

$$V_j(\omega) \quad V_j^{(n)}(\omega) \quad t_j(\omega) \quad \mathbb{E}_j[t_j] = \overline{T}_{jj}$$

$$\frac{1}{n} V_j^{(n)}(\omega) \quad \overline{T}_{jj}$$

$$T_j^{(1)}(\omega) := t_j(\omega)$$

$$T_j^{(2)}(\omega) = \begin{cases} \min \{n > t_j(\omega) \text{ T.c. } X_n(\omega) = j\} & \text{se } \exists n > t_j(\omega) \text{ T.c. } X_n(\omega) = j \\ +\infty & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

$$T_j^{(r)}(\omega) = \begin{cases} \min \{n > T_j^{(r-1)}(\omega) \text{ T.c. } X_n(\omega) = j\} & \text{se } \exists n > T_j^{(r-1)}(\omega) \text{ T.c. } X_n(\omega) = j \\ +\infty & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

$$S_j^{(1)}(\omega) = t_j(\omega)$$

$$r \geq 2 \quad S_j^{(r)}(\omega) = \begin{cases} T_j^{(r)}(\omega) - T_j^{(r-1)}(\omega) & \text{se } T_j^{(r-1)}(\omega) < +\infty \\ +\infty & \text{se } T_j^{(r-1)}(\omega) = +\infty \end{cases}$$

TEOREMA Sia j uno stato ricorrente e $i \in S$ T.c. $f_{ij} = 1$

Allora 1) $S_j^{(r)}(\omega) < +\infty$ q.o. $\omega \in \{X_0 = i\}$

2) $(S_j^{(r)})_{r \in \mathbb{N}_{\geq 1}}$ è una successione di v.e. indipendenti rispetto a $\mathbb{P}_i(\cdot) := \mathbb{P}(\cdot | X_0 = i)$

3) le $S_j^{(r)}$, $r \geq 2$ sono identicamente distribuite e $\mathbb{P}_i(S_j^{(r)} = k) = f_{jj}^{(k)}$ e $\mathbb{E}_i[S_j^{(r)}] = \overline{T}_{jj}$

$$\mathbb{E}_i[S_j^{(r)}] = \sum_{k=1}^{\infty} k \mathbb{P}_i(S_j^{(r)} = k) = \sum_{k=1}^{\infty} k f_{jj}^{(k)} = \overline{T}_{jj}$$

PROP Sia $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ catena di Markov omogenea con spazio degli stat. S (disueto) e matrice di transizione $P = (P_{ij} | i, j \in S)$.
Siano $i, j \in S$ e supponiamo di essere in uno dei due

seguenti casi:

1) j è Transiente

2) j è ricorrente e $f_{ij} = 1$

Allora per q.o. $\omega \in \{X_0 = i\}$ si ha $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} V_j^{(n)}(\omega) = \frac{1}{\bar{T}_{jj}}$

1° CASO j Transiente

Sappiamo che $\bar{T}_{jj} = +\infty$ e $V_j(\omega) \leq L < +\infty$

$$0 \leq \frac{1}{n} V_j^{(n)}(\omega) \leq \frac{L}{n} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} V_j^{(n)}(\omega) = 0 = \frac{1}{+\infty} = \frac{1}{\bar{T}_{jj}}$$

2° CASO j ricorrente e $f_{ij} = 1$

$$V_j^{(n)}(\omega) = k \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} T_j^{(k)}(\omega) \leq n \\ T_j^{(k+1)}(\omega) > n \end{cases}$$

$$\begin{aligned} V_j^{(n)}(\omega) &= \sup \{k \geq 1 : T_j^{(k)}(\omega) \leq n\} \\ &= \sup \left\{ k \geq 1 : \sum_{r=1}^k S_j^{(r)}(\omega) \leq n \right\} \end{aligned}$$

Se $(S^{(r)})$ successione di v.a. nonnegative i.i.d. con valore atteso E

Se $T^{(k)}(\omega) = \sum_{r=1}^k S^{(r)}(\omega)$ - Sappiamo che

$\frac{1}{k} T^{(k)}$ converge in probabilità, quasi certamente e in media quadratica ad E .

Se per $t > 0$ definisco $N_t(\omega) := \sup \{k \in \mathbb{N} : T^{(k)}(\omega) \leq t\}$

$$\text{Allora } \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N_t(\omega)}{t} = \frac{1}{E} \quad \text{P.-q.o. } \omega$$

Applico questo Teorema e ottengo $\frac{V_j^{(n)}(\omega)}{n}$ converge

P.-q.o. a $\frac{1}{\bar{T}_{jj}}$

TEOREMA ERGODICO

Se $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è un catena di Markov omogenea con matrice di transizione $P = (p_{ij})_{i,j \in S}$, S denota -

Supponiamo che P sia irriducibile -

Allora per ogni $j \in S$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{V_j^{(n)}(\omega)}{n} = \frac{1}{\bar{T}_{jj}}$ P-q.c.

② Se $\varphi: S \rightarrow \mathbb{R}$ T.c. $\sum_{j \in S} |\varphi(j)| < +\infty$

Allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \varphi(X_k(\omega)) = \sum_{j \in S} \varphi(j) \frac{1}{\bar{T}_{jj}} \quad \text{P-q.c.}$$

DM Poiché P è irriducibile, gli st. sono tutti ricorrenti o tutti Transienti.

1°) Tutti gli st. sono Transienti:

$$\forall j \quad V_j^{(n)}(\omega) = V_j(\omega) < +\infty \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{V_j^{(n)}(\omega)}{n} = 0 = \frac{1}{+\infty}$$

$$\bar{T}_{jj} = +\infty$$

2°) Tutti gli st. sono ricorrenti:

$$f_{jj} = 1 \quad \forall j \quad f_{ij} = 1 \quad \forall i, j$$

Però $i \in S$ per q.o. $\omega \in \{X_0 = i\}$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{V_j^{(n)}(\omega)}{n} = \frac{1}{\bar{T}_{jj}}$

$\exists \Omega_i$ evento $\Omega_i \subset \{X_0 = i\}$

$$P(\Omega_i) = P(X_0 = i)$$

e $\forall \omega \in \Omega_i$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{V_j^{(n)}(\omega)}{n} = \frac{1}{\bar{T}_{jj}}$

Poi per $\bar{\Omega} = \bigcup_{i \in S} \Omega_i$ $P(\bar{\Omega}) = \sum_{i \in S} P(\Omega_i) =$

$$= \sum_{i \in S} P(X_0 = i) = P\left(\bigcup_{i \in S} \{X_0 = i\}\right) = P(X_0 \in S) = P(\bar{\Omega}) = 1$$

Se $\omega \in \bar{\Omega} = 1 \exists! i \in S$ T.c. $\omega \in \Omega_i$ e quindi.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{V_j^{(n)}(\omega)}{n} = \frac{1}{T_j} \quad \forall \omega \in \Omega$$

$\omega \in \Omega$ q.o. $\omega \in \Omega$

$$(2) \quad \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(X_k(\omega))$$

$$f(X_k(\omega)) = \sum_{j \in S} f(j) \mathbb{1}_{\{X_k=j\}}(\omega)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(X_k(\omega)) &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{j \in S} f(j) \mathbb{1}_{\{X_k=j\}}(\omega) = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j \in S} f(j) \underbrace{\sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{\{X_k=j\}}(\omega)}_{V_j^{(n)}(\omega)} = \sum_{j \in S} f(j) \underbrace{\frac{V_j^{(n)}(\omega)}{n}}_{\xrightarrow{L.D.} \frac{1}{T_j}} \end{aligned}$$

$$(S, \mathcal{B}(S), \mu) \quad \mu(\{j\}) = 1 \quad \forall j \in S$$

$$\sum_{j \in S} f(j) \frac{1}{n} V_j^{(n)}(\omega) = \int_S \underbrace{f(j) \frac{1}{n} V_j^{(n)}(\omega)}_{\text{red}} \mu(dj) = (\star)$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \left| f(j) \frac{1}{n} V_j^{(n)}(\omega) \right| \leq |f(j)|$$

$$\int_S |f(j)| \mu(dj) = \sum_{j \in S} |f(j)| < +\infty \quad \text{per ipotesi}$$

$$\forall j \text{ fissato} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{f(j) \frac{1}{n} V_j^{(n)}(\omega)}_{\text{green}} = \frac{1}{T_j}$$

(★) per il Teo di convergenza dominata di Lebesgue

$$\begin{aligned} \int_S f(j) \frac{1}{n} V_j^{(n)}(\omega) \mu(dj) &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_S f(j) \frac{1}{T_j} \mu(dj) \\ &= \sum_{j \in S} f(j) \frac{1}{T_j} \end{aligned}$$

TEOREMA Che $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ catene di Markov omogenee su

TEOREMA Sia $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ catena di Markov omogenea su S insieme finito con matrice di transizione $P = (P_{ij})_{i,j \in S}$,

allora $\forall i, j \in S$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n P_{jj}^{(k)} \rightarrow \frac{1}{\pi_{jj}}$$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n P_{ij}^{(k)} \rightarrow f_{ij} = \frac{1}{\pi_{jj}}$$

In particolare, se P è irriducibile, allora

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n P_{ij}^{(k)} \rightarrow \frac{1}{\pi_{jj}} \quad \forall i, j$$

DIP 1° caso j Transiente

$$\Rightarrow \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n P_{jj}^{(k)} \rightarrow 0 = \frac{1}{+\infty} \leftarrow \frac{1}{\pi_{jj}} = +\infty$$

$$\sum_{k=1}^n P_{jj}^{(k)} \leq \sum_{k=1}^{\infty} P_{jj}^{(k)} < +\infty$$

2° caso j ricorrente $\Rightarrow f_{jj} = 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} V_j^{(n)}(\omega) = \frac{1}{\pi_{jj}} \quad P_j\text{-q.c.}$$

$$\int_{\Omega} \frac{1}{n} V_j^{(n)}(\omega) P_j(d\omega) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \frac{1}{\pi_{jj}} P_j(d\omega) = \frac{1}{\pi_{jj}}$$

$$\left| \frac{1}{n} V_j^{(n)}(\omega) \right| \leq 1 \quad \int_{\Omega} 1 P_j(d\omega) = 1 \cdot P_j(\Omega) = 1$$

$$\frac{1}{\pi_{jj}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \frac{1}{n} V_j^{(n)} P_j(d\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} E_j \left[\frac{1}{n} V_j^{(n)} \right] =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} E_j \left[\sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{\{X_k=j\}} \right] =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n E_j \left[\mathbb{1}_{\{X_k=j\}} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n P_j(X_k=j)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \underbrace{P(X_k=j | X_0=j)}_{P_{jj}^{(k)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n P_{jj}^{(k)}$$

— o —

Corollario Sia $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ catena di Markov omogenea con spazio stat. S finito e matrice di transizione

Corollario Se $\lim_{n \rightarrow \infty} P^n$ esiste in senso uniforme con
 spazio degli stati S finito e matrice di Transizione
 $P = (P_{ij})_{i,j \in S}$ irriducibile.

Allora $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n P_{ij}^{(k)} \rightarrow \frac{1}{T_{jj}} \quad \forall i, j \in S = \{1, \dots, N\}$

Sia $w = (w_1, \dots, w_N)$ dove $w_j = \frac{1}{T_{jj}}$

Allora w è un vettore stocastico

- tutte le componenti di w sono positive
- w è l'unico pto fisso dell'applicazione associata a P : $x \in \mathcal{D} \mapsto xP \in \mathcal{D}$.

DM P irriducibile e S finito $\Rightarrow$ tutti gli stati sono
 ricorrenti : $f_{jj} = 1$, $f_{ij} = 1 \quad \forall i, j \in S$.

Quindi sicuramente

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n P_{ij}^{(k)} \rightarrow \frac{1}{T_{jj}} \quad \forall i, j \in S = \{1, \dots, N\}$$

Se $w = (w_1, \dots, w_N)$ $w_j = \frac{1}{T_{jj}}$

Voglio far vedere che w è un vettore stocastico.

$$w_j \geq 0 \quad \forall j \in S$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N w_j &= \sum_{j=1}^N \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n P_{ij}^{(k)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^N P_{ij}^{(k)} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} n = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1 \end{aligned}$$

Facciamo vedere che $wP = w$

$$\begin{aligned} (wP)_j &= \sum_{i=1}^N w_i P_{ij} = \sum_{i=1}^N \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n P_{ie}^{(k)} \right) P_{ej} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^N P_{ie}^{(k)} P_{ej} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n P_{ij}^{(k+n)} \stackrel{DM}{=} w_j \quad \forall j \end{aligned}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \underbrace{\left(\sum_{l=1}^n P_{ie}^{(k)} P_{ej} \right)}_{P_{ij}^{(k+1)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n P_{ij}^{(k+1)} \stackrel{r=k+1}{=} w_j \quad \forall j$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n P_{ij}^{(k+1)} &= \frac{n+1}{n} \frac{1}{n+1} \left(\sum_{k=0}^n P_{ij}^{(k+1)} - P_{ij} \right) \\ &= \frac{n+1}{n} \underbrace{\left(\frac{1}{n+1} \sum_{r=1}^{n+1} P_{ij}^{(r)} \right)}_{\hookrightarrow \frac{1}{1_j}} - \underbrace{\frac{1}{n} P_{ij}}_0 \longrightarrow \frac{1}{1_j} = w_j \end{aligned}$$

$$3^o) \quad w_j > 0 \quad (\text{No DIT})$$