Abbiamo dunque

$$\begin{aligned}
1-\alpha = \mathbb{P}\left(|T| \le t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\right) &= \mathbb{P}\left(\frac{\left|\overline{X}-\mu\right|\sqrt{n}}{S} \le t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\right)\\
&= \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}-\mu\right| \le \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\right)\\
&= \mathbb{P}\left(\frac{-S}{\sqrt{n}} t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}} \le \mu - \overline{X} \le \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\right)\\
&= \mathbb{P}\left(\overline{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}} \le \mu \le \overline{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\right)
\end{aligned}$$

L'intervallo

$$(L_i, L_s) = \left(\overline{X} - \frac{S\, t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}, \overline{X} + \frac{S\, t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}\right)$$

è dunque un intervallo di confidenza di livello $1-\alpha$ per il valore atteso μ del campione.

Intervallo unilaterale superiore

Sappiamo che

$$\mathbb{P}(T \le t) = 1-\alpha \quad \text{se e solo se} \quad t = t_{n-1,1-\alpha}.$$

Abbiamo dunque

$$\begin{aligned}
1-\alpha = \mathbb{P}\left(\frac{(\overline{X}-\mu)\sqrt{n}}{S} \le t_{n-1,1-\alpha}\right) &= \mathbb{P}\left(\overline{X}-\mu \le \frac{S\, t_{n-1,1-\alpha}}{\sqrt{n}}\right)\\
&= \mathbb{P}\left(\mu \ge \overline{X} - \frac{S\, t_{n-1,1-\alpha}}{\sqrt{n}}\right).
\end{aligned}$$

Quindi la semiretta

$$(L_i, +\infty) = \left(\overline{X} - \frac{S\, t_{n-1,1-\alpha}}{\sqrt{n}}, +\infty\right)$$

è un intervallo di confidenza unilaterale superiore di livello $1-\alpha$.

Intervallo unilaterale inferiore

Sappiamo che

$$\mathbb{P}(T \ge t) = 1-\alpha \quad \text{se e solo se} \quad \mathbb{P}(T \le t) = \alpha \quad \text{se e solo se} \quad t = t_{n-1,\alpha}.$$

Abbiamo dunque

$$1-\alpha = \mathbb{P}\left(\frac{(\overline{X}-\mu)\sqrt{n}}{S} \ge t_{n-1,\alpha}\right) = \mathbb{P}\left(\overline{X}-\mu \ge \frac{S\, t_{n-1,\alpha}}{\sqrt{n}}\right) = \mathbb{P}\left(\mu \le \overline{X} - \frac{S\, t_{n-1,\alpha}}{\sqrt{n}}\right).$$

Quindi la semiretta

$$(-\infty, L_s) = \left(-\infty, \overline{X} - \frac{S\, t_{n-1,\alpha}}{\sqrt{n}}\right) = \left(-\infty, \overline{X} + \frac{S\, t_{n-1,1-\alpha}}{\sqrt{n}}\right)$$

è un intervallo di confidenza unilaterale inferiore di livello $1-\alpha$.

5.3 Stima per intervalli della varianza di campioni gaussiani

Intervallo bilaterale

Sia $X_1, \ldots, X_n$ un campione gaussiano di valore atteso μ (incognita o nota) e varianza σ^2 incognita.

Sappiamo che la v.a. $V := (n-1)\dfrac{S^2}{\sigma^2}$ segue la distribuzione χ^2 a $n-1$ gradi di libertà. Per ogni $\alpha \in (0,1)$ indico con $\chi^2_{n-1,\alpha}$ il quantile di livello α della v.a. V:

$$F_V\left(\chi^2_{n-1,\alpha}\right) = \alpha \qquad \forall \alpha \in (0,1).$$

Calcolo $\mathbb{P}\left(\chi^2_{n-1,\frac{\alpha}{2}} < V < \chi^2_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\right)$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\chi^2_{n-1,\frac{\alpha}{2}} < V < \chi^2_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\right) &= \mathbb{P}\left(V < \chi^2_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\right) - \\ &\quad - \mathbb{P}\left(V < \chi^2_{n-1,\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} = 1-\alpha.\end{aligned}$$

Dunque, sostituendo $V = (n-1)\dfrac{S^2}{\sigma^2}$, otteniamo

$$\begin{aligned}1-\alpha &= \mathbb{P}\left(\chi^2_{n-1,\frac{\alpha}{2}} < (n-1)\frac{S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\frac{1}{\chi^2_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}} < \frac{\sigma^2}{(n-1)S^2} < \frac{1}{\chi^2_{n-1,\frac{\alpha}{2}}}\right) = \mathbb{P}\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1,\frac{\alpha}{2}}}\right)\end{aligned}$$

Quindi l'intervallo

$$(L_i, L_s) = \left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1,\frac{\alpha}{2}}}\right)$$

è un intervallo di confidenza di livello $1-\alpha$ per la varianza σ^2 del campione.

Intervallo unilaterale superiore

Sappiamo che

$$\mathbb{P}(V \le t) = 1-\alpha \quad \text{se e solo se} \quad t = \chi^2_{n-1,1-\alpha}.$$

Dunque

$$1-\alpha = \mathbb{P}\left((n-1)\frac{S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{n-1,1-\alpha}\right) = \mathbb{P}\left(\sigma^2 > (n-1)\frac{S^2}{\chi^2_{n-1,1-\alpha}}\right).$$

Quindi la semiretta

$$(L_i, +\infty) = \left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1,1-\alpha}}, +\infty\right)$$

è un intervallo di confidenza di livello $1-\alpha$ per la varianza σ^2 del campione.

Intervallo unilaterale inferiore

Sappiamo che

$$\mathbb{P}(V \geq t) = 1 - \alpha \quad \text{se e solo se} \quad \mathbb{P}(V \leq t) = \alpha \quad \text{se e solo se} \quad t = \chi^2_{n-1,\alpha}.$$

Dunque

$$1 - \alpha = \mathbb{P}\left((n-1)\frac{S^2}{\sigma^2} > \chi^2_{n-1,\alpha}\right) = \mathbb{P}\left(\sigma^2 \leq (n-1)\frac{S^2}{\chi^2_{n-1,\alpha}}\right).$$

Quindi l'intervallo

$$(0, L_s) = \left(0, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1,\alpha}}\right)$$

è un intervallo di confidenza di livello $1 - \alpha$ per la varianza σ^2 del campione.

Esempio 5.3.1. Calcoliamo gli intervalli di confidenza per il carattere Totpor dei dati tratti da [2], nell'ipotesi che si tratti della realizzazione di v.a. normali.

```
> setwd("~/Documents/didattica/2017-18_analisi_reale/alcuni_appunti/esempio_statistica")
>
> library(readr)
>
> table2 <- read_delim("~/Documents/didattica/2017-18_analisi_reale/alcuni_appunti/
table2.csv", "\t", escape_double = FALSE, trim_ws = TRUE)
Parsed with column specification:
cols(
  Code = col_character(),
  Totpor = col_double(),
  PRA = col_double(),
  PV = col_double(),
  Densi = col_double(),
  TenStr = col_double(),
  CO2SBW = col_double(),
  FirTemp = col_integer()
)
>
> ## definisco la funzione che calcola l'intervallo bilaterale con varianza nota
>
> bilat.norm = function(x,sigma,conf) { n = length(x); xbar=mean(x);
+ alpha = 1 - conf;
+ zstar = qnorm(1-alpha/2);
+ SE = sigma/sqrt(n);
+ xbar + c(-zstar*SE,zstar*SE)}
>
> # definisco la funzione che calcola l'intervallo bilaterale con varianza ignota
>
> bilat.stud = function(x,conf) { n = length(x);
+ m = n-1;
+ xbar=mean(x);
+ alpha = 1 - conf;
+ zstar = qt(1-alpha/2, m, lower.tail=TRUE);
```

```
+ SE = sd(x)/sqrt(n);
+ xbar + c(-zstar*SE,zstar*SE)
+ }
>
> # definisco la funzione che calcola l'intervallo bilaterale per la varianza
>
> bilat.chi = function(x,conf) {
+     n = length(x);
+     m = n-1;
+     alpha = 1 - conf;
+     zsup = qchisq(alpha/2, m, lower.tail=TRUE);
+     zinf = qchisq(1 - alpha/2, m, lower.tail=TRUE);
+     SE = sd(x)*sd(x)*m;
+     c(SE/zinf,SE/zsup)
+ }
>
>
> numSummary(table2[,c("Totpor", "PRA", "PV", "Densi", "TenStr", "CO2SBW", "FirTemp")],
+  statistics=c("mean", "sd", "quantiles"), quantiles=c(0,.25,.5,.75,1))
               mean         sd      0%      25%     50%      75%    100%  n NA
Totpor   40.1193548  7.0371760  26.850  36.0550  40.900  44.4200  54.640 31  0
PRA       0.6732581  0.4760389   0.158   0.4220   0.622   0.7305   2.657 31  0
PV       55.3290323 28.5498417  10.200  30.4500  59.400  80.7000  88.600 31  0
Densi     1.6929032  0.1701214   1.340   1.5600   1.680   1.8150   2.020 31  0
TenStr    0.6092258  0.3143682   0.143   0.4065   0.527   0.7165   1.405 31  0
CO2SBW    0.5816667  0.5259152   0.050   0.2900   0.390   0.4950   1.960 30  1
FirTemp 764.8387097 52.9698636 730.000 740.0000 740.000 750.0000 960.000 31  0
>
> bilat.norm(table2$Totpor, 7.04, .9)
[1] 38.03957 42.19914
> bilat.norm(table2$Totpor, 7.04, .95)
[1] 37.64113 42.59758
>
> bilat.stud(table2$Totpor, .9)
[1] 37.97416 42.26455
> bilat.stud(table2$Totpor, .95)
[1] 37.53810 42.70061
>
> bilat.chi(table2$Totpor, .9)
[1] 33.94002 80.33757
> bilat.chi(table2$Totpor, .95)
[1] 31.62366 88.48047
>
```

6. Test d'ipotesi

Un tipico problema che ci si può trovare ad affrontare è il seguente:

Faccio una certa ipotesi (che indico con H_0 e che chiamo **ipotesi nulla**). In base ai dati che ho a disposizione devo decidere se accettare o rifiutare la verità di questa ipotesi.

Si potranno verificare quattro situazioni alternative:

1. L'ipotesi è vera e l'accetto $\rightarrow$ bene
2. L'ipotesi è vera ma in base ai dati la rifiuto $\rightarrow$ in questo caso si dice che si commette **errore di prima specie**
3. L'ipotesi è falsa ma in base ai dati la accetto $\rightarrow$ in questo caso si dice che si commette **errore di seconda specie**
4. L'ipotesi è falsa e la rifiuto $\rightarrow$ bene

Per chiarirsi le idee vediamo prima un esempio.

Esempio 6.0.1. Ho una moneta. Voglio verificare se è bilanciata o meno. La lancio n volte. Pongo $X_i = \begin{cases} 1 & \text{se all'}i\text{-esimo lancio esce testa,} \\ 0 & \text{se all'}i\text{-esimo lancio esce croce.} \end{cases}, \ i = 1, \ldots, n.$

Ho un campione statistico bernoulliano di numerosità n e parametro $p \in [0, 1]$ incognito, dove p è la probabilità che esca testa in un singolo lancio.

L'ipotesi nulla che dobbiamo testare è

$$H_0) \qquad p = 0.5.$$

Facciamo dunque n lanci. Otteniamo k teste ed $n - k$ croci:

$$x_1, \ \ldots, \ x_n \qquad \text{dove} \qquad x_i = \begin{cases} 1 & \text{se all'}i\text{-esimo lancio esce testa,} \\ 0 & \text{se all'}i\text{-esimo lancio esce croce.} \end{cases}$$

e dunque $\overline{x} = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = \dfrac{k}{n}$.

Stabilisco una distanza massima ε tra $\overline{x}$ e 0.5 entro la quale accettare l'ipotesi $p = 0.5$ e oltre la quale rifiutarla. Ovvero: accetto H_0 se $|\overline{x} - 0.5| < \varepsilon$ e la rifiuto se $|\overline{x} - 0.5| \geq \varepsilon$. cioè se $\left| \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i - \dfrac{n}{2} \right| \geq n\varepsilon$. Quanto vale la probabilità di commettere errore di prima specie, ovvero di rifiutarla quando esse invece è vera?

Commetto errore di prima specie con probabilità

$$\alpha := \mathbb{P}\left(\left|\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{n}{2}\right| \geq n\varepsilon\right).$$

Poiché le v.a. X_i sono i.i.d con $\mathbb{P}_{X_i} = B(p)$, la v.a. $Y := \sum_{i=1}^{n} X_i$ è una v.a. binomiale di parametri n e p. Se l'ipotesi H_0 è vera, allora $p = 0.5$ cosicché $\mathbb{P}_Y = B(n, 0.5)$ e

$$\alpha := \mathbb{P}\left(\left|Y - \frac{n}{2}\right| \geq n\varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(Y \geq \frac{n}{2} + n\varepsilon\right) + \mathbb{P}\left(Y \leq \frac{n}{2} - n\varepsilon\right)$$

Vediamo alcuni casi

```
> ## definisco la funzione che calcola
> ## la probabilitÃ  di errore di prima specie
> alpha.binom = function(n,p,tolle) {
+ infe = n*(p - tolle);
+ supe = n*(p + tolle);
+ supep = supe;
+ if(supe == floor(supe)) supep = supe-1;
+ infe = round(infe, digits = 0);
+ c(floor(infe), floor(supe),
+   pbinom(infe, size=n, prob=p, lower.tail=TRUE) +
+         pbinom(supep, size=n, prob=p, lower.tail=FALSE))
+ }
> alpha.binom(50, .5, .1)
[1] 20.0000000 30.0000000  0.2026388
> alpha.binom(100, .5, .1)
[1] 40.00000000 60.00000000  0.05688793
> alpha.binom(200, .5, .1)
[1] 8.000000e+01 1.200000e+02 5.685156e-03
> alpha.binom(300, .5, .1)
[1] 1.2000e+02 1.8000e+02 6.3422e-04
> alpha.binom(400, .5, .1)
[1] 1.600000e+02 2.400000e+02 7.426568e-05
> alpha.binom(500, .5, .1)
[1] 2.000000e+02 3.000000e+02 8.940067e-06
> alpha.binom(50, .5, .05)
[1] 22.0000000 27.0000000  0.4798877
> alpha.binom(100, .5, .05)
[1] 45.0000000 55.0000000  0.3197273
> alpha.binom(200, .5, .05)
[1]  90.0000000 110.0000000   0.1581653
> alpha.binom(300, .5, .05)
[1] 135.0000000 165.0000000   0.0939037
> alpha.binom(400, .5, .05)
[1] 180.00000000 220.00000000   0.04563548
```

```
> alpha.binom(500, .5, .05)
[1] 225.00000000 275.00000000   0.02832616
```

Solitamente si vuole controllare (nel senso di tenere bassa, inferiore a 0.1 o a 0.05) la probabilità α di commettere errore di prima specie. Tale probabilità viene detta *livello di significatività* del test. Fissato il livello di significatività α, la numerosità n e la soglia di tolleranza ε andranno scelti di conseguenza come visto negli esempi precedenti.

Inoltre, fissato α, ci chiediamo quanto valga la probabilità di commettere errore di seconda specie, ovvero di accettare H_0 quand'essa invece è falsa.

Se H_0 è falsa, allora la probabilità di ottenere testa non è 0.5 ma assume un valore $p \neq 0.5$ (ignoto) e dunque $\mathbb{P}_Y = B(n,p)$ e io accetto H_0 con probabilità

$$\beta(p) := \mathbb{P}_p\left(\left|Y - \frac{n}{2}\right| < n\varepsilon\right) = \mathbb{P}_p\left(Y < \frac{n}{2} + n\varepsilon\right) - \mathbb{P}_p\left(Y \leq \frac{n}{2} - n\varepsilon\right)$$

Si calcola $\beta(p)$ per vari valori di p. La funzione $\beta(p)$ è detta **curva operativa caratteristica (OC)** mentre $1 - \beta(p)$ cioè la probabilità di rifiutare H_0 quand'essa in effetti è falsa e il parametro incognito vale p, è detta **potenza del test**.

Esempio 6.0.2. Consideriamo la solita moneta e stavolta vogliamo vedere se è più probabile ottenere testa che ottenere croce. Vogliamo cioè testare l'ipotesi nulla

$$H_0) \qquad p \leq 0.5$$

Un test di questo tipo è detto *test unilaterale*.

Stabilisco una tolleranza massima ε entro la quale accettare l'ipotesi $p \leq 0.5$ e oltre la quale rifiutarla. Ovvero: accetto H_0 se $\overline{x} < 0.5 + \varepsilon$ e la rifiuto se $\overline{x} \geq 0.5 + \varepsilon$ cioè se $\sum_{i=1}^{n} x_i \geq \frac{n}{2} + n\varepsilon$. Quanto vale la probabilità di commettere errore di prima specie, ovvero di rifiutarla quando essa invece è vera?

Commetto errore di prima specie con probabilità

$$\alpha := \mathbb{P}\left(Y \geq \frac{n}{2} + n\varepsilon\right).$$

Se H_0 è vera, allora $\mathbb{P}_Y = B(n,p)$ per qualche $p \leq 0.5$. Indico F_Y^p la sua funzione di ripartizione Vediamo alcuni casi

```
  > ## definisco la funzione che calcola il primo valore
> ## che rifiuto e
> ## la probabilitÃ  di errore di prima specie
> alpha.binom.uni = function(n,p,tolle) {
+ supe = n*(p + tolle);
+ supep = supe;
+ if(supe == floor(supe)) supep = supe-1;
+ c(floor(supe), pbinom(supep, size=n, prob=p, lower.tail=FALSE))
+ }
> alpha.binom.uni(50, .5, .1)
[1] 30.0000000  0.1013194
```

```
> ppp =numeric(0)
> fff =numeric(0)
> beta.p <- matrix(0, nrow = 1000, ncol = 2, byrow = FALSE)
> for (i in 1:1000)  {
+     ppp[i] <- i*0.5/1000
+     fff[i] <- pbinom(c(274), size=500, prob=ppp[i], lower.tail=TRUE)
+     - pbinom(c(225), size=500, prob=ppp[i], lower.tail=TRUE)
+     beta.p[i,1] <- round(ppp[i],6)
+     beta.p[i,2] <- round(fff[i],6)
+         }
> write.csv(beta.p, "betadip.csv", row.names = FALSE)
```

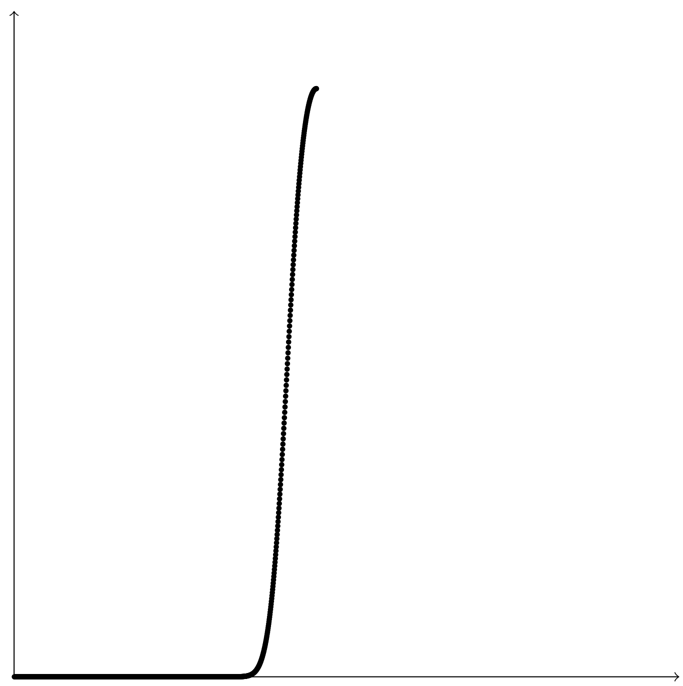

Figura 6.1: $\beta(p)$

```
> alpha.binom.uni(100, .5, .1)
[1] 60.00000000  0.02844397
> alpha.binom.uni(200, .5, .1)
[1] 1.200000e+02 2.842578e-03
> alpha.binom.uni(300, .5, .1)
[1] 1.8000e+02 3.1711e-04
> alpha.binom.uni(400, .5, .1)
[1] 2.400000e+02 3.713284e-05
> alpha.binom.uni(500, .5, .1)
[1] 3.000000e+02 4.470033e-06
> alpha.binom.uni(50, .5, .05)
[1] 27.0000000  0.2399438
> alpha.binom.uni(100, .5, .05)
[1] 55.0000000  0.1356265
> alpha.binom.uni(200, .5, .05)
[1] 110.00000000   0.06868333
> alpha.binom.uni(300, .5, .05)
[1] 165.00000000   0.04695185
> alpha.binom.uni(400, .5, .05)
[1] 220.00000000   0.02011537
> alpha.binom.uni(500, .5, .05)
[1] 275.00000000   0.01416308
```

6.1 Principi generali di un test statistico

In generale dunque un test d'ipotesi ha la seguente struttura:

1. Si definisce l'insieme delle distribuzioni *compatibili* con il campione $X_1, \ldots, X_n$.
2. Si definisce l'ipotesi da testare, detta *ipotesi nulla* (si indica col simbolo H_0). Le ipotesi si possono suddividere in due grandi famiglie:
   - **ipotesi parametriche**: la distribuzione del campione è nota a meno di un parametro θ, scalare o vettoriale. La formula generale di un'ipotesi parametrica è dunque
   $$H_0 : \qquad \theta \in \Theta_0 \subset \Theta$$
   ovvero: il parametro θ appartiene ad uno specificato sottoinsieme Θ_0 del dominio ammissibile per il parametro Θ.
   - **ipotesi non parametriche**: sono ipotesi sul tipo di distribuzione del campione oppure ipotesi che riguardano popolazioni differenti. La formulazione generale di una ipotesi non parametrica è del tipo
   $$H_0 : \qquad F(x) \in \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$$
   ovvero: la legge F del campione appartiene ad uno specificato sottoinsieme della famiglia delle leggi ammissibili.

In entrambi i casi l'ipotesi si dice *semplice* se Θ_0 o $\mathcal{F}_0$ è costituito da un solo elemento. Si dice *composta* altrimenti.

3. Si definisce l'ipotesi alternativa H_A che è da considerarsi valida quando si rifiuta H_0.

$$\begin{aligned} &H_A: \qquad \theta \in \Theta_1, \qquad \Theta_1 := \Theta \setminus \Theta_0 \qquad \text{nel caso parametrico,} \\ &H_A: \qquad F(x) \in \mathcal{F}_1 \qquad \mathcal{F}_1 := \mathcal{F} \setminus \mathcal{F}_0 \qquad \text{nel caso non parametrico.} \end{aligned}$$

4. Si definisce una statistica $\varphi(X_1, \ldots, X_n)$ con distribuzione nta quando H_0 è vera.

5. Si suddivide lo spazio $\mathcal{G}$ delle possibili osservazioni in due insiemi disgiunti:
   - $\mathcal{A}$ detta *regione di accettazione di* H_0;
   - $\mathcal{C} := \mathcal{G} \setminus \mathcal{A}$ detta *regione di rifiuto di* H_0 o *regione critica.*

6. Si formula la regola di decisione:
   - accetto H_0 se $\varphi(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{A}$;
   - rifiuto H_0 se $\varphi(x_1, \ldots, x_n) \notin \mathcal{A}$, ovvero se $\varphi(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{C}$.

Diciamo che commettiamo *errore di prima specie* se rigettiamo H_0 quando essa in realtà è vera e chiamiamo *livello di significatività del test* la probabilità che ciò accada:

$$\alpha := \mathbb{P}\left(\varphi(X_1, \ldots, X_n) \in \mathcal{C} | H_0\right).$$

Il valore $1 - \alpha$ è detto *livello di fiducia del test.*

Diciamo invece che commettiamo *errore di seconda specie* se accettiamo H_0 quando esssa è falsa. Indichiamo con β la probabilità che cio accada:

$$\beta := \mathbb{P}\left(\varphi(X_1, \ldots, X_n) \in \mathcal{A} | H_A\right).$$

Il valore $1 - \beta$ è detto *potenza del test.* (Vedremo negli esempi successivi relativi a test parametrici che se H_A è un'ipotesi composta, allora β è una funzione $\beta(\theta)$, $\theta \in \Theta_1$.

Come già detto, è prioritario *limitare* la probabilità di commettere errore di prima specie, cioè di limitare la probabilità di rifiutare l'ipotesi nulla quando essa è vera.

6.2 Test parametrici per campioni gaussiani

6.2.1 Test d'ipotesi per il valore atteso di campioni gaussiani di cui è nota la varianza

Test bilaterale

Sia $X_1, \ldots, X_n$ un campione gaussiano di valore atteso μ incognito e varianza σ^2 nota. Vogliamo testare

$$H_0: \qquad \mu = \mu_0, \qquad\qquad H_A: \qquad \mu \neq \mu_0.$$

Sappiamo che $\mathbb{P}_{X_i} = N\left(\mu_0, \sigma^2\right)$ se e solo se $\mathbb{E}\left[\overline{X}\right] = \mu_0$. Dunque accetto l'ipotesi nulla H_0 se la media campionaria si discosta da μ_0 per meno di un valore soglia ε ovvero se $|\overline{x} - \mu_0| < \varepsilon$ e la rifiuto altrimenti.

Il livello di significatività (cioè la probabilità di commettere un errore di prima specie) è allora

$$\alpha = \mathbb{P}\left(\left|\overline{X} - \mu_0\right| \geq \varepsilon | \mu = \mu_0\right).$$

Ma se H_0 è vera, $\mathbb{P}_{\overline{X}} = N\left(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ e $Z := \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ ha distribuzione gaussiana standard $N(0,1)$. Dunque

$$\begin{aligned}
\alpha &= \mathbb{P}\left(\left|\overline{X} - \mu_0\right| \geq \varepsilon | \mu = \mu_0\right) = \mathbb{P}\left(\frac{\left|\overline{X} - \mu_0\right|}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \geq \frac{\varepsilon}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} | \mu = \mu_0\right) = \mathbb{P}\left(|Z| \geq \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(Z \geq \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right) + \mathbb{P}\left(Z \leq \frac{-\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right) + \Phi\left(\frac{-\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right) \\
&= 2\left(1 - \Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right)\right)
\end{aligned}$$

Se voglio fissare a priori α, deve essere allora $\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2}$ cioè deve essere $\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma} = z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ e dunque devo scegliere

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}}.$$

Presi i dati $x_1, \ldots, x_n$, sia $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ la loro media:

accetto H_0 se $|\overline{x} - \mu_0| < \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ e la rifiuto altrimenti.

Calcoliamo la *curva operativa caratteristica*. Se H_0 è falsa, $\mu \neq \mu_0$, commetto errore di seconda specie con probabilità

$$\begin{aligned}
\beta(\mu) &= \mathbb{P}\left(\left|\overline{X} - \mu_0\right| < \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}} | \mathbb{E}[X_i] = \mu\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\mu_0 - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}} < \overline{X} < \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}} | \mathbb{E}[X_i] = \mu\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\frac{\mu_0 - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} < \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < \frac{\mu_0 - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} | \mathbb{E}[X_i] = \mu\right) \\
&= \Phi\left(\frac{\mu_0 - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) - \Phi\left(\frac{\mu_0 - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} + z_{\frac{\alpha}{2}}\right).
\end{aligned} \tag{6.1}$$

Distinguiamo due casi

1. $\mu > \mu_0$
   In questo caso $\frac{\mu_0 - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < 0$ dunque $\frac{\mu_0 - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} + z_{\frac{\alpha}{2}} < z_{\frac{\alpha}{2}}$ e quindi

$$0 < \Phi\left(\frac{\mu_0 - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} + z_{\frac{\alpha}{2}}\right) < \frac{\alpha}{2}$$

e la possiamo considerare una quantità trascurabile. Abbiamo dunque

$$\beta(\mu) \sim \Phi\left(\frac{\mu_0 - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right).$$

In particolare

$$\sup_{\mu>\mu_0} \beta(\mu) \sim \Phi\left(z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2}.$$

Supponiamo di voler fissare (oltre ad α) anche $\beta(\mu) = \widehat{\beta}$, per un qualche μ fissato. Con la semplificazione fatta dalla (6.1) otteniamo $\widehat{\beta} \geq \Phi\left(\frac{\mu_0 - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)$. L'unica quantità che possiamo trattare è la numerosità n. Risolvendo l'equazione rispetto a n otteniamo

$$z_{\widehat{\beta}} \geq \frac{\mu_0 - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

e dunque

$$\frac{\mu_0 - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq z_{\widehat{\beta}} + z_{\frac{\alpha}{2}},$$

cioè

$$n \geq \left(\frac{\sigma}{\mu_0 - \mu}\right)^2 \left(z_{\widehat{\beta}} + z_{\frac{\alpha}{2}}\right)^2$$

2. $\mu < \mu_0$
In questo caso $\frac{\mu - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < 0$ e scriviamo la (6.1) nella forma

$$\begin{aligned}\beta(\mu) &= \Phi\left(\frac{\mu - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} - z_{\frac{\alpha}{2}}\right) - \Phi\left(\frac{\mu - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{\mu - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) - \Phi\left(\frac{\mu - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} + z_{\frac{\alpha}{2}}\right).\end{aligned}$$

Si ha $\frac{\mu - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} + z_{\frac{\alpha}{2}} < z_{\frac{\alpha}{2}}$ e dunque

$$0 < \Phi\left(\frac{\mu - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} + z_{\frac{\alpha}{2}}\right) < \frac{\alpha}{2}$$

e la possiamo considerare una quantità trascurabile. Abbiamo dunque Abbiamo dunque

$$\beta(\mu) \sim \Phi\left(\frac{\mu - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right).$$

In particolare

$$\sup_{\mu<\mu_0} \beta(\mu) \sim \Phi\left(z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2}.$$

Supponiamo di voler fissare (oltre ad α) anche $\beta(\mu) = \widehat{\beta}$. Con la semplificazione fatta possiamo considerare l'equazione $\widehat{\beta} \geq \Phi\left(\frac{\mu-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)$ e ritroviamo la disuguaglianza trovata nel caso precedente:

$$n \geq \left(\frac{\sigma}{\mu_0-\mu}\right)^2 \left(z_{\widehat{\beta}} + z_{\frac{\alpha}{2}}\right)^2$$

Test unilaterale inferiore con H_0 semplice

Sia $X_1, \ldots, X_n$ un campione gaussiano di valore atteso μ incognito e varianza σ^2 nota. Vogliamo testare

$$H_0 : \qquad \mu = \mu_0 \qquad\qquad H_A : \qquad \mu > \mu_0.$$

Accetto l'ipotesi nulla H_0 se la media campionaria è inferiore a $\mu_0 + \varepsilon$ cioè se $\overline{x} < \mu_0 + \varepsilon$.

La probabilità di commettere un errore di prima specie è allora

$$\mathbb{P}\left(\overline{X} \geq \mu_0 + \varepsilon | \mu = \mu_0\right).$$

Poiché, se H_0 è vera si ha $\mathbb{P}_{\overline{X}} = N\left(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ e $Z := \frac{\overline{X}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ ha distribuzione $N(0,1)$, si ha

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\overline{X} \geq \mu_0 + \varepsilon | \mu = \mu_0\right) &= \mathbb{P}\left(\frac{\overline{X}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \geq \frac{\varepsilon}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} | \mu = \mu_0\right)\\ &= \mathbb{P}\left(Z \geq \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(Z \leq \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right).\end{aligned}$$

Dunque scelgo $\varepsilon = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha}$. Presi i dati $x_1, \ldots, x_n$, sia dunque $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ la loro media.

$$\text{Accetto } H_0 \text{ se } \overline{x} < \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha} \text{ e la rifiuto altrimenti.}$$

Test unilaterale inferiore con H_0 composta

Sia $X_1, \ldots, X_n$ un campione gaussiano di valore atteso μ incognita e varianza σ^2 nota. Vogliamo testare

$$H_0 : \qquad \mu \leq \mu_0 \qquad\qquad H_A : \qquad \mu > \mu_0.$$

Accetto l'ipotesi nulla H_0 se la media campionaria è inferiore a $\mu_0 + \varepsilon$ cioè se $\overline{x} < \mu_0 + \varepsilon$.

La probabilità di commettere un errore di prima specie è allora

$$\mathbb{P}\left(\overline{X} \geq \mu_0 + \varepsilon | \mu \leq \mu_0\right).$$

Poiché $\mathbb{P}_{\overline{X}} = N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ e $Z := \frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ ha distribuzione $N(0,1)$, si ha

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(\overline{X} \geq \mu_0 + \varepsilon | \mathbb{E}\left[\overline{X}\right] = \mu\right) = \mathbb{P}\left(\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \geq \frac{\mu_0 - \mu + \varepsilon}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} | \mathbb{E}\left[\overline{X}\right] = \mu\right) \\
&= \mathbb{P}\left(Z \geq \frac{(\mu_0 - \mu + \varepsilon)\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(Z \leq \frac{(\mu_0 - \mu + \varepsilon)\sqrt{n}}{\sigma}\right) \\
&= 1 - \Phi\left(\frac{(\mu_0 - \mu + \varepsilon)\sqrt{n}}{\sigma}\right) \leq 1 - \Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right).
\end{aligned}$$

Se voglio limitare superiormente $\mathbb{P}\left(\overline{X} > \mu_0 + \varepsilon | \mu \leq \mu_0\right)$, cioè se voglio

$$\mathbb{P}\left(\overline{X} > \mu_0 + \varepsilon | \mathbb{E}\left[\overline{X}\right] = \mu\right) \leq \alpha \qquad \forall \mu \leq \mu_0$$

scelgo ε in modo da avere $1 - \Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right) = \alpha$ cioè $\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma} = z_{1-\alpha}$ e dunque scelgo

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha}.$$

Presi i dati $x_1, \ldots, x_n$, sia dunque $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ la loro media.

Accetto H_0 se $\overline{x} < \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha}$ e la rifiuto altrimenti.

Test unilaterale superiore con H_0 semplice

Sia $X_1, \ldots, X_n$ un campione gaussiano di valore atteso μ incognito e varianza σ^2 nota. Vogliamo testare

$$H_0: \quad \mu = \mu_0 \qquad H_A: \mu < \mu_0$$

Accetto l'ipotesi nulla H_0 se la media campionaria è superiore a $\mu_0 - \varepsilon$ cioè se $\overline{x} > \mu_0 - \varepsilon$. La probabilità di commettere un errore di prima specie è allora

$$\mathbb{P}\left(\overline{X} \leq \mu_0 - \varepsilon | \mu = \mu_0\right).$$

Poiché, se H_0 è vera, $\mathbb{P}_{\overline{X}} = N\left(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n}\right)$, e $Z := \frac{\overline{X}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ ha distribuzione $N(0,1)$, si ha

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(\overline{X} \leq \mu_0 - \varepsilon | \mu = \mu_0\right) = \mathbb{P}\left(\frac{\overline{X}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq \frac{-\varepsilon}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} | \mu = \mu_0\right) = \mathbb{P}\left(Z \leq \frac{-\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right) \\
&= \Phi\left(\frac{-\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right).
\end{aligned}$$

Dunque scelgo ε in modo da avere $\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 1 - \alpha$ cioè $\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma} = z_{1-\alpha}$ cioè scelgo

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha}.$$

Presi i dati $x_1, \ldots, x_n$, sia dunque $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ la loro media.

$$\text{Accetto } H_0 \text{ se } \overline{x} > \mu_0 - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha} \text{ e la rifiuto altrimenti.}$$

Test unilaterale superiore con H_0 composta

Sia $X_1, \ldots, X_n$ un campione gaussiano di valore atteso μ incognito e varianza σ^2 nota. Vogliamo testare

$$H_0: \qquad \mu \geq \mu_0 \qquad\qquad H_A: \mu < \mu_0.$$

Accetto l'ipotesi nulla H_0 se la media campionaria è superiore a $\mu_0 - \varepsilon$ cioè se $\overline{x} > \mu_0 - \varepsilon$. La probabilità di commettere un errore di prima specie è allora

$$\mathbb{P}\left(\overline{X} \leq \mu_0 - \varepsilon | \mathbb{E}\left[\overline{X}\right] \geq \mu_0\right).$$

Poiché, se $\mathbb{P}_{X_i} = N\left(\mu, \sigma^2\right)$ si ha $\mathbb{P}_{\overline{X}} = N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$, e $Z := \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ ha distribuzione $N(0,1)$, abbiamo anche

$$\mathbb{P}\left(\overline{X} \leq \mu_0 - \varepsilon | \mathbb{E}\left[\overline{X}\right] = \mu \geq \mu_0\right) = \mathbb{P}\left(\frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq \frac{\mu_0 - \mu - \varepsilon}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} | \mathbb{E}\left[\overline{X}\right] = \mu \geq \mu_0\right) =$$
$$= \mathbb{P}\left(Z \leq \frac{(\mu_0 - \mu - \varepsilon)\sqrt{n}}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{(\mu_0 - \mu - \varepsilon)\sqrt{n}}{\sigma}\right) \leq \Phi\left(\frac{-\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right).$$

Se voglio limitare superiormente $\mathbb{P}\left(\overline{X} \leq \mu_0 - \varepsilon | \mu \geq \mu_0\right)$ cioè se voglio

$$\mathbb{P}\left(\overline{X} \leq \mu_0 - \varepsilon | \mathbb{E}\left[\overline{X}\right] = \mu \geq \mu_0\right) \leq \alpha \qquad \forall \mu \geq \mu_0$$

scelgo ε in modo da avere $\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 1 - \alpha$ cioè $\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma} = z_{1-\alpha}$ e dunque scelgo

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha}.$$

Presi i dati $x_1, \ldots, x_n$, sia dunque $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ la loro media.

$$\text{Accetto } H_0 \text{ se } \overline{x} > \mu_0 - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha} \text{ e la rifiuto altrimenti.}$$

6.2.2 Campione gaussiano di cui non è nota la varianza

Test bilaterale

Sia $X_1, \ldots, X_n$ un campione gaussiano di valore atteso μ e varianza σ^2 entrambi ignoti. Vogliamo testare

$$H_0: \qquad \mu = \mu_0 \qquad\qquad H_A: \qquad \mu \neq \mu_0$$