

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato, S insieme discreto

$(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ catena di Markov omogenea su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ e valori in S

Per $C \subset S$

$$t_C(\omega) := \begin{cases} \min \{n \geq 1 : X_n(\omega) \in C\} & \text{se } \exists n \geq 1 \text{ t.c. } X_n(\omega) \in C \\ +\infty & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

$$f_{iC}^{(k)} := \mathbb{P}(t_C = k \mid X_0 = i)$$

$$f_{iC} := \mathbb{P}(t_C < +\infty \mid X_0 = i) = 0 \quad f_{iC} = \sum_{k=1}^{\infty} f_{iC}^{(k)}$$

$$C = \{j\}$$

$$\begin{array}{cc} \cancel{t_{\{j\}}} & t_j \\ \cancel{f_{i\{j\}}^{(k)}} & f_{ij}^{(k)} \\ \cancel{f_{i\{j\}}} & f_{ij} \end{array}$$

$$f_{jj} = \mathbb{P}(t_j < +\infty \mid X_0 = j)$$

$$f_{iC}^{(k)} = \begin{cases} \sum_{l \in C} P_{il} & k=1 \\ \sum_{l \notin C} P_{il} f_{lC}^{(k-1)} & k \geq 2 \end{cases}$$

$$k=1 \quad f_{iC}^{(1)} = \mathbb{P}(t_C = 1 \mid X_0 = i) = \mathbb{P}(X_1 \in C \mid X_0 = i)$$

Sia $C \subset S$ - Per $\omega \in \Omega$, voglio contare quante volte $X_k(\omega) \in C$,

$$V_C^{(n)}(\omega) := \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{\{X_k \in C\}}(\omega) =: \text{quante volte visito } C \text{ nei } n \text{ passi}$$

$V_C(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} 1_{\{X_k \in C\}}(\omega)$ —: quante volte uno ω nei primi n passi

$$V_C^{(n)}(\Omega) = \{0, 1, \dots, n\}$$

$$V_C(\omega) := \sum_{k=1}^{\infty} 1_{\{X_k \in C\}}(\omega) := \text{numero totale di visite di } \omega \text{ in } C$$

$$V_C(\Omega) = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$$

$$\rightarrow \{V_C \geq 1\} = \{t_C < +\infty\}$$

$$\{V_C^{(n)} \geq 1\} = \{t_C \leq n\}$$

$$C = \{j\} \quad \cancel{V_{\{j\}}^{(n)}} \quad V_j^{(n)} \quad V_{\{j\}} = V_j$$

TEOREMA Sia $r \geq 1$, siano $i, j \in S$

$$\text{Allora } \mathbb{P}(V_j \geq r \mid X_0 = i) = f_{ij} \cdot f_{jj}^{r-1}$$

$$\text{In particolare } \mathbb{P}(V_j \geq r \mid X_0 = j) = f_{jj}^r$$

dim $r=1$ $\mathbb{P}(V_j \geq 1 \mid X_0 = i) = \mathbb{P}(t_j < +\infty \mid X_0 = i)$

$$\begin{aligned} r \geq 2 \quad \{V_j \geq r, X_0 = i\} &= \bigcup_{h=1}^{\infty} \left\{ t_j = h, \sum_{k=h+1}^{\infty} 1_{\{X_k = j\}} \geq r-1, X_0 = i \right\} \\ &= \bigcup_{h=1}^{\infty} \left\{ X_h = j, X_{h-1} \neq j, \dots, X_1 \neq j, \sum_{k=h+1}^{\infty} 1_{\{X_k = j\}} \geq r-1, X_0 = i \right\} \end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(V_j \geq r \mid X_0 = i) = \sum_{h=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_h = j, X_{h-1} \neq j, \dots, X_1 \neq j, \sum_{k=h+1}^{\infty} 1_{\{X_k = j\}} \geq r-1 \mid X_0 = i)$$

$$= \sum_{h=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(\sum_{k=h+1}^{\infty} 1_{\{X_k = j\}} \geq r-1 \mid X_h = j, X_{h-1} \neq j, \dots, X_1 \neq j, X_0 = i\right) \cdot$$

$$\mathbb{P}(X_h = j, X_{h-1} \neq j, \dots, X_1 \neq j \mid X_0 = i)$$

$$h=1 \quad \{X_k=j\} \quad | \quad \dots \quad \cdot \mathbb{P}(X_h=j, X_{h+1} \neq j, \dots, X_r \neq j \mid X_0=i)$$

$$= \sum_{h=1}^{\infty} \underbrace{\mathbb{P}\left(\sum_{k=h}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_k=j\}} \geq r-1 \mid X_h=j\right)}_{\substack{\mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_k=j\}} \geq r-1 \mid X_0=j\right) \\ V_j}} \underbrace{\mathbb{P}(t_j=h \mid X_0=i)}_{f_{ij}^{(r)}}$$

$$= \sum_{h=1}^{\infty} \underbrace{\mathbb{P}(V_j \geq r-1 \mid X_0=j)}_{\text{per induzione } f_{jj} \cdot f_{jj}^{r-1-1} = f_{jj}^{r-1}} f_{ij}^{(r)} = \sum_{h=1}^{\infty} f_{jj}^{r-2} f_{ij}^{(r)}$$

$$= f_{jj}^{r-1} \cdot \sum_{h=1}^{\infty} f_{ij}^{(r)} = f_{ij} f_{jj}^{r-2}$$

— o —

$(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ catena di Markov omogenea con spazio degli stati S

$$j \in S \quad V_j(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_k=j\}}(\omega)$$

Sia che X_n che le V_j sono v.o. su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

Fisso $i \in S$ - Considero $\mathbb{P}_i(A) := \mathbb{P}(A \mid X_0=i)$ $A \in \mathcal{E}$

Voglio calcolare

$$\int_{\Omega} V_j(\omega) \mathbb{P}_i(d\omega) =: \mathbb{E}_i[V_j]$$

$$\mathbb{E}_i[V_j] = (+\infty) \mathbb{P}_i(V_j = +\infty) + \sum_{k=0}^{\infty} k \mathbb{P}_i(V_j = k)$$

$$\text{Se } \mathbb{P}_i(V_j = +\infty) > 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}_i[V_j] = +\infty$$

$$\text{Se } \mathbb{P}_i(V_j = +\infty) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}_i[V_j] = \sum_{k=0}^{\infty} k \mathbb{P}_i(V_j = k)$$

TEOREMA $\mathbb{E}_i[V_j] = \sum_{n=0}^{\infty} P_{ij}^{(n)}$

$$\rightarrow \mathbb{E}_i[V_j] = \begin{cases} +\infty & \text{se } f_{jj}=1 \text{ e } f_{ij}>0 \\ \frac{f_{ij}}{1-f_{jj}} & \text{se } f_{jj}<1 \end{cases}$$

In particolare j è ricorrente sse $\mathbb{E}_j[V_j] = +\infty$
 sse $f_{jj}=1$.

DM $V_j = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_n=j\}}$

$$\mathbb{E}_i[V_j] = \mathbb{E}_i\left[\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_n=j\}}\right]$$

$$V_j = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_n=j\}} \quad k \in \mathbb{N} \quad V_j^{(k)} = \sum_{n=1}^k \mathbb{1}_{\{X_n=j\}}$$

$$0 \leq V_j^{(k)} \leq V_j^{(k+1)}$$

Teorema di Beppo-Levi

$$\mathbb{E}_i[V_j] = \int_{\Omega} \underbrace{\left(\lim_{k \rightarrow \infty} V_j^{(k)}(\omega)\right)}_{V_j(\omega)} \mathbb{P}_i(d\omega) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} V_j^{(k)}(\omega) \mathbb{P}_i(d\omega) =$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \sum_{n=1}^k \mathbb{1}_{\{X_n=j\}}(\omega) \mathbb{P}_i(d\omega) =$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k \underbrace{\int_{\Omega} \mathbb{1}_{\{X_n=j\}}(\omega) \mathbb{P}_i(d\omega)}_{\mathbb{P}_i(X_n=j)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k \mathbb{P}_i(X_n=j)$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k \mathbb{P}_i(X_n=j) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k p_{ij}^{(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)}$$

così $\mathbb{E}_i[V_j] = \sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)}$

$(\Omega, \mathcal{E}, \mu)$ spazio probabilizzato $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ v.v. T.c. $\mathbb{E}_{\mu}[X]$

$(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ spazio probabilizzato $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ v.v. T.c. $\mathbb{E}_\mu[X]$
 e ben definito $= 0$

$$\int_{\Omega} X(\omega) \mu(d\omega) = \int_0^{+\infty} (1 - F_{\mu, X}(t)) dt - \int_{-\infty}^0 F_{\mu, X}(t) dt$$

$$\mu = \mathbb{P}_i(\cdot) = \mathbb{P}(\cdot | X_0 = i) \quad X = V_j \geq 0$$

$$\mathbb{E}_i[V_j] = \int_0^{+\infty} (1 - F_i(t)) dt \quad \text{dove } F_i(t) = \mathbb{P}_i(V_j \leq t) = \mathbb{P}(V_j \leq t | X_0 = i)$$

$$F_i(t) = \mathbb{P}_i(V_j \leq t) = \mathbb{P}_i(V_j \leq \lfloor t \rfloor)$$

$$\int_0^{+\infty} (1 - F_i(t)) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_n^{n+1} \mathbb{P}_i(V_j > \lfloor t \rfloor) dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_n^{n+1} \mathbb{P}_i(V_j > n) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_i(V_j > n)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_i(V_j \geq n+1) \quad n+1 =: k$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}_i(V_j \geq k) = \sum_{k=1}^{\infty} f_{ij} f_{jj}^{k-1}$$

$$\mathbb{P}(V_j \geq r | X_0 = i) = f_{ij} f_{jj}^{r-1}$$



$$\textcircled{1} \quad f_{ij} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}_i[V_j] = 0$$

$$\textcircled{2} \quad f_{ij} > 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}_i[V_j] = f_{ij} \sum_{k=1}^{\infty} f_{jj}^{k-1} =$$

$$= f_{ij} \sum_{n=0}^{\infty} f_{jj}^n = \begin{cases} +\infty & f_{jj} = 1 \\ \frac{f_{ij}}{1 - f_{jj}} & f_{jj} < 1 \end{cases}$$

TEOREMA Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato - ha

$(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ catena di Markov omogenea e stoc. discreta con
 spazio degli stati S e ha $P = (P_{ij})_{i,j \in S}$ la sua matrice
 l. transizione

spazio degli stati S e ha $P = (P_{ij})_{i,j \in S}$ la sua matrice di transizione -

Sono fatti equivalenti:

- 1) $j \in S$ è uno stato ricorrente
- 2) I cammini che partono da j ritornano p.c. in j ($f_{jj} = 1$)
- 3) I cammini che partono da j ritornano p.c. in j infinite volte -

→ Se $i, j \in S$ e j è uno stato ricorrente, allora i cammini che partono da i visitano j infinite volte con probabilità f_{ij} ←

Inoltre, se $i \leftrightarrow j$, allora $f_{ii} = 1$, $f_{ij} = 1$

$$\text{Din } 1 = \sum_{n=0}^{\infty} P_{jj}^{(n)} = \mathbb{E}_j[V_j] = \begin{cases} +\infty & \text{se } f_{jj} = 1 \\ \frac{f_{jj}}{1-f_{jj}} & \text{se } f_{jj} < 1 \end{cases}$$

↓
prob. j ricorrente

$$= 0 \quad j \text{ ricorrente} \Rightarrow f_{jj} = 1$$

$$2 \Rightarrow 1 \quad \text{Perché } f_{jj} = 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} P_{jj}^{(n)} = +\infty \text{ cioè } j \text{ ricorrente}$$

$$3 \Rightarrow 2 \quad \text{Ovvio}$$

$$2 \Rightarrow 3 \quad \text{3 vuol dire } P(V_j = +\infty | X_0 = j) = 1$$

$$P(V_j = +\infty | X_0 = j)$$

$$\{V_j = +\infty\} = \bigcap_{r=1}^{\infty} \{V_j \geq r\}$$

$$\{V_j \geq r+1\} \subseteq \{V_j \geq r\}$$

$$P(V_j = +\infty | X_0 = j) = \lim_{r \rightarrow \infty} P(V_j \geq r | X_0 = j) = \lim_{r \rightarrow \infty} f_{jj}^r$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{se } f_{jj} = 1 \\ 0 & \text{se } f_{jj} < 1 \end{cases}$$

$$1 \circ \quad x \quad t_{jj} < 1$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(V_j = +\infty \mid X_0 = i) &= \lim_{r \rightarrow \infty} \mathbb{P}(V_j \geq r \mid X_0 = i) = \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} f_{ij} \cdot f_{jj}^{r-1} = \begin{cases} f_{ij} & f_{jj} = 1 \\ 0 & f_{jj} < 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Se j è ricorrente $\Leftrightarrow i \leftrightarrow j = 0 \Rightarrow$ da i è ricorrente $\Rightarrow f_{ii} = 1$

$$1 = f_{jj} = \mathbb{P}(V_j = +\infty \mid X_0 = j) =$$

$$\{V_j = +\infty\} = \{ \forall m \in \mathbb{N} \exists n > m \text{ T.c. } X_n = j \}$$

$$= \mathbb{P}(X_n = j \text{ per qualche } n \geq m+1 \mid X_0 = j)$$

$$= \sum_{k \in S} \mathbb{P}(X_n = j \text{ per qualche } n \geq m+1, X_m = k \mid X_0 = j)$$

$$\text{Scego } m \text{ T.c. } P_{ji}^{(m)} > 0 \leftarrow$$

$$= \sum_{k \in S} \mathbb{P}(X_n = j \text{ per qualche } n \geq m+1 \mid X_m = k, \cancel{X_0 = j}) \cdot \mathbb{P}(X_m = k \mid X_0 = j)$$

$\mathbb{P}(X_n = j \text{ per qualche } n \geq 2 \mid X_0 = k)$

$$= \sum_{k \in S} f_{kj} P_{jk}^{(m)}$$

$$\Rightarrow \sum_{k \in S} \underbrace{f_{kj}}_{\leq 1} P_{jk}^{(m)} = 1$$

$P^{(m)}$ è stocastica

$$\sum_{k \in S} 1 \cdot P_{jk}^{(m)} = 1$$

$$\Rightarrow f_{kj} = 1 \text{ per ogni } k \text{ T.c. } P_{jk}^{(m)} > 0$$

In particolare $f_{ij} = 1$.

Teorema Siano $i, j \in S$. Sono fatti equivalenti:

- 1) j è uno stato transiente
- 2) $f_{jj} < 1$
- 3) La probabilità di ritornare in j infinite volte partendo da j è zero.