$\forall n \in \mathbb{N} \quad \pi(n)_j = \mathbb{P}(X_n = j) \qquad j \in S$

$$P(n+1)^i_j = \begin{cases} \mathbb{P}(X_{n+1}=j \mid X_n = i) & \text{se } \mathbb{P}(X_n=i)>0 \\ \delta_{ij} & \text{se } \mathbb{P}(X_n=i)=0 \end{cases} \qquad i,j \in S$$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad P(n+1)$ è una matrice stocastica indicizzata su S

$\pi(0) \qquad \pi(n+1) = \pi(0)P(1)P(2)\ldots P(n+1)$

Se $P(n+1) \equiv P$ il processo si dice omogeneo

$$\pi(n+1) = \pi(0)P^{n+1}$$

$k \leq n \qquad \pi(n+1) = \pi(0)P(1)\ldots P(k)P(k+1)\ldots P(n+1)$

$$\pi(n+1) = \pi(0)\underbrace{P\ldots P}_{k}\underbrace{P\ldots P}_{n+1-k}$$

$$\pi(n+1) = \underbrace{\pi(0)P^k}_{\pi(k)} P^{n+1-k}$$

$\rightarrow \mathbb{P}(X_2 = j, X_0 = i) = \mathbb{P}(X_2 = j, X_1 \in S, X_0 = i) =$

$= \sum_{k \in S} \mathbb{P}(X_2 = j, X_1 = k, X_0 = i) = \sum_{k \in S} \mathbb{P}(X_2 = j \mid X_1 = k, X_0 = i)\mathbb{P}(X_1 = k, X_0 = i)$

$= \sum_{k \in S} \mathbb{P}(X_2 = j \mid X_1 = k, X_0 = i)\mathbb{P}(X_1 = k \mid X_0 = i)\mathbb{P}(X_0 = i)$

$= \sum_{k \in S} \underline{\mathbb{P}(X_2 = j \mid X_1 = k, X_0 = i)} P(1)^i_k \pi(0)_i$

MARKOV $\Rightarrow = \mathbb{P}(X_2 = j \mid X_1 = k) = P(2)^k_j$

DEF. Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato. Sia S insieme discreto e sia $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ processo stocastico a tempo discreto e avente S come spazio degli stati.

Dico che $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una CATENA DI MARKOV se

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\forall i_0, i_1, \dots, i_n \in S$ t.c.

$$\mathbb{P}(X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_1 = i_1, X_0 = i_0) > 0$$

si ha che $\forall j \in S$

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots X_1 = i_1, X_0 = i_0) =$$
$$= \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i_n)$$

— o —

$B \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ $\qquad X : \Omega \to \mathbb{R}^N$ $\qquad X^{-1}(B) \in \mathcal{E}$

$\sigma(X) := \{ X^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N) \}$ è una σ-algebra di Ω, è contenuta in $\mathcal{E}$

si dice σ-algebra rilevata da X.

— o —

Se $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è un processo stocastico a valori in S insieme discreto, come è fatta $\sigma(X_n)$, $n \in \mathbb{N}$?

$\forall j \in S$ $\quad X_n^{-1}(\{j\}) \in \sigma(X_n)$

$\sigma(X_n)$ = tutte le possibili unioni finite o numerabili delle $X_n^{-1}(\{j\})$ $j \in S$.

PROPRIETÀ Sia $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ processo stocastico a tempo discreto con spazio degli stati discreto S.

Allora $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una catena di Markov SSE

$\forall n, k \in \mathbb{N}$ $\quad \forall i \in S$

$\forall E \in \mathcal{E}$ evento rilevato da $X_{n+1}, \dots, X_{n+k}$

$\forall G \in \mathcal{E}$ evento rilevato da $X_0, \dots, X_{n-1}$,

si ha $\mathbb{P}(E \mid \{X_n = i\} \cap G) = \mathbb{P}(E \mid X_n = i)$

Inoltre

e che $\mathbb{P}(E \mid \{X_n = i\}, G) = \mathbb{P}(E \mid X_n = i)$

Inoltre
$$\mathbb{P}(E \cap \{X_n = i\} \mid G) = \mathbb{P}(E \mid X_n = i)\, \mathbb{P}(X_n = i \mid G)$$

Dim Di

$$\mathbb{P}(E \cap \{X_n = i\} \mid G) = \frac{\mathbb{P}(E, \{X_n = i\}, G)}{\mathbb{P}(G)} =$$

$$= \frac{1}{\mathbb{P}(G)} \underbrace{\mathbb{P}(E \mid \{X_n = i\} \cap G)}_{\mathbb{P}(E \mid X_n = i)}\, \mathbb{P}(\{X_n = i\} \cap G)$$

$$= \mathbb{P}(E \mid X_n = i)\, \mathbb{P}(X_n = i \mid G)$$

— o —

$(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ catena di Markov a tempo e stati discreti con spazio degli stati S

$$\mathbb{P}(X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, X_{n-2} = i_{n-2}, \dots X_1 = i_1, X_0 = i_0)$$

con $i_0, i_1, \_\_\_\_, i_n \in S$

$n = 1$ $\quad \mathbb{P}(X_1 = i_1, X_0 = i_0) = \mathbb{P}(X_1 = i_1 \mid X_0 = i_0)\, \mathbb{P}(X_0 = i_0)$

$$= \pi(0)_{i_0} P(1)^{i_0}_{i_1}$$

$n = 2$ $\quad \mathbb{P}(X_2 = i_2, X_1 = i_1, X_0 = i_0) = \mathbb{P}(X_2 = i_2 \mid X_1 = i_1, \cancel{X_0 = i_0})\, \mathbb{P}(X_1 = i_1, X_0 = i_0)$

$$= \mathbb{P}(X_2 = i_2 \mid X_1 = i_1)\, \mathbb{P}(X_1 = i_1 \mid X_0 = i_0)\, \mathbb{P}(X_0 = i_0)$$

$$= \pi(0)_{i_0} P(1)^{i_0}_{i_1} P(2)^{i_1}_{i_2}$$

per induzione

$$\mathbb{P}(X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots X_1 = i_1, X_0 = i_0) =$$

$$= \pi(0)_{i_0} P(1)^{i_0}_{i_1} P(2)^{i_1}_{i_2} \cdots\cdots P(n)^{i_{n-1}}_{i_n}$$

$$\longrightarrow \mathbb{P}(X_{k+n} = i_n, X_{k+n-1} = i_{n-1} \dots\dots X_k = i_0) =$$

$$= \pi(k)_{i_0} P(k+1)^{i_0}_{i_1} P(k+2)^{i_1}_{i_2} \cdots P(k+n)^{i_{n-1}}_{i_n} \quad \longleftarrow$$

$$= \pi(k)_{i_0}\, P(k+1)^{i_0}_{i_1}\, P(k+2)^{i_1}_{i_2} \cdots P(k+n)^{i_{n-1}}_{i_n} \quad \longleftarrow$$

$$\mathbb{P}(X_{k+n} = i_n \mid X_k = i_0)$$

$$\mathbb{P}(X_{k+2} = i_2 \mid X_k = i_0) = \frac{\mathbb{P}(X_{k+2} = i_2,\ X_k = i_0)}{\mathbb{P}(X_k = i_0)} =$$

$$= \frac{\mathbb{P}(X_{k+2} = i_2,\ X_{k+1} \in S,\ X_k = i_0)}{\mathbb{P}(X_k = i_0)} =$$

$$= \sum_{j \in S} \frac{\mathbb{P}(X_{k+2} = i_2,\ X_{k+1} = j,\ X_k = i_0)}{\mathbb{P}(X_k = i_0)} \longleftarrow$$

$$= \sum_{j \in S} \frac{\cancel{\pi(k)_{i_0}}\, P(k+1)^{i_0}_{j}\, P(k+2)^{j}_{i_2}}{\cancel{\pi(k)_{i_0}}} = \sum_{j \in S} P(k+1)^{i_0}_{j}\, P(k+2)^{j}_{i_2}$$

$$= \big(P(k+1)\,P(k+2)\big)^{i_0}_{i_2}$$

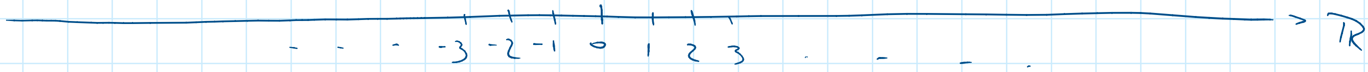
$$\mathbb{P}(X_{k+n} = i_n \mid X_k = i_0) = \big(P(k+1)\,P(k+2) \cdots P(k+n)\big)^{i_0}_{i_n}$$

Se la catena di Markov è omogenea

$$\mathbb{P}(X_{k+n} = i_n \mid X_k = i_0) = \left(P^n \right)^{i_0}_{i_n} = \mathbb{P}(X_n = i_n \mid X_0 = i_0)$$

— o —

$S = \mathbb{Z}$



$\forall \omega \in \Omega \quad X_0(\omega) = i_0$

1° lancio   Se esce Testa $X_1(\omega) = X_0(\omega) + 1$

Se esce croce $X_1(\omega) = X_0(\omega) - 1$

2°

2° lancio Se esce Testa $X_2(\omega) = X_1(\omega)+1$

Se esce croce $X_2(\omega) = X_1(\omega)-1$

n-esimo lancio : Se esce Testa $X_n(\omega) = X_{n-1}(\omega)+1$

Se esce croce $X_n(\omega) = X_{n-1}(\omega)-1$

$\forall i,j \in \mathbb{Z} \quad \mathbb{P}(X_{n+1}=j \mid X_n=i)$

$j \neq i+1,\ j \neq i-1 \qquad \mathbb{P}(X_{n+1}=j \mid X_n=i) = 0$

$\mathbb{P}(X_{n+1}=i+1 \mid X_n=i) = p$ prob che esce Testa

$\mathbb{P}(X_{n-1}=i-1 \mid X_n=i) = 1-p$

$(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i.i.d $\qquad \mathbb{P}_{\xi_n} = B(p) \qquad X_{n+1} = X_n + 2\xi_n - 1$

COSTRUZIONE DI CATENE DI MARKOV

Teo Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato e sia S insieme discreto.

Sia $X_0 : \Omega \to S$ v.a. su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$.

Sia $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successione di v.a. i.i.d. a valori in $\mathbb{R}^N$

T.c. la famiglia $\{X_0, (\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}\}$ sia una famiglia numerabile di v.a. indipendenti.

Sia $f : S\times\mathbb{R}^N \to S$ T.c. $\forall j \in S \quad f^{-1}(\{j\})$ è unione di insiemi del tipo (k, B_k) $k\in S$ con $B_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$

Per ogni $\omega\in\Omega$ definisco per ricorrenza.

$$X_{n+1}(\omega) = f(X_n(\omega), \xi_n(\omega)) \qquad \omega\in\Omega \quad n\geq 0$$

Allora $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una catena di Markov omogenea con matrice di transizione $P = (P^i_j)_{i,j\in S}$ dove

$$P^i_j = \mathbb{P}(f(i, \xi_n) = j) \qquad \forall i, j \in S$$

Dim
$$X_1(\omega) = f(X_0(\omega), \xi_0(\omega))$$

X_0, ξ_0, ξ_1 sono v.a. indipendenti e X_1 dipende solo da X_0 e $\xi_0 \Rightarrow \xi_1$ e X_1 sono indipendenti

$$X_2(\omega) = f(X_1(\omega), \xi_1(\omega))$$

X_2 dipende da X_1 e ξ_1 cioè da X_0, ξ_0 e ξ_1

$\Rightarrow X_2$ e ξ_2 sono v.a. indipendenti

$$X_{n+1}(\omega) = f(X_n(\omega), \xi_n(\omega))$$

X_{n+1} dipende da X_n e ξ_n cioè da $X_0, \xi_0, \xi_1 \ldots \xi_{n-1}$ e ξ_n

$\Rightarrow X_{n+1}$ e ξ_{n+1} sono v.a. indipendenti

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = \mathbb{P}(f(X_n, \xi_n) = j \mid X_n = i) =$$

$$= \frac{\mathbb{P}(f(X_n, \xi_n) = j, X_n = i)}{\mathbb{P}(X_n = i)} = \frac{\mathbb{P}(f(i, \xi_n) = j, X_n = i)}{\mathbb{P}(X_n = i)} =$$

$$= \frac{\mathbb{P}(f(i, \xi_n) = j)\cancel{\mathbb{P}(X_n = i)}}{\cancel{\mathbb{P}(X_n = i)}} = \mathbb{P}(f(i, \xi_n) = j)$$

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1} \ldots X_0 = i_0) =$$

$$= \frac{\mathbb{P}(\overset{f(X_n, \xi_n)}{X_{n+1}} = j, X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots X_0 = i_0)}{\mathbb{P}(X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1} \ldots X_0 = i_0)} =$$

$$= \frac{\mathbb{P}(f(X_n, \xi_n) = j, X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1} \ldots X_0 = i_0)}{\mathbb{P}(X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1} \ldots X_0 = i_0)}$$

$$= \frac{\qquad}{\mathbb{P}(X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(f(i, \xi_n) = j, X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0)}{\mathbb{P}(X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(f(i, \xi_n) = j)\, \cancel{\mathbb{P}(X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1} \dots X_0 = i_0)}}{\cancel{\mathbb{P}(X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1} \dots X_0 = i_0)}}$$

TEOREMA Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato.

Sia $S = \{1 \dots N\}$ o $S = \mathbb{N}$.

Sia $X_0 : \Omega \to S$ v.a. su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$

Sia $P = (P^i_j)_{i,j \in S}$ matrice stocastica indicizzata su S.

Sia $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ successione di v.a. su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$, i.i.d. con $\mathbb{P}_{\xi_n} = U([0,1])$ t.c. $(X_0, (\xi_n)_{n \in \mathbb{N}})$ è una famiglia numerabile di v.a. indipendenti.

Per $i \in S$ e $t \in [0,1]$ pongo

$$f(i,t) := \begin{cases} \min\{ j \in S : \sum_{h \le j} P^i_h \ge t \} & \text{se un tale } j \text{ esiste} \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Per $n \in \mathbb{N}$ definisco $X_{n+1}(\omega) = f(X_n(\omega), \xi_n(\omega))$

$\exists\, \overline{\Omega} \subset \Omega$ evento quasi certo t.c. $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è una catena di Markov omogenea definita su $\overline{\Omega}$ e con matrice di transizione P.

DIM. $X_0 : \Omega \to S$

$X_1(\omega) := f(X_0(\omega), \xi_0(\omega))$

$X_1^{(\omega)} = +\infty \implies \zeta_0^{(\omega)} = 1 \qquad \mathbb{P}(\zeta_0 = 1) = 0$

$\Omega_1 = \{\omega \in \Omega : \zeta_0(\omega) < 1\} \qquad \mathbb{P}(\Omega_1) = 1$

e $\quad X_1(\omega) \in S \quad \forall \omega \in \Omega_1$

$\omega \in \Omega_1 \qquad X_2(\omega) = f(X_1(\omega), \zeta_1(\omega))$

$X_2(\omega) = +\infty \implies \begin{cases} \omega \in \Omega_1 \\ \zeta_1(\omega) = 1 \end{cases} \qquad \mathbb{P}(\zeta_1 = 1) = 0$

$\Omega_2 := \{\omega \in \Omega_1 : \zeta_1 < 1\} \qquad \Omega_2 \subset \Omega_1 \quad \mathbb{P}(\Omega_2) = 1$

$\Omega_1 \supset \Omega_2 \supset \dots \supset \Omega_n \qquad \mathbb{P}(\Omega_n) = 1$

$X_0, X_1, \dots, X_n$ sono v.a. a valori in S

$\bar{\Omega} := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \Omega_n \qquad \mathbb{P}(\bar{\Omega}) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \Omega_n\right) = \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(\Omega_n) = 1$

In $\bar{\Omega}$ è ben definita la successione $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è una catena di Markov omogenea con

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = \mathbb{P}(f(i, \zeta_n) = j)$$

$$f(i, \zeta_n) = j \quad \text{SSE} \quad \begin{cases} \sum_{h=1}^{j} P_h^i \geq \zeta_n \\ \sum_{h=1}^{j-1} P_h^i < \zeta_n \end{cases}$$

$$\{f(i, \zeta_n) = j\} = \left\{ \sum_{h=1}^{j-1} P_h^i < \zeta_n \leq \sum_{h=1}^{j} P_h^i \right\}$$

$$\mathbb{P}(f(i, \zeta_n) = j) = \mathbb{P}\left(\zeta_n \in \left(\underbrace{\sum_{h=1}^{j-1} P_h^i}_{\in [0,1)}, \underbrace{\sum_{h=1}^{j} P_h^i}_{\in [0,1)} \right) \right)$$

$$= \sum_{h=1}^{j} P_h^i - \sum_{h=1}^{j-1} P_h^i = P_j^i \qquad \boxtimes$$

$$= \sum_{h=1} P^i_h - \sum_{h=1} P^i_h = P^i_j \quad \boxtimes$$

———— - ————

Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato -

Sia S insieme discreto e sia $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ catena di Markov

omogenea a valori in S -

Sia $C \subset S$ e sia $\omega \in \Omega$

Dico che ω VISITA C AL PASSO n se $X_n(\omega) \in C$

Dico che ω PARTE DA C se $X_0(\omega) \in C$

Dico che ω VISITA C se $\exists\, n \geq 1$ t.c. $X_n(\omega) \in C$ -

Per $\omega \in \Omega$ definisco

$$t_C(\omega) := \begin{cases} \min\{n \geq 1 : X_n(\omega) \in C\} & \text{se } \omega \text{ visita } C \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases} -$$

t_C è detto TEMPO DI 1° PASSAGGIO IN C -

$t_C : \Omega \to \mathbb{N}_{\geq 1} \cup \{+\infty\}$

$k \in \mathbb{N}$ $\quad \{t_C = k\} = \{X_k \in C, X_{k-1} \notin C, X_{k-2} \notin C \dots X_1 \notin C\}$

$$= \underbrace{\{X_k \in C\}}_{\in\, \mathcal{E}} \cap \underbrace{\{X_{k-1} \notin C\}}_{\in\, \mathcal{E}} \cap \dots \cap \underbrace{\{X_1 \notin C\}}_{\in\, \mathcal{E}} \in \mathcal{E}$$

$$\{t_C = +\infty\} = \Omega \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} \{t_C = k\} \in \mathcal{E}$$

$\mathbb{P}(t_C = k) \qquad \mathbb{P}(t_C = k \mid X_0 = i) =: f^{(k)}_{iC}$

$$\mathbb{P}(t_C < +\infty \mid X_0 = i) =: f_{iC}$$

N.B. $\{t_C < +\infty\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{t_C = k\} \implies$

$$\mathbb{P}(t_C < +\infty \mid X_0 = i) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(t_C = k \mid X_0 = i)$$

cioè $\quad f_{iC} = \sum_{k=1}^{\infty} f_{iC}^{(k)}$

Se $\quad C = \{j\}$ $\qquad \cancel{f_{i\{j\}}} \qquad \cancel{f_{i\{j\}}^{(k)}} \qquad \cancel{t_{\{j\}}}$

$\qquad\qquad\qquad\qquad f_{ij} \qquad f_{ij}^{(k)} \qquad t_j$

$i = j \qquad f_{jj}^{(k)} = \mathbb{P}(t_j = k \mid X_0 = j)$ PROBABILITÀ DI RITORNO IN j AL PASSO k

$f_{jj} = \mathbb{P}(t_j < +\infty \mid X_0 = j)$ PROBABILITÀ DI RITORNO IN j.