

$(X_t)_{t \geq 0}$ processo stocastico a Tempo continuo e insieme degli stat. discreto -

$$(P(s, t); i)_{i, j \in S} \quad P(s, t)_j = \begin{cases} P(X_t = j | X_s = i) & P(X_s = i) > 0 \\ \delta_{ij} & P(X_s = i) = 0 \end{cases}$$

$$0 \leq s \leq t$$

$$\Rightarrow P(s, s) = Id \quad \forall s \geq 0$$

$\forall 0 \leq s \leq t$ $P(s, t)$ è una matrice stocastica -

$$\forall 0 \leq s \leq t \quad \forall i, j \in S \quad P(X_t = j) = \sum_{i \in S} P(X_s = i) P(X_t = j | X_s = i)$$

$$\forall 0 \leq s \leq t \quad \begin{aligned} (\pi(s)_i)_{i \in S} & \quad \pi(s)_i = P(X_s = i) \\ (\pi(t)_i)_{i \in S} & \quad \pi(t)_i = P(X_t = i) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \pi(t) = \pi(s) P(s, t) \quad \forall 0 \leq s \leq t$$

Il processo stocastico si dice omogeneo se

$$P(s, t) = P(s+h, t+h) \quad \forall 0 \leq s \leq t \quad \forall h \text{ t.c. } s+h \geq 0$$

$$\text{Scelgo } h = -s \quad P(s, t) = P(0, t-s)$$

$$P(t) := P(t, 0) \quad \Rightarrow P(s, t) = P(0, t-s) \text{ se il processo è omogeneo -}$$

$$\text{Fisso } \omega \in \Omega \quad t \in [0, +\infty) \mapsto X_t(\omega) \in S$$

Sia $(X_t)_{t \geq 0}$ un processo stocastico a Tempo continuo e spazio degli stati S discreto -

Dico che il processo è un processo stocastico continuo de destra se

$$\exists \Omega_0 \subset \Omega \quad \mathbb{P}(\Omega_0) = 1 \quad \text{t.c.} \quad \forall \omega \in \Omega_0$$

la mappa $t \in [0, +\infty) \mapsto X_t(\omega) \in S$ è continua da destra -

$$X_0(\omega) = i_0$$

$$\exists t_1 \text{ t.c. } X_t(\omega) = i_0 \quad \forall t \in [0, t_1) \quad t_1 = t_1(\omega)$$

$$\exists t_2 = t_2(\omega) > t_1(\omega) \text{ t.c. } X_t(\omega) \equiv X_{t_2}(\omega) \quad \forall t \in [t_2, t_2)$$

- - -

Fissato un intervallo $[a, b)$, fissato $i \in S$

$$A = \left\{ \omega \in \Omega : X_t(\omega) = i \quad \forall t \in [a, b) \right\}$$

$$\left\{ \omega \in \Omega : X_t(\omega) = i \right\} \in \mathcal{E} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$A = \bigcap_{t \in [a, b)} \left\{ \omega \in \Omega : X_t(\omega) = i \right\}$$

Non è un'intersezione numerabile $\Rightarrow$ non posso affermare che A è necessariamente un evento -

- -

$t \in [0, +\infty)$ - Sia $\mathcal{D}$ denso in $[0, +\infty)$ e numerabile

Fissato $[a, b)$ Considero $A = \left\{ \omega \in \Omega : X_t(\omega) = i \quad \forall t \in [a, b) \right\}$

Considero $B = \left\{ \omega \in \Omega : X_t(\omega) = i \quad \forall t \in [a, b) \cap \mathcal{D} \right\}$

$$= \bigcap_{t \in [a, b) \cap \mathcal{D}} \left\{ \omega \in \Omega : X_t(\omega) = i \right\}$$

Sicuramente $B \supseteq A$ -

PROP. $(X_t)_{t \geq 0}$ un processo stocastico a valori in S discreto e continuo da destra -

Cioè $\Omega_0 \subset \Omega$ T.c. $P(\Omega_0) = 1$ e la mappa

$t \in [0, +\infty) \mapsto X_t(\omega) \in S$ è continua da destra $\forall \omega \in \Omega_0$

Allora $\forall 0 \leq a < b$ l'insieme $B \setminus A \subset \Omega \setminus \Omega_0$ -

SPAZIO PROBABILIZZATO

Sia $(\Omega, \mathcal{E}, P)$ uno spazio probabilizzato - dico che $(\Omega, \mathcal{E}, P)$ è uno spazio probabilizzato completo se per ogni insieme $A \subset \Omega$ per il quale $\exists \Omega_A$ evento di probabilità nulla T.c. $A \subseteq \Omega_A$, si ha $A \in \mathcal{E}$ -

OSS. Sia $(X_t)_{t \geq 0}$ processo stocastico continuo da destra, e stati discreti S su uno spazio probabilizzato completo $(\Omega, \mathcal{E}, P)$

Per $0 \leq a < b$ $A := \{\omega \in \Omega : X_t(\omega) = i \ \forall t \in [a, b]\}$,
 $B := \{\omega \in \Omega : X_t(\omega) = i \ \forall t \in [a, b) \cap \mathcal{D}\}$

Abbiamo detto che $B \setminus A \subseteq \Omega \setminus \Omega_0$ con $P(\Omega \setminus \Omega_0) = 0$
 $\Rightarrow B \setminus A \in \mathcal{E}$ e $P(B \setminus A) = 0$

$A = B \setminus (B \setminus A) \in \mathcal{E}$.



$$P(A) = P(B) - P(B \setminus A) = P(B)$$

PROP Sia $(\Omega, \mathcal{E}, P)$ spazio probabilizzato completo -

Sia $(X_t)_{t \geq 0}$ processo stocastico su $(\Omega, \mathcal{E}, P)$ e valori in S discreti e continuo da destra

Allora $\forall 0 \leq s < t$ $\lim_{t \downarrow s} P(s, t) = Id$ ($= P(s, s)$)

Altre $\forall 0 \leq s < t$ $\lim_{t \rightarrow s^+} P(s, t) = Id \quad (= P(s, s))$

dim $\exists \Omega_0 \subset \Omega \quad P(\Omega_0) = 1$ T.c. $t \in [0, +\infty) \mapsto X_t(\omega) \in S$

è continua da destra -

Sia $t_n \downarrow s$ - Basterà dimostrare che $\lim_{n \rightarrow \infty} P(s, t_n) = Id$.

Comincio dagli elementi diagonali.

$$\{\omega \in \Omega_0 : X_s(\omega) = i\} = \{\omega \in \Omega_0 : \exists \bar{n} = \bar{n}(\omega) \text{ T.c. } X_{t_n}(\omega) = i \quad \forall n \geq \bar{n}\} =$$

$$= \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\omega \in \Omega_0 : X_{t_k}(\omega) = i \quad \forall k \geq n\}$$

$$= \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} \{\omega \in \Omega_0 : X_{t_k}(\omega) = i\} \quad A_n \quad A_n \subseteq A_{n+1}$$

$$1 = Id_i^i = P(s, s)_i^i = P(X_s = i \mid X_s = i) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n \mid X_s = i) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} \{\omega \in \Omega_0 : X_{t_k}(\omega) = i\} \mid X_s = i\right)$$

$$\leq \lim_{n \rightarrow \infty} P(\{\omega \in \Omega_0 : X_{t_n}(\omega) = i\} \mid X_s = i) \leq 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} P(\{\omega \in \Omega_0 : X_{t_n}(\omega) = i\} \mid X_s = i) = 1$$

$\{X_{t_n} = i\}$ differisce da $\{\omega \in \Omega_0 : X_{t_n}(\omega) = i\}$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} P(X_{t_n} = i \mid X_s = i) = 1 \quad \text{cioè}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(s, t_n)_i^i = 1$$

$$\lim_{t \rightarrow s^+} P(s, t)_i^i = 1$$

$$\begin{aligned} \text{Prendo } i \neq j \quad P(s, t)_j^i &= P(X_t = j \mid X_s = i) \leq \\ \{X_t = j\} &\subseteq \{X_t \neq i\} & P(X_t \neq i \mid X_s = i) = \\ \{X_t \neq i\} &= \Omega \setminus \{X_t = i\} & = 1 - P(X_t = i \mid X_s = i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{se } i \neq j \text{ e } 0 \leq s < t & \Rightarrow 0 \leq P(s, t)_j^i \leq 1 - \underbrace{P(X_t = i \mid X_s = i)}_{\substack{\downarrow \\ 1}} \\ \text{Quando } t \rightarrow s^+ & \\ \Rightarrow \lim_{t \rightarrow s^+} P(s, t)_j^i &= 0 \quad \forall i \neq j \end{aligned}$$

DEF. Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato completo, sia $(X_t)_{t \geq 0}$ processo stocastico su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, a stat. discreti (S sia l'insieme degli stati) e continuo da destra.

Dico che $(X_t)_{t \geq 0}$ è una catena di Markov a Tempo continuo (CTMC) se

$$\forall n \geq 0 \quad \forall 0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} \text{ e}$$

$$\forall i_0, i_1, \dots, i_{n-1} \in S \quad \text{T.c.}$$

$$P(X_{t_{n-1}} = i_{n-1}, X_{t_{n-2}} = i_{n-2}, \dots, X_{t_n} = i_n, X_{t_0} = i_0) > 0$$

si ha per ogni $t_n > t_{n-1}$ e $\forall j \in S$

$$P(X_{t_n} = j \mid X_{t_{n-1}} = i_{n-1}, X_{t_{n-2}} = i_{n-2}, \dots, X_{t_0} = i_0) = P(X_{t_n} = j \mid X_{t_{n-1}} = i_{n-1})$$

- o -

Sia $(N_t)_{t \geq 0}$ processo di Poisson

$$0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n$$

$$\begin{aligned}
& P(N_{t_n} = j \mid N_{t_{n-1}} = i_{n-1}, N_{t_{n-2}} = i_{n-2}, \dots, N_{t_1} = i_1, N_{t_0} = i_0) = \\
& \frac{P(N_{t_n} = j, N_{t_{n-1}} = i_{n-1}, N_{t_{n-2}} = i_{n-2}, \dots, N_{t_1} = i_1, N_{t_0} = i_0, N_0 = 0)}{P(N_{t_{n-1}} = i_{n-1}, N_{t_{n-2}} = i_{n-2}, \dots, N_{t_1} = i_1, N_{t_0} = i_0, N_0 = 0)} \\
& = \frac{P(N_0 = 0, N_{t_0} - N_0 = i_0 - 0, N_{t_1} - N_{t_0} = i_1 - i_0, \dots, N_{t_{n-1}} - N_{t_{n-2}} = i_{n-1} - i_{n-2}, N_{t_n} - N_{t_{n-1}} = j - i_{n-1})}{P(N_0 = 0, N_{t_0} - N_0 = i_0 - 0, \dots, N_{t_{n-1}} - N_{t_{n-2}} = i_{n-1} - i_{n-2})} \\
& = \frac{P(N_{t_0} = i_0) P(N_{t_1} - N_{t_0} = i_1 - i_0) \dots P(N_{t_{n-1}} - N_{t_{n-2}} = i_{n-1} - i_{n-2}) P(N_{t_n} - N_{t_{n-1}} = j - i_{n-1})}{P(N_{t_0} = i_0) P(N_{t_1} - N_{t_0} = i_1 - i_0) \dots P(N_{t_{n-1}} - N_{t_{n-2}} = i_{n-1} - i_{n-2})} \\
& = P(N_{t_n} - N_{t_{n-1}} = j - i_{n-1}) \\
& P(N_{t_n} = j \mid N_{t_{n-1}} = i_{n-1}) = \frac{P(N_{t_n} = j, N_{t_{n-1}} = i_{n-1})}{P(N_{t_{n-1}} = i_{n-1})} \\
& = \frac{P(N_{t_{n-1}} = i_{n-1}, N_{t_n} - N_{t_{n-1}} = j - i_{n-1})}{P(N_{t_{n-1}} = i_{n-1})} \\
& = \frac{P(N_{t_{n-1}} = i_{n-1}) P(N_{t_n} - N_{t_{n-1}} = j - i_{n-1})}{P(N_{t_{n-1}} = i_{n-1})}
\end{aligned}$$

$$P(s, t)_j^i = P(N_t - N_s = j - i) = P(N_{t-s} = j - i)$$

$$P(t)_j^i = P(0, t)_j^i = P(N_t = j - i) =$$

$$j - i < 0 \Rightarrow P(t)_j^i = 0$$

→ $i, j \geq 0$

$$j-i < 0 \Rightarrow P(t)^i_j = 0$$

$$j-i \geq 0 \Rightarrow P(t)^i_j = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!}$$

$i=0 \rightarrow$	$\begin{matrix} j=0 \\ \downarrow \\ e^{-\lambda t} \end{matrix}$	$e^{-\lambda t} \cdot \lambda t$	$e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^2}{2}$	$e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^3}{3!}$	$\dots$
$i=1 \rightarrow$	0	$e^{-\lambda t}$	$e^{-\lambda t} \lambda t$	$e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^2}{2}$	$\dots$
	0	0	$e^{-\lambda t}$	$e^{-\lambda t} \cdot \lambda t$	$\dots$
	0	0			$\dots$

EQUAZIONI DI CHAPMAN-KOLMOGOROV

Sia $(X_t)_{t \geq 0}$ catena di Markov a Tempo continuo con insieme degli stati S discreto - Sia $P(s, t)$ per $0 \leq s \leq t$, la matrice di transizione.

Allora $\forall 0 \leq s < z < t$ vale $P(s, t) = P(s, z)P(z, t)$
e $P(s, s) = Id$

$$\begin{cases} P(s, t) = P(s, z)P(z, t) \\ P(s, s) = Id. \end{cases}$$

si dicono Eq di Chapman Kolmogorov.

Din

$$\forall i, j \in S \quad P(s, t)^i_j = P(X_t = j | X_s = i) =$$

$$= \sum_{k \in S} P(X_t = j, X_z = k | X_s = i)$$

$$= \sum_{k \in S} \frac{P(X_t = j, X_z = k, X_s = i)}{P(X_z = k, X_s = i)} \frac{P(X_z = k, X_s = i)}{P(X_s = i)} \quad \left| \begin{array}{l} \{X_t = j\} = \\ \bigcup_{k \in S} \{X_t = j, X_z = k\} \end{array} \right.$$

$$= \sum_{k \in S} P(X_t = j | X_z = k, X_s = i) P(X_z = k | X_s = i)$$

$$= \sum_{k \in S} P(z, t)_j^k P(s, z)_k^i = \left(P(s, z) P(z, t) \right)_j^i$$

$$\Rightarrow P(s, t) = P(s, z) P(z, t)$$

Se la chaîne $(X_t)_{t \geq 0}$ est homogène :

$$P(s, t) = P(t-s)$$

$$P(s, z) = P(z-s)$$

$$P(z, t) = P(t-z)$$

$$P(t-s) = P(z-s) P(t-z)$$

$$t-z = \theta_1 \geq 0$$

$$z-s = \theta_2 \geq 0$$

$$\Downarrow$$

$$t-s = \theta_1 + \theta_2$$

$$P(\theta_1 + \theta_2) = P(\theta_2) P(\theta_1)$$

$$\forall \theta_1, \theta_2 \geq 0$$

$$\overset{''}{P}(\theta_2 + \theta_1) = P(\theta_1) P(\theta_2)$$