

S insieme finito, $f: S \rightarrow \mathbb{R}$

$j \in S \quad z_j > 0$ peso assegnato $\sum_{j \in S} f(j) z_j$

$(S, \mathcal{P}(S), \mu)$ spazio di misura con $\mu(\{j\}) = z_j \quad \forall j \in S$

$z := \sum_{j \in S} z_j > 0$ Pongo $\pi_j = \frac{z_j}{z} \quad \forall j \in S$

Ovviamente $\pi_j > 0 \quad \forall j \in S$

$$\sum_{j \in S} \pi_j = \sum_{j \in S} \frac{z_j}{z} = \frac{1}{z} \sum_{j \in S} z_j = \frac{1}{z} \cdot z = 1$$

$$\sum_{j \in S} f(j) z_j = \sum_{j \in S} f(j) \pi_j \cdot z = z \sum_{j \in S} f(j) \pi_j$$

Supponiamo che $P = (p_{ij})_{i,j \in S}$ sia una matrice stocastica

regolare, indicizzata su S e $t_0 \quad \pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_N)$

è un passo dell'applicazione lineare associata $N := \#S$

$\mathbb{I}: x \in \mathcal{I} \mapsto xP \in \mathcal{I}$ dove $\mathcal{I}$ = insieme dei vettori
stocastici di $(\mathbb{R}^N)^+$

Se misco e produrre $P = v$ so produrre anche una
catena di Markov omogenea a valori in S / e avente
 $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definita su uno spazio $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

P come matrice di Transizione

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(X_k(\omega)) \quad \omega \in \Omega$$

Per $p_0 \quad \omega \in \Omega \quad \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(X_k(\omega)) \rightarrow \sum_{j \in S} f(j) \frac{1}{\pi_j}$

con $\frac{1}{\pi_j} = \pi_j$ Quindi: $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(X_k(\omega)) \rightarrow \sum_{j \in S} f(j) \pi_j$
 $p_0 \quad \omega \in \Omega$

1° caso Se gli π_j sono tutti uguali

$$z_j = z > 0 \quad z = \sum_{j \in S} z = zN \quad \pi_j = \frac{z}{zN} = \frac{1}{N}$$

P stocastica regolare $N \times N$ T.c. $\pi = (\frac{1}{N}, \dots, \frac{1}{N})$

ma suo passo -

Basta prendere $P = \left(\frac{1}{N} \right)_{i,j=1, \dots, N}$

Basta prendere $P = \left(\frac{1}{N}\right)_{i,j=1-N}$

$$(\pi P)_j = \sum_{i=1}^N \pi_i P_{ij} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{N} \cdot \frac{1}{N} = N \cdot \frac{1}{N^2} = \frac{1}{N} = \pi_j \quad \forall j=1-N$$

2° caso gli π_j non sono tutti uguali.

Considero la matrice $Q = (q_{ij})_{i,j=1-N}$ con tutte

$$q_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{N-1} & \forall i,j \ i \neq j \\ 0 & \forall i \ j=i \end{cases}$$

Sicuramente Q è una matrice stocastica.

Per $i \neq j$

$$\begin{aligned} P_{ij} &= \frac{1}{\pi_i} \min \left\{ \pi_i q_{ij}, \pi_j q_{ji} \right\} \\ &= \frac{1}{\pi_i} \min \left\{ \pi_i \frac{1}{N-1}, \pi_j \frac{1}{N-1} \right\} \\ &= \frac{1}{N-1} \min \left\{ 1, \frac{\pi_j}{\pi_i} \right\} \end{aligned}$$

Quindi $P_{ij} > 0 \quad \forall i \neq j$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N P_{ij} = \frac{1}{N-1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \min \left\{ 1, \frac{\pi_j}{\pi_i} \right\} \leq \frac{1}{N-1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N 1 = 1$$

Tanto $P_{ii} = 1 - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N P_{ij}$ Sicuramente $P_{ii} \geq 0$

C.e. j T.c. $\pi_j = \min \{ \pi_1, \dots, \pi_N \}$

C.e. i T.c. $\pi_i > \pi_j \leftarrow j \neq i$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N P_{ij} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{1}{N-1} \min \left\{ 1, \frac{\pi_j}{\pi_i} \right\} < \frac{1}{N-1} (N-1) = 1$$

per l'addendo j più piccolo minimo

è sicuramente < 1

$$\Rightarrow P_{ii} > 0$$

Considero $P = (P_{ij})_{i,j=1 \dots N}$

Siccome P è individuabile per gli elementi extradiagonali sono tutti positivi -

$P_{ii} > 0 \Rightarrow P$ è regolare -

$$(\pi P)_j = \sum_{i=1}^N \pi_i P_{ij}$$

$$j \neq i \quad P_{ij} := \frac{1}{\pi_i} \min \{ \pi_i q_{ij}, \pi_j q_{ji} \}$$

$$\rightarrow \pi_i P_{ij} = \min \{ \pi_i q_{ij}, \pi_j q_{ji} \}$$

$$\text{Considero } \pi_j P_{ji} : P_{ji} := \frac{1}{\pi_j} \min \{ \pi_j q_{ji}, \pi_i q_{ij} \}$$

$$\rightarrow \pi_j P_{ji} = \min \{ \pi_j q_{ji}, \pi_i q_{ij} \}$$

$$(\pi P)_j = \sum_{i=1}^N \pi_i P_{ij} = \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N \pi_i P_{ij} \right) + \pi_j P_{jj} =$$

$$= \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N \pi_j P_{ji} \right) + \pi_j \left(1 - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N P_{ji} \right) =$$

$$= \pi_j \left(\left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N P_{ji} \right) + 1 - \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N P_{ji} \right) \right) = \pi_j \quad \forall j=1 \dots N$$

Abbiamo quindi $\pi P = \pi$

— , —

S = insieme delle pagine web - $\#S = N$

$$j \in S$$
$$P(\text{vinto } j) = \sum_{i=1}^N P(\text{vinto } j \mid \text{sono su } i) P(\text{sono su } i)$$

$$P_i(\cdot) := P(\cdot \mid \text{sono su } i)$$

$$P_i(\text{vinto } j) = P_i(\text{vinto } j \mid \overset{\text{b.o.o}}{\text{clicks un link}}) P_i(\overset{\text{d.i.}}{\text{clicks un link}}) + P_i(\text{vinto } j \mid \overset{\text{1/N}}{\text{scrivo indirizzo}}) P_i(\overset{\text{1-d.i.}}{\text{scrivo indirizzo}})$$

$$d_i := P_i(\text{click on link}) \in [0, 1] \Rightarrow$$

$$P_i(\text{scorro indirizzato}) = 1 - d_i$$

$$P_i(\text{visit } j \mid \text{click on link}) = \begin{cases} 0 & \text{se su } i \text{ non ci sono} \\ & \text{link a } j \\ \frac{1}{N_i} & \text{se su } i \text{ c'è un link} \\ & \text{a } j \end{cases}$$

Sia $N_i = \# \text{link (distinti) presenti sulle pagine } i$

$$P_i(\text{visit } j \mid \text{scorro indirizzato}) = \frac{1}{N}$$

$$P(X_n = j) = \sum_{i=1}^N \underbrace{P(X_n = j \mid X_{n-1} = i)}_{P_{ij}} P(X_{n-1} = i)$$

$$P_{ij} = \begin{cases} \frac{d_i}{N_i} + \frac{1-d_i}{N} & \text{se } j \text{ è linkato da } i \\ \frac{1-d_i}{N} & \text{se } j \text{ non è linkato da } i \end{cases}$$

Verificare (per esercizio) che la matrice $P = (P_{ij})_{i,j \in S}$ è stocastica -

Se $d_i \neq 1 \forall i \in S$, allora $P_{ij} > 0 \forall i, j \in S$

$$P(X_n = j) = (\pi(0) P^n)_j$$

$$\pi(0) = P(X_0 = 1, X_0 = 2, \dots, X_0 = N)$$

~~es~~ $P^n \forall \pi(0)$ il prodotto $\pi(0) P^n$ converge al posto dell'applicazione lineare associata a P cioè a $\left(\frac{1}{T_{11}}, \frac{1}{T_{22}}, \dots, \frac{1}{T_{NN}} \right)$

PROCESSI STOCASTICI A TEMPO CONTINUO E STATI

DISCRETI

$\{X_t\}_{t \geq 0}$ X_t va su uno stato spazio probabilizzato $(S, \mathcal{E}, P)$

$\exists S$ insieme di stato T.c. $X_t(\Omega) \in S \quad \forall t \in [0, +\infty)$

ESEMPIO Ad ogni istante t succede un certo evento
(p.es. passa il Tram)

$X_t(\omega) = 1$ se al Tempo t l'evento si verifica

$X_t(\omega) = 0$ se al Tempo t l'evento non si verifica

$$S = \{0, 1\}$$

$(s, t]$ $N_{s,t} := \#$ di volte che l'evento si verifica
nell'intervallo di Tempo $(s, t]$ -

$$(s, t] \quad (t, z] \quad (s, z] \quad \text{Se } s < t < z = \infty$$
$$N_{s,t} + N_{t,z} = N_{s,z}$$

Se $(s_1, t_1]$ e $(s_2, t_2]$ sono ~~non~~ disgiunti, allora
 $N_{(s_1, t_1]}$ e $N_{(s_2, t_2]}$ sono indipendenti.

Se $\mathcal{I}$ è una famiglia di intervalli (s_i, t_i) a due
a due disgiunti, allora le v.e. $(N_{(s_i, t_i]})_{i \in \mathcal{I}}$ sono una
famiglia di v.e. indipendenti -

Thm $N_{s,t}$ e $N_{s+h, t+h}$ hanno la stessa distri-
buzione -

$$\mathbb{E}[N_{s,t}] < +\infty \quad \forall 0 \leq s < t$$

L'evento in questione non si può verificare 2 o
più volte contemporaneamente:

$$\mathbb{P}(N_{0,\varepsilon} \geq 2) = 0(\varepsilon)$$

$$\parallel$$
$$\mathbb{P}(N_{t, t+\varepsilon} \geq 2) = 0 \quad \forall t > 0$$

DISTRIBUZIONE DI POISSON DI PARAMETRO $\lambda > 0$

È la distribuzione concentrata sugli interi non negativi
la cui densità discreta vale

$$e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \quad \forall k \in \mathbb{N}_{\geq 0}$$

$$\frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} > 0 \quad \forall k \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} = 1$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1$$

$$f(x) = e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + R_n(x)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

e quindi $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Sia X v.e. con densità di Poisson di parametro λ

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \int_{\Omega} X(\omega) \mathbb{P}(d\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} k \mathbb{P}(X=k) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} j=k-1 \quad &= e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^{j+1}}{j!} = \cancel{e^{-\lambda}} \lambda \underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!}}_{e^{\lambda}} = \lambda \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X^2] &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} = \\ &= e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{k-1+1} \lambda^k}{(k-1)!} = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(k-1) \lambda^k}{(k-1)!} + \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \right) \\ &= e^{-\lambda} \left(\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-2)!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \right) \quad \begin{array}{l} 1^a: j=k-2 \\ 2^a: j=k-1 \end{array} \\ &= e^{-\lambda} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^{j+2}}{j!} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^{j+1}}{j!} \right) \end{aligned}$$

$$= e^{-\lambda} \left(\lambda^2 \underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!}}_{e^{\lambda}} + \lambda \underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!}}_{e^{\lambda}} \right) = \lambda^2 + \lambda$$

$$\text{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

PROCESSO DI POISSON

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato

Sia $(N_t)_{t \geq 0}$ un processo stocastico definito su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$
a valori interi e ha $\lambda > 0$.

Dico che $(N_t)_{t \geq 0}$ è un **PROCESSO DI POISSON** di
INTENSITÀ λ se:

- 1) $N_0(\omega) = 0$ $\mathbb{P}$ -q.o. $\omega \in \Omega$
- 2) Per $\mathbb{P}$ -q.o. $\omega \in \Omega$, la funzione $t \in [0, +\infty) \mapsto N_t(\omega) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$
 è • non decrescente
 • continua da destra
- 3) $\forall n \in \mathbb{N}$ e $\forall 0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$ le v.a.
 $N_{t_k} - N_{t_{k-1}}$ sono indipendenti.
- 4) $\forall t > s \geq 0$ le v.a. $N_t - N_s$ hanno distribuzione
 di Poisson di PARAMETRO $\lambda(t-s)$

Si dimostra che le famiglie $N_{s,t}$ introdotte precedentemente
 hanno tutte le proprietà viste sse $N_t := N_{0,t}$
 è un processo di Poisson con $\lambda = \mathbb{E}[N_{0,1}]$

CONSEGUENZA: Per q.o. $\omega \in \Omega$ $N_t(\omega)$ è costante a
 tratti:

$$T_0(\omega) \equiv 0$$

$$T_1(\omega) := \min \{ t > 0 : N_t(\omega) > 0 \}$$

$$T_{n+1}(\omega) := \min \{ t > T_n(\omega) : N_t(\omega) > N_{T_n(\omega)}(\omega) \}$$

$$S_n(\omega) := T_n(\omega) - T_{n-1}(\omega)$$

TEOREMA Sono fatti equivalenti:

- 1) $(N_t)_{t \geq 0}$ è un processo di Poisson di parametro λ
- 2) Le v.e. $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sono i.i.d. e con distribuzione esponenziale di parametro λ .

DISTRIBUZIONE ESPONENZIALE DI PARAMETRO $\lambda > 0$

È una distribuzione A.R. concentrata su $[0, +\infty)$ con densità

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

$$f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) > 0 \quad \forall x \geq 0$$

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = -e^{-\lambda x} \Big|_{x=0}^{x=+\infty} = 0 + 1 = 1$$

Se X è una v.e. con questa distribuzione

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \int_{\mathbb{R}} x f(x) dx = \int_0^{+\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx = \\ &= -x e^{-\lambda x} \Big|_{x=0}^{x=+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx = -x e^{-\lambda x} \Big|_0^{+\infty} - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \Big|_0^{+\infty} \\ &= \left(-x e^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \right) \Big|_{x=0}^{x=+\infty} = \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

$$\mathbb{E}[X^2] = \dots \quad \text{Var}[X] = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$\mathbb{P}(X \leq t+s \mid X > t) = \mathbb{P}(X \leq s) \quad \forall s, t \geq 0$$

$$F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t) = \int_{-\infty}^t f(x) dx$$

$$t < 0 \quad \int_{-\infty}^t 0 dx = 0$$

$$t \geq 0 \quad \int_{-\infty}^t f(x) dx = \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx$$

$$t > 0 \quad \int_{-\infty}^t f(x) dx = \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx$$

$$= -e^{-\lambda x} \Big|_{x=0}^{x=t} = -e^{-\lambda t} + 1 = 1 - e^{-\lambda t}$$

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 - e^{-\lambda t} & t \geq 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \mathbb{P}(X \leq t+s | X > t) = \frac{\mathbb{P}(X \leq t+s, X > t)}{\mathbb{P}(X > t)} =$$

$$= \{X \leq t+s, X > t\} = \{X \leq t+s\} \setminus \{X \leq t\}$$

$$\mathbb{P}(X \leq t+s, X > t) = \mathbb{P}(X \leq t+s) - \mathbb{P}(X \leq t)$$

$$\mathbb{P}(X \leq t+s | X > t) = \frac{\mathbb{P}(X \leq t+s) - \mathbb{P}(X \leq t)}{1 - \mathbb{P}(X \leq t)}$$

$$= \frac{F_X(t+s) - F_X(t)}{1 - F_X(t)} = \frac{(1 - e^{-\lambda(t+s)}) - (1 - e^{-\lambda t})}{1 - (1 - e^{-\lambda t})}$$

$$= \frac{e^{-\lambda t} - e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}} = \frac{e^{-\lambda t} (1 - e^{-\lambda s})}{e^{-\lambda t}} = 1 - e^{-\lambda s} =$$

$$= F_X(s) = \mathbb{P}(X \leq s) \quad \forall s, t \geq 0$$

$(X_t)_{t \geq 0}$ processo stocastico a Tempo continuo e a valori in S discreto, su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

$$\forall i, j \in S \quad \text{e} \quad \forall 0 \leq s \leq t$$

$$P_j^i(s, t) = \begin{cases} \mathbb{P}(X_t = j | X_s = i) & \text{se } \mathbb{P}(X_s = i) > 0 \\ \delta_{ij} & \text{se } \mathbb{P}(X_s = i) = 0 \end{cases}$$

Si dimostra che la matrice $P(s, t) := (P_j^i(s, t))_{i, j \in S}$ è una matrice stocastica -

Le diamo MATRICE DI TRANSIZIONE DA X_s A X_t -

$$\forall j \in S \quad 0 \leq s \leq t$$

$$\begin{aligned} P(X_t=j) &= \sum_{i \in S} P(X_t=j | X_s=i) P(X_s=i) = \\ &= \sum_{i \in S} P(s,t)_j^i P(X_s=i) \end{aligned}$$

$\pi(s)$ = vettore delle densità discrete di X_s

$\pi(t)$ = vettore delle densità discrete di X_t

$$\pi(t)_j = \sum_{i \in S} \pi(s)_i P(s,t)_j^i$$

$$\pi(t) = \pi(s) P(s,t) \quad 0 \leq s \leq t$$

$$0 \leq t_0 \leq t_1 \leq t_2 \dots \leq t_n$$

$$\begin{aligned} \pi(t_n) &= \pi(t_{n-1}) P(t_{n-1}, t_n) = \pi(t_{n-2}) P(t_{n-2}, t_{n-1}) P(t_{n-1}, t_n) \\ &\dots = \pi(t_0) P(t_0, t_1) P(t_1, t_2) \dots P(t_{n-1}, t_n) \end{aligned}$$

Dico che il processo stocastico $(X_t)_{t \geq 0}$ è omogeneo

se $\forall 0 \leq s \leq t$ e $\forall h \geq 0$ s.t. $s+h \geq 0$ si ha

$$P(s+h, t+h) = P(s, t)$$

In particolare, se scelgo $s=0$ ottengo

$$P(h, t+h) = P(0, t) \quad \forall t \geq 0 \text{ e } h \geq 0$$

$$\stackrel{\text{ii}}{=} P(t)$$

Supponiamo sempre che lo spazio probabilizzato $(\Omega, \mathcal{E}, P)$

sia completo cioè:

$$\forall A \subset \Omega \text{ T.c.} \quad \exists \Omega_0 \in \mathcal{E} \text{ con } P(\Omega_0) = 0 \text{ e } A \subset \Omega_0$$

si ha $A \in \mathcal{E}_-$

Consideriamo solo processi stocastici continui di destra.