad x \in [0,1]$$

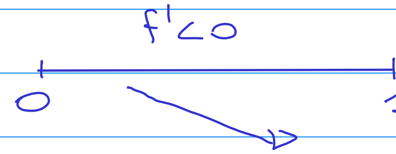
La parte di sostegno contenuta nel 1° quadrante è il grafico della funzione $f : x \in [0,1] \longmapsto (1 - x^{2/3})^{3/2}$

$f(0) = 1$ $\qquad$ $f(1) = 0$



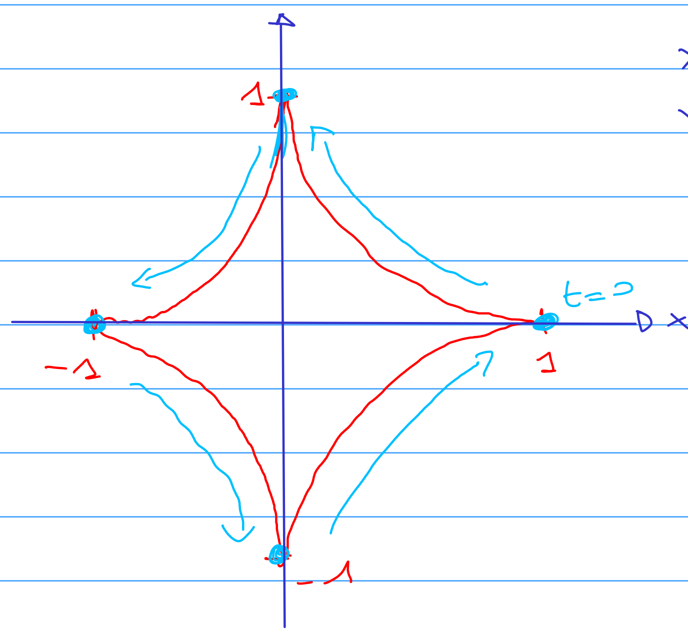
$$f'(x) = \frac{3}{2}\left(1 - x^{2/3}\right)^{1/2} \cdot \left(-\frac{2}{3}\, x^{-1/3}\right) =$$

$$= -\left(1 - x^{2/3}\right)^{1/2} x^{-1/3}$$



$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{-\left(1 - x^{2/3}\right)^{1/2}}{\sqrt[3]{x}} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 1^-} f'(x) = 0$$



$x(t) = \cos^3(t)$

$y(t) = \sin^3(t)$

$t \in [0, 2\pi]$