

$(X_t)_{t \geq 0}$ catena di Markov a Tempo continuo, stoc. discret. e omogenea allora $P(t+s) = P(t)P(s) = P(s)P(t) \quad \forall s, t \geq 0$

Sia $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ successione a valori reali

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k \quad \text{se questo limite esiste.}$$

$$t \in \mathbb{R} \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k t^k \quad \text{se questo limite esiste.}$$

$$t=0 \quad \sum_{k=0}^n a_k t^k = a_0 \quad \forall n \quad \Rightarrow \text{per } t=0 \text{ la serie converge.}$$

$$I = \{t \in \mathbb{R} : \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \text{ converge}\} \quad \text{INSIEME DI CONVERGENZA.}$$

$$I = \{0\}$$

$$I = (-\delta, \delta)$$

$$I = (-\delta, \delta]$$

$$I = \mathbb{R}$$

$$I = [-\delta, \delta)$$

$$I = [-\delta, \delta]$$

Se $I \neq \{0\}$

$$f: t \in \text{int}(I) \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \in \mathbb{R}$$

- $f \in C^\infty$, e le derivate si possono calcolare addendo per addendo così come per integrali.

$$f'(t) = \frac{d}{dt} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dt} (a_k t^k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} k a_k t^{k-1} = \sum_{j=0}^{\infty} (j+1) a_{j+1} t^j \quad j = k-1$$

$$f''(t) = \frac{d}{dt} f'(t) = \frac{d}{dt} \left(\sum_{k=1}^{\infty} k a_k t^{k-1} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{dt} (k a_k t^{k-1}) =$$

$$= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k t^{k-2} = \sum_{j=0}^{\infty} (j+2)(j+1) a_{j+2} t^j \quad k = j+2$$

$$a_k = \frac{2^k}{k!}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!} t^k =$$

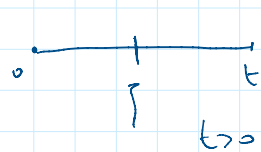
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2t)^k}{k!}$$

$$= e^{2t}$$

$$\forall t \in \mathbb{R}$$

$$\rightarrow e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \dots + \frac{t^n}{n!} + R_n(t, 0) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k$$

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \dots + \frac{t^n}{n!} + R_n(t, 0) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k$$



$$R_n(t, 0) = \frac{f^{(n+1)}(\tau)}{(n+1)!} t^{n+1}$$

$$|R_n(t, 0)| = \left| \frac{e^{\tau}}{(n+1)!} t^{n+1} \right| \leq \frac{e^t}{(n+1)!} t^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$C_n = \frac{t^n}{n!}$$

$$\frac{C_{n+1}}{C_n} = \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{t^n} = \frac{t}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\sum C_n \text{ converge} = 0 \quad C_n \rightarrow 0$$

$(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ successione di matrici $M_{N \times N}(\mathbb{R})$

$$\sum_{k=0}^{\infty} t^k A_k$$

Se $\|A_k\|$ è una qualsiasi norma sulle matrici $N \times N$ e se

$\sum_{k=0}^{\infty} \|A_k\| |t|^k$ converge, allora anche la serie $\sum_{k=0}^{\infty} t^k A_k$ converge ad una qualche matrice $N \times N$.

Fissò $Q \in M_{N \times N}(\mathbb{R}) \Rightarrow Q^k \in M_{N \times N}(\mathbb{R}) \quad \forall k \in \mathbb{N}$

Considero

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} Q^k \quad \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} t^k \right)$$

Si può dimostrare $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ per esempio con la norma 2.
 $\|Q^2\| \leq \|Q\|^2$

e per induzione $\|Q^k\| \leq \|Q\|^k$

$$\frac{|t|^k}{k!} \|Q^k\| \leq \frac{\|Q\|^k |t|^k}{k!} = \frac{(|t| \|Q\|)^k}{k!}$$

Se $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(|t| \|Q\|)^k}{k!}$ converge $\Rightarrow$ per il criterio del confronto tra serie a termini non negativi che se

$$\sum_{k=0}^{\infty} |t|^k$$

La serie a termini non negativi che ha

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|t|^k}{k!} \|Q^k\|$$
 converge e dunque converge anche

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} Q^k$$

Ma
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(|t| \|Q\|)^k}{k!} = e^{|t| \cdot \|Q\|} \Rightarrow \text{converge } \forall t \in \mathbb{R}$$

La matrice somma della serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} Q^k$ si chiama
 MATRICE ESPONENZIALE in Q e si indica con e^{tQ} o $\exp(tQ)$

$$e^{tQ} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} Q^k$$

$t=0 \quad e^{0Q} = Id \quad \forall Q \in M_{N \times N}$

$e^{tQ_1} \cdot e^{tQ_2} = e^{t(Q_1+Q_2)}$ se Q_1 e Q_2 commutano cioè
 $\Leftrightarrow Q_1 Q_2 = Q_2 Q_1$

$$e^{tQ_1} = Id + tQ_1 + \frac{t^2}{2} Q_1^2 + \frac{t^3}{3!} Q_1^3 + \dots$$

$$e^{tQ_2} = Id + tQ_2 + \frac{t^2}{2} Q_2^2 + \frac{t^3}{3!} Q_2^3 + \dots$$

$$\begin{aligned} e^{tQ_1} \cdot e^{tQ_2} &= Id + t(Q_2 + Q_1) + t^2 \left(\frac{Q_2^2}{2} + Q_1 Q_2 + \frac{Q_1^2}{2} \right) + t^3 / \dots \\ &= Id + t(Q_1 + Q_2) + \frac{t^2}{2} \left(Q_2^2 + 2 \underbrace{Q_1 Q_2 + Q_2 Q_1}_{=} + Q_1^2 \right) + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_2^2 + 2Q_1 Q_2 + Q_1^2 &= Q_2^2 + Q_1 Q_2 + Q_2 Q_1 + Q_1^2 = \\ &= (Q_2 + Q_1) Q_2 + (Q_2 + Q_1) Q_1 = (Q_2 + Q_1)^2 \end{aligned}$$

e analogo per i termini di grado superiore -

$Q_1 = Q_2 = Q$

$e^{tQ} \cdot e^{tQ} = e^{t(Q+Q)} \quad (e^{tQ})^2 = e^{2tQ}$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$$

$$e^{tQ} \cdot e^{tQ} = e^{t(Q+Q)} \quad (e^{tQ})^2 = e^{2tQ}$$

$$e, \text{ per induzione } (e^{tQ})^n = e^{ntQ}$$

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad e^{tQ} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} Q^k$$

$$\Rightarrow \forall t \in \mathbb{R} \quad \frac{d}{dt} e^{tQ} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dt} \left(\frac{t^k}{k!} Q^k \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k t^{k-1}}{k!} Q^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} Q^k \quad j=k-1$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} Q^{j+1} \quad \text{(green circle around } Q^{j+1} \text{)} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} Q \cdot Q^j = Q \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} Q^j = Q e^{tQ}$$

(Note: A red arrow points from the green circle to the final result, and a green arrow points from the term Q^{j+1} to $Q \cdot Q^j$)

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \frac{d}{dt} e^{tQ} = Q e^{tQ}$$

Cioè la funzione $t \in \mathbb{R} \mapsto e^{tQ} \in M_{N \times N}(\mathbb{R})$ è soluzione dell'eq differenziale $\dot{P}(t) = Q P(t)$

$$\textcircled{*} \quad \frac{d}{dt} e^{tQ} = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} Q^j \right) Q = e^{tQ} \cdot Q$$

$$\Rightarrow e^{tQ} \text{ soddisfa anche } \dot{P}(t) = P(t) Q$$

La funzione e^{tQ} , $t \in \mathbb{R}$, allora risolve il pb di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{P}(t) = Q P(t) & (\dot{P}(t) = P(t) Q) \\ P(0) = Id \end{cases}$$

Pb di Cauchy associato ad una EDO lineare omogenea del 1° ordine e coeffi costanti -

$$\Rightarrow \exists! \text{ soluzione } P: t \in \mathbb{R} \mapsto P(t) \in M_{N \times N}(\mathbb{R})$$

$\Rightarrow$ La funzione esponenziale

=> La funzione esponenziale

$$t \in \mathbb{R} \mapsto e^{tQ} \in M_{N \times N}(\mathbb{R})$$

e' l'unica soluzione di questo pb di Cauchy -

CHAPMAN-KOLMOGOROV, $S = \{1, \dots, N\}$

$$P(s+t) = P(s)P(t) \quad \forall s, t \geq 0$$

$$\frac{d}{ds} P(s+t) = \frac{d}{ds} (P(s)P(t))$$

$$\dot{P}(s+t) \cdot 1 = \dot{P}(s) P(t) \quad \forall s, t \geq 0$$

Calcolo in $s=0$

$$\dot{P}(t) = \dot{P}(0^+) P(t) \quad \forall t \geq 0$$

Pongo $Q := \dot{P}(0^+)$ => la matrice di Transizione $P(t)$

$$\text{risolve l'eq. diff. } \begin{cases} \dot{P}(t) = QP(t) \\ P(0) = Id \end{cases}$$

=> La matrice di Transizione di una catena di Markov discreta a Tempi continui e stati finiti e' necessariamente della forma $P(t) = e^{tQ}$ con $Q = \dot{P}(0^+)$

Q-MATRICE

Una matrice $Q \in M_{N \times N}(\mathbb{R})$ si dice una Q-matrice se:

$$1) Q_{ij}^i \geq 0 \quad \forall i, j \in \{1, \dots, N\}, i \neq j$$

$$2) \sum_{j=1}^N Q_{ij}^i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, N$$

$$0 = \sum_{j=1}^N Q_{ij}^i = Q_{ii}^i + \sum_{j \neq i} Q_{ij}^i \Rightarrow Q_{ii}^i = - \sum_{j \neq i} Q_{ij}^i \leq 0$$

Soit Q une Q -matrice

$$\lambda \geq \max \{ |Q_{ij}^i| : i, j = 1 \dots N \} = \max \{ -Q_{ii}^i : i = 1 \dots N \}$$

On a $R = R(\lambda) = I_d + \frac{1}{\lambda} Q$ $N \times N$

$$R_{ij}^i = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} Q_{ij}^i > 0 & i \neq j \\ 1 + \frac{1}{\lambda} Q_{ii}^i > 0 & i = j \end{cases}$$

$$1 + \frac{1}{\lambda} Q_{ii}^i > 0 \iff \frac{\lambda + Q_{ii}^i}{\lambda} > 0 \iff$$

$$\lambda > -Q_{ii}^i \quad \forall i = 1 \dots N$$

$$\sum_{j=1}^N R_{ij}^i = \sum_{j=1}^N \left(I_d + \frac{1}{\lambda} Q \right)_{ij}^i = 1 + \frac{1}{\lambda} \underbrace{\sum_{j=1}^N Q_{ij}^i}_{=0} = 1 \quad \forall i$$

$\Rightarrow R$ est une matrice stochastique.

$$e^{tQ} \quad R = I_d + \frac{1}{\lambda} Q \quad Q = \lambda(R - I_d)$$

$$P(t) = e^{tQ} = e^{t\lambda(R - I_d)} = e^{t\lambda R} \cdot e^{-t\lambda I_d} \quad (*)$$

$$e^{-t\lambda I_d} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-t\lambda)^k}{k!} \underbrace{I_d^k}_{I_d \quad \forall k \in \mathbb{N}} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-t\lambda)^k}{k!} \right) I_d = e^{-\lambda t} \cdot I_d$$

$$(*) \quad P(t) = e^{t\lambda R} \cdot e^{-\lambda t} \cdot I_d = e^{-\lambda t} \cdot e^{t\lambda R}$$

PROP Soit $Q \in M_{N \times N}(\mathbb{R})$.

Alors Q est une Q -matrice sse e^{tQ} est une matrice stochastique $\forall t \geq 0$.

DM 1) Si e^{tQ} est stochastique $\forall t \geq 0 \Rightarrow Q$ est une Q -matrice.

Soit que e^{tQ} résout le pb de Cauchy

Se due e^{tQ} risolve il pb di Cauchy

$$\dot{P}(t) = Q P(t)$$

$$P(0) = Id$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{P(t) - Id}{t-0} = \dot{P}(0^+) = Q \cdot P(0^+) = Q \cdot Id = Q$$

È un'uguaglianza tra matrici: lo guardo componente per componente

Siano $i, j \in \{1, \dots, N\}$ con $i \neq j$

$$Q_{ij}^i = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{P(t)_{ij}^i - Id_{ij}^i}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{P(t)_{ij}^i}{t} \stackrel{\geq 0 \forall t \geq 0}{\geq 0}$$

$$\sum_{j=1}^N Q_{ij}^i = \sum_{j=1}^N \left(\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{P(t)_{ij}^i - Id_{ij}^i}{t} \right) =$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} \sum_{j=1}^N (P(t)_{ij}^i - Id_{ij}^i) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} \left(\underbrace{\left(\sum_{j=1}^N P(t)_{ij}^i \right)}_{=1 \forall t} - \underbrace{\sum_{j=1}^N Id_{ij}^i}_{=1} \right) = 0$$

$\Rightarrow Q$ è una Q-matrice -

2) Q è una Q-matrice $\Leftrightarrow e^{tQ}$ è stocastica $\forall t \geq 0$

$$e^{tQ} \quad \lambda \geq \max \{ -Q_{ii}^i : i=1, \dots, N \}$$

$$R = Id + \frac{1}{2} Q \Rightarrow R \text{ è stocastica e}$$

$$e^{tQ} = e^{-\lambda t} \cdot e^{2\lambda t R}$$

$$(e^{tQ})_{ij}^i = e^{-\lambda t} (e^{2\lambda t R})_{ij}^i = e^{-\lambda t} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2\lambda t)^k}{k!} R^k \right)_{ij}^i =$$

$$= e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2\lambda t)^k}{k!} \underbrace{(R^k)_{ij}^i}_{\geq 0} \geq 0 \quad \forall i, j$$

≥ 0 perché R^k stocastica

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^N (e^{tQ})_{ij}^i &= e^{-\alpha t} \sum_{j=1}^N (e^{2tR})_{ij}^i = \\
&= e^{-\alpha t} \sum_{j=1}^N \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha t)^k}{k!} (R^k)_{ij}^i = \\
&= e^{-\alpha t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha t)^k}{k!} \underbrace{\sum_{j=1}^N (R^k)_{ij}^i}_{=1} = e^{-\alpha t} \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha t)^k}{k!}}_{e^{\alpha t}} \\
&= e^{-\alpha t} \cdot e^{\alpha t} = 1.
\end{aligned}$$

Corollario Sia $P(t) = e^{tQ}$ con Q una Q -matrice $N \times N$.

Siano $i, j \in \{1, \dots, N\}$.

Sono fatti equivalenti:

1) $\exists t_0 > 0$ T.c. $P(t_0)_{ij}^i > 0$

2) $P(t)_{ij}^i > 0 \quad \forall t > 0$

DM $2 \Rightarrow 1$ ovvio

$1 \Rightarrow 2$ Sia $t_0 > 0$ T.c. $P(t_0)_{ij}^i > 0$

e per assurdo $\exists \bar{t} > 0$ T.c. $P(\bar{t})_{ij}^i = 0$

$$0 = P(\bar{t})_{ij}^i = e^{-\alpha \bar{t}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha \bar{t})^k}{k!} (R^k)_{ij}^i \quad \text{con } R \text{ come prima.}$$

$$\text{Dove essere } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha \bar{t})^k}{k!} (R^k)_{ij}^i = 0$$

$$\Rightarrow \frac{(\alpha \bar{t})^k}{k!} (R^k)_{ij}^i = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow (R^k)_{ij}^i = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$0 < P(t_0)_{ij}^i = e^{-\alpha t_0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha t_0)^k}{k!} \underbrace{(R^k)_{ij}^i}_{=0 \quad \forall k} = 0$$

$$P(t: x \in \mathcal{I})_{L_0} \times P(t) \in \mathcal{I}$$

Lemma Sia Q una Q -matrice $N \times N$ e sia $P(t) = e^{tQ}$

Sia $w \in \mathcal{I} \subset (\mathbb{R}^N)^*$

Allora

1) Se $\exists t_0 > 0$ T.c. w è l'unico pto fisso di $P(t_0)$,

$P(t_0): x \in \mathcal{I} \mapsto x P(t_0) = x e^{t_0 Q} \in \mathcal{I}$, allora $wQ = 0$

2) $wQ = 0$ sse $w = w P(t) \quad \forall t > 0$

Dim Sia $t_0 > 0$ e sia w il suo unico pto fisso.

$$P(t_0) = e^{t_0 Q} = e^{\frac{t_0}{n} Q} = \left(e^{\frac{t_0}{n} Q} \right)^n$$

$$P(t_0) = \left(P\left(\frac{t_0}{n}\right) \right)^n$$

$P(t_0)$ è l'iterata n -esima dell'applicazione $P\left(\frac{t_0}{n}\right)$

$\Rightarrow w$ è anche l'unico pto fisso di $P\left(\frac{t_0}{n}\right)$

$$w = w P\left(\frac{t_0}{n}\right) = w e^{\frac{t_0}{n} Q} = w \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{t_0}{n}\right)^k \frac{1}{k!} Q^k =$$

$$= w \left(\text{Id} + \frac{t_0}{n} Q + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{t_0}{n}\right)^k \frac{1}{k!} Q^k \right)$$

$$\text{Considero } \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{t_0}{n}\right)^k \frac{1}{k!} Q^k = \frac{1}{n^2} \underbrace{\sum_{k=2}^{\infty} \frac{t_0^k}{n^{k-2} k!} Q^k}_{\text{...}}$$

$$\left\| \frac{t_0^k}{n^{k-2} k!} Q^k \right\| \leq \frac{|t_0|^k}{k!} \|Q\|^k \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|t_0|^k}{k!} \|Q\|^k = e^{|t_0| \|Q\|}$$

$$\Rightarrow \left\| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{t_0^k}{n^{k-2} k!} Q^k \right\| \leq C$$

$$A(n) := \sum_{k=2}^{\infty} \frac{t_0^k}{n^{k-2} k!} Q^k \quad \|A(n)\| \leq C$$

$$\cancel{w} = w \left(\cancel{\text{Id}} + \frac{t_0}{n} Q + \frac{1}{n^2} A(n) \right)$$

$$0 = \frac{t_0}{n} w Q + \frac{1}{n^2} w A(n)$$

$$0 = t_0 w Q + \frac{1}{n} w A(n)$$

$$n \rightarrow \infty \quad t_0 w Q = 0$$

Per ipotesi: $t_0 > 0 \Rightarrow w Q = 0$

2) $w Q = 0$ sse $w = w P(t) \quad \forall t > 0$

a) $w Q = 0 \quad P(t) = e^{tQ} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} Q^k$

$$w P(t) = w \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} Q^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} w Q^k =$$

$$w + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \underbrace{w Q^k}_{=0 \quad \forall k \geq 1} = w$$

$$k \geq 1 \quad w Q^k = w Q Q^{k-1} = 0 Q^{k-1} = 0$$

b) $w = w P(t) \quad \forall t > 0$

$$w = w P(t) = w e^{tQ} = w \left(\text{Id} + tQ + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{t^k}{k!} Q^k \right) \leftarrow$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{t^k}{k!} Q^k = t^2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{t^{k-2}}{k!} Q^k$$

$$\forall t \in (0, 1) \quad \left\| \frac{t^{k-2}}{k!} Q^k \right\| \leq \frac{|t|^{k-2}}{k!} \|Q\|^k \leq \frac{\|Q\|^k}{k!}$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} \left\| \frac{t^{k-2}}{k!} Q^k \right\| \leq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\|Q\|^k}{k!} = e^{\|Q\|}$$

$\Rightarrow$ Le serie matriciali $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{t^{k-2}}{k!} Q^k$ converge, $\forall t \in (0, 1]$

ad una matrice $A(t)$ con $\|A(t)\| \leq e^{\|Q\|}$

$$\dot{w} = w + w t Q + w t^2 A(t)$$

$$wQ + t w A(t) = 0 \quad \forall t > 0$$

Quando $t \rightarrow 0^+$ $t A(t) \rightarrow 0$ perché $\|A(t)\|$ è limitata
 $\Rightarrow wQ = 0$.

TEOREMA Sia, per $t > 0$, $P(t) = e^{tQ}$ matrice fondamentale.
 Sono fatti equivalenti:

- 1) $\exists t_0 > 0$ t.c. $P(t_0)$ è invertibile.
- 2) $\exists w \in \mathcal{Y}$ t.c. $\lim_{t \rightarrow \infty} x P(t) = w \quad \forall x \in \mathcal{Y}$

In tal caso

- a) w è l'unico vettore fisso t.c. $wQ = 0$
- b) Le componenti di w sono tutte strettamente positive
- c) $\exists C < 1$ t.c. $\|x P(t) - w\|_1 \leq C e^{-Ct} \quad \forall x \in \mathcal{Y} \quad \forall t > 0$ ←

DM. 1 $\Rightarrow$ 2

$P(t_0)$ invertibile : $\forall i, j \in \{1, \dots, N\} \exists n = n(i, j)$ t.c.

$$\left(P(t_0)^n \right)_j^i > 0$$

$$= \left(\left(e^{t_0 Q} \right)^n \right)_j^i = \left(e^{n t_0 Q} \right)_j^i = \left(P(n t_0) \right)_j^i$$

cioè $\forall i, j \exists \bar{t} = \bar{t}(i, j)$ t.c. $P(\bar{t})_j^i > 0$

Di conseguenza $P(t)_j^i > 0 \quad \forall t > 0 \quad \forall i, j$

Fissato $t > 0$: si che l'applicazione

$\underline{P}(t) : x \in \mathcal{Y} \mapsto x P(t) \in \mathcal{Y}$ è una contrazione di $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_1)$
 in sé stessa -

$\Rightarrow \exists ! w(t) \in \mathcal{Y}$ punto fisso di $\underline{P}(t)$

ed è anche il suo unico pto fisso -

$$\Rightarrow w(t)Q = 0 \Rightarrow w(t)P(s) = w(t) \quad \forall s > 0$$

Se $s \neq t$, anche $\underline{I}(s)$ è una contrazione = 0

$\exists! w(s) \in \mathcal{J}$ punto per $\underline{I}(s)$

ed è anche il suo unico pto fisso $\Rightarrow w(s)Q = 0$

$$\Rightarrow w(s)P(t) = w(s) \quad \forall t > 0$$

$$\Rightarrow w(s) = w(t)$$

$$\Rightarrow \forall w(t) \equiv w \in \mathcal{J} \quad \forall t > 0 -$$

$\exists! w \in \mathcal{J}$ t.c. $xP(t)^k \rightarrow w$ per $k \rightarrow \infty$, $\forall t > 0$ $\forall x \in \mathcal{J}$.

$$C(t) = \frac{1}{2} \max \{ \|R^i(t) - R^j(t)\|_2 \mid i, j = 1 \dots N \}$$

con $R^1(t) \dots R^N(t)$ righe della matrice $P(t)$ -

Sicuramente $C(t) < 1 \quad \forall t > 0$

$$P(t) = e^{tQ}$$

$$\|R^i(t) - R^j(t)\|_2 =$$

$$C(t) \quad t \in [1, 2]$$

$$C := \max \{ C(t) : t \in [1, 2] \} < 1$$

$$\|xP(t)^k - w\|_2 \leq C^k \text{diam}(\mathcal{J}) \quad t \in [1, 2]$$
$$= 2C^k$$

$$s \geq 1 \quad \lfloor s \rfloor \geq 1 \quad 1 \leq \frac{s}{\lfloor s \rfloor} \leq 2$$

$$\frac{s}{\lfloor s \rfloor} \leq 2 \Leftrightarrow s \leq 2\lfloor s \rfloor$$

$$\text{Sicuramente } \lfloor s \rfloor \leq s < 1 + \lfloor s \rfloor$$

Se dimostri che $1 + \lfloor s \rfloor \leq 2\lfloor s \rfloor$ solo e solo

Questa è equivalente a $\lfloor s \rfloor \geq 1$ che è esattamente

che per cui ho peso $s \geq 1$.

$$t := \frac{s}{Ls_j} \in [1, 2]$$

$$\| x P\left(\frac{s}{Ls_j}\right)^k - w \|_1 \leq 2C^k$$

$$s = Ls_j \frac{s}{Ls_j} \Rightarrow P(s) = P\left(Ls_j \frac{s}{Ls_j}\right) = e^{Ls_j \frac{s}{Ls_j} Q} = \left(e^{\frac{s}{Ls_j} Q}\right)^{Ls_j} = \left(P\left(\frac{s}{Ls_j}\right)\right)^{Ls_j}$$

$$\| x P(s) - w \|_1 \leq 2C^{Ls_j}$$

CATENA DI MARKOV OMOGENEA A DUE STATI

$$P(t) = e^{Qt}$$

$$Q \text{ una } Q\text{-matrice } 2 \times 2 \quad Q = \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha \\ \beta & -\beta \end{pmatrix} \quad \alpha, \beta \geq 0$$

$$\alpha = \beta = 0 \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= e^{tQ} = Id \quad \forall t$$

$$P(t) = e^{tQ} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\alpha + \beta > 0$

Caso di diagonalizzare Q

$$Q - \lambda Id = \begin{pmatrix} -\alpha - \lambda & \alpha \\ \beta & -\beta - \lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(Q - \lambda Id) &= (\lambda + \alpha)(\lambda + \beta) - \alpha\beta \\ &= \lambda^2 + (\alpha + \beta)\lambda \\ &= \lambda(\lambda + (\alpha + \beta)) \end{aligned}$$

$$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = -(\alpha + \beta) \neq \lambda_1$$

Caso gli autovettori

$$Qv_1 = \lambda_1 v_1 \quad Qv_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\alpha & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} -\alpha x + \alpha y = 0 \\ \alpha(x - y) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} -\alpha & \alpha \\ \beta & -\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} -\alpha x + \alpha y = 0 \\ \beta x - \beta y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha(x-y) = 0 \\ \beta(x-y) = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow x=y \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$Qv_2 = \lambda_2 v_2 \quad \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha \\ \beta & -\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -(\alpha + \beta) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -\cancel{\alpha}x + \alpha y = -(\cancel{\alpha} + \beta)x \\ \beta x - \cancel{\beta}y = -(\alpha + \cancel{\beta})y \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha y + \beta x = 0 \\ \alpha y + \beta x = 0 \end{cases}$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} -\alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$$M = (v_1, v_2) = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ 1 & \beta \end{pmatrix}$$

$$Q = M \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} M^{-1}$$

$$e^{tQ} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} Q^k$$

$$Q^2 = M \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \cancel{M^{-1}} \cancel{M} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} M^{-1}$$

Per induction $Q^k = M \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}^k M^{-1} =$

$$= M \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 \\ 0 & \lambda_2^k \end{pmatrix} M^{-1}$$

$$M^{-1} = \frac{1}{\alpha + \beta} \begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$