giovedì 24 ottobre 2019 16:16

Data P matrice stocastica $N \times N$, $\underline{P} : x \in \mathcal{J} \mapsto xP \in \mathcal{J}$.

— o —

P matrice stocastica / indicizzata su un insieme S
si dice IRRIDUCIBILE
se $\forall\, i,j \in S \quad \exists\, n = n(i,j)$ t.c. $p_{ij}^{(n)} > 0$

Si dice REGOLARE se $\exists\, n \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall\, i,j \in S \quad p_{ij}^{(n)} > 0$.

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad P^{2k} = Id_2 \qquad P^{2k+1} = P$$

PROPRIETÀ (no dim)

Se $S = \{1 \dots N\}$, se P è irriducibile ed ha almeno un elemento diagonale diverso da zero, allora P è regolare

TEOREMA (NO DIM)

Sia P matrice stocastica indicizzata sull'insieme finito $S = \{1, 2, \dots N\}$. Indico con $R^1, R^2, \dots R^N$ le sue righe $\quad R^i = (p_{i1}, p_{i2}, \dots p_{iN}) \quad i = 1 \dots N$

Sia $C := \frac{1}{2} \max \left\{ \| R^i - R^j \|_1 \;:\; 1 \le i < j \le N \right\}$

Allora

1) $C \le 1 \qquad \left(\| R^i - R^j \|_1 \le \| R^i \|_1 + \| R^j \|_1 = 1 + 1 = 2 \right)$

2) Sia $\underline{P} : x \in \mathcal{J} \mapsto xP \in \mathcal{J}$

Allora $\quad \| \underline{P}(x) - \underline{P}(y) \|_1 \le C \| x - y \|_1 \quad \forall\, x, y \in \mathcal{J}$.

3) Se $p_{ij} > 0 \quad \forall\, i,j \in S$, allora $C < 1$.

— o —

$\underline{P^n} : x \in \mathcal{J} \mapsto xP^n \in \mathcal{J}$

$((xP)P)P \dots P \qquad \underline{P^n} = (\underline{P})^n$

TEOREMA Sia P matrice stocastica indicizzata sull'insieme

finito $S=\{1,2,\dots N\}$ -
Sono fatti equivalenti
1) P è regolare
2) P è irriducibile e la mappa associata $\underline{P}: x \to xP$ ammette punto $w \in \mathcal{J}$.
3) $\exists \bar{n}$ t.c. $\forall n \geq \bar{n}$, la matrice P^n ha tutti gli elementi strettamente positivi -
In questo caso si ha che tutte le componenti di w sono strettamente positive -

Dim $1 \Rightarrow 2$ ovvio per i risultati precedenti.
Facciamo vedere che le componenti di w sono positive -
$\forall x \in \mathcal{J}$ $\exists \lim_{n\to\infty} xP^n = w$ $\qquad (xP^n)_j = \sum_{i\in S} x_i p_{ij}^{(n)}$

$\forall x \in \mathcal{J}$ $\forall j \in S$ $\lim_{n\to\infty} \sum_{i\in S} x_i p_{ij}^{(n)} = w_j$
Scelgo $x = e_j$ $\Rightarrow \sum_{i\in S} x_i p_{ij}^{(n)} = p_{jj}^{(n)}$
Quindi $\lim_{n\to\infty} p_{jj}^{(n)} = w_j \longleftarrow$

Fissiamo $i \in S=\{1 \dots N\}$. Poiché P è irriducibile.
$\exists k_0 = k_0(i,j)$ t.c. $p_{ij}^{(k_0)} > 0$
$n \geq k_0$ $\quad P^n = P^{n-k_0} P^{k_0}$
$$p_{jj}^{(n)} = \sum_{\alpha\in S} p_{j\alpha}^{(n-k_0)} p_{\alpha j}^{(k_0)} \geq p_{ji}^{(n-k_0)} p_{ij}^{(k_0)} \geq 0$$

Supponiamo per assurdo che $w_j = 0$
Allora $p_{jj}^{(n)} \longrightarrow w_j = 0$

Allora $p_{jj}^{(n)} \longrightarrow w_j = 0$

$$\lim_{n\to\infty} p_{ji}^{(n-k)} \underbrace{p_{ij}^{(k)}}_{>0} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} p_{ji}^{(n)} = 0 \quad \forall i \in S$$

$$1 = \sum_{i\in S} p_{ji}^{(n)} \longrightarrow 0 \quad \text{ASSURDO}$$

$\Rightarrow w_j > 0 \quad \forall j \in S$

$2 \Rightarrow 3$ $\quad \forall x \in \mathcal{J} \quad xP^n \to w$ vettore stocastico avente $w_j > 0 \quad \forall j \in S$

$\forall i \in S = \{1 \ldots N\} \quad \underbrace{e_i P^n}_{\text{i-esima riga di } P^n} \to w$

Per il Teorema della permanenza del segno

$\forall i, j \in S \quad \exists \bar{n} = \bar{n}(i,j)$ t.c. $p_{ij}^{(n)} > 0 \quad \forall n \geq \bar{n}(i,j)$

$n_0 := \max\{\bar{n}(i,j) : i,j \in S\}$

Sicuramente $p_{ij}^{(n)} > 0 \quad \forall i,j \in S \quad \forall n \geq n_0$

$3 \Rightarrow 1$ ovvio

— o —

ESEMPIO $\quad N = 2$

$$P = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix} \qquad a \in [0,1], \; b \in [0,1]$$

$\to a = b = 0 \quad P = Id \qquad a = b = 1 \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$P - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-a-\lambda & a \\ b & 1-b-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(P-\lambda I) = (1-a-\lambda)(1-b-\lambda) - ab$$
$$= \lambda^2 - (2-a-b)\lambda + (1-a)(1-b) - ab$$
$$= \lambda^2 - (2-a-b)\lambda + 1 - a - b$$

$$\Delta = (2-a-b)^2 - 4(1-a-b) = \cancel{4} + a^2 + b^2 - \cancel{4}a - \cancel{4}b + 2ab$$

$$\Delta = (2-a-b)^2 - 4(1-a-b) = \cancel{4} + a^2 + b^2 - \cancel{4a} - \cancel{4b} + 2ab \cancel{-4} + \cancel{4a} + \cancel{4b}$$

$$= (a+b)^2$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{2-a-b \pm (a+b)}{2} \begin{cases} \to 1 \\ \to 1-a-b =: \lambda_2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} (\cancel{1}-a)x + ay = \cancel{x} \\ bx + (\cancel{1}-b)y = \cancel{y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -a(x-y) = 0 \\ b(x-y) = 0 \end{cases} \qquad x = y \qquad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (1-a-b) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} \cancel{(1-a)x} + ay = (\cancel{1}-\cancel{a}-b)x \\ bx + \cancel{(1-b)y} = (\cancel{1}-a-\cancel{b})y \end{cases}$$

$$\begin{cases} ay + bx = 0 \\ ay + bx = 0 \end{cases} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} -a \\ b \end{pmatrix}$$

$$M = (v_1 \;\; v_2) = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ 1 & b \end{pmatrix} \Rightarrow P = M \overbrace{\underline{diag}(\lambda_1 \;\; \lambda_2)}^{D} M^{-1}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$P^2 = (MDM^{-1})(MDM^{-1}) = MD^2M^{-1}$$

$$P^3 = P^2P = (MD^2M^{-1})(MDM^{-1}) = MD^2\cancel{M^{-1}}\cancel{M}DM^{-1} = MD^3M^{-1}$$

$$P^n = MD^nM^{-1}$$

$$D^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ 1 & b \end{pmatrix} \qquad M^{-1} = \frac{1}{a+b} \begin{pmatrix} b & a \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^n = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ 1 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} \frac{1}{a+b} \begin{pmatrix} b & a \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{a+b} \begin{pmatrix} b+a\lambda_2^n & a-a\lambda_2^n \\ b-b\lambda_2^n & a+b\lambda_2^n \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 1-a-b = 1-(a+b) \qquad 0 \le a+b \le 2$$

$$-2 \le -(a+b) \le 0$$

$$-1 \le 1-(a+b) \le 1$$

Esclusi i casi $(a,b)=(0,0)$ e $(a,b)=(1,1)$,

sicuramente $\lambda_2 \in (-1,1)$ $\quad \lim_{n\to\infty} \lambda_2^n = 0$

x vettore stocastico $\quad xP^n \quad x=(x_1,x_2)$ $\quad x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$, $x_1+x_2=1$

$$xP^n = \frac{1}{a+b}(x_1, x_2) \begin{pmatrix} b+a\lambda_2^n & a-a\lambda_2^n \\ b-b\lambda_2^n & a+b\lambda_2^n \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{a+b}\left(x_1(b+a\lambda_2^n)+x_2(b-b\lambda_2^n),\ x_1(a-a\lambda_2^n)+x_2(a+b\lambda_2^n) \right)$$

$$= \frac{1}{a+b}\left(b+\lambda_2^n(ax_1-bx_2),\ a+\lambda_2^n(bx_2-ax_1) \right)$$

$$\longrightarrow \frac{1}{a+b}(b,a) = \left(\frac{b}{a+b}, \frac{a}{a+b} \right) \qquad \forall x=(x_1,x_2) \in \mathcal{Y}$$

Un processo stocastico è una famiglia di variabili aleatorie $\{X_t\}_{t\in\mathcal{T}}$ su uno stesso spazio probabilizzato dove $\mathcal{T}$ è un insieme ordinato.

Supponiamo $\exists$ un insieme discreto S (detto INSIEME DEGLI STATI) t.c. $X_t(\Omega) \subseteq S$ $\forall t \in \mathcal{T}$.

— - —

Se $\mathcal{T}$ è un insieme discreto, dico che ho un processo stocastico a tempo discreto $\mathcal{T} = \mathbb{N}$

Se $\mathcal{T}$ è un insieme con la cardinalità del continuo, dico che ho un processo stocastico a tempo continuo $\mathcal{T} = [0, +\infty)$

PROCESSI STOCASTICI A TEMPO DISCRETO (A STATI DISCRETI)

$(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ successione di v.a. su uno spazio probabilizzato $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ t.c. $X_n(\Omega) \subseteq S$.

Sicuramente $\forall n$ X_n è una v.a. discreta.

Conosco la sua distribuzione $\mathbb{P}_{X_n}$ se conosco la sua densità discreta.

$\forall i \in S$ $\quad \mathbb{P}(X_n = i)$

$\pi(n) = (\pi(n)_i)_{i \in S} \qquad \pi(n)_i := \mathbb{P}(X_n = i)$

Se $S = \{1 \ldots N\}$ $\qquad \pi(n) = (\pi(n)_1, \pi(n)_2, \ldots \pi(n)_N)$

Se $S \simeq \mathbb{N}$ $\Rightarrow \pi(n)$ è una successione.

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$ $\pi(n)$ è un vettore stocastico indicizzato da S.

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad P(n+1) \qquad i, j \in S$

$$P(n+1)^i_j = \begin{cases} \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i) & \text{se } \mathbb{P}(X_n = i) > 0, \\ \delta_{ij} & \text{se } \mathbb{P}(X_n = i) = 0. \end{cases}$$

MATRICE DI TRANSIZIONE

$P(n+1)$ è una matrice stocastica indicizzata da S.

$\forall i,j \in S \quad P(n+1)^i_j \geq 0$ vale

$\forall i \in S \quad \sum_{j \in S} P(n+1)^i_j$

Se $\mathbb{P}(X_n = i) = 0 \Rightarrow P(n+1)^i_j = \begin{cases} 1 & j = i \\ 0 & j \neq i \end{cases}$

$\Rightarrow \sum_{j \in S} P(n+1)^i_j = 0 + \ldots + 0 + 1 + 0 \ldots 0 = 1$

Se $\mathbb{P}(X_n = i) > 0 \quad \sum_{j \in S} \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i) =$

$= \mathbb{P}\left(\underbrace{\bigcup_{j \in S} \{X_{n+1} = j\}}\ \Big|\ X_n = i\right) = \mathbb{P}(\Omega \mid X_n = i) = 1$

$\pi(n+1)_j \quad j \in S \qquad D_i = \{X_n = i\} \quad i \in S$

$\pi(n+1)_j := \mathbb{P}(X_{n+1} = j) = \sum_{i \in S} \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid D_i)\mathbb{P}(D_i)$

$= \sum_{i \in S} \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i)\mathbb{P}(X_n = i)$

$= \sum_{i \in S} P(n+1)^i_j \, \pi(n)_i = \sum_{i \in S} \pi(n)_i \cdot P(n+1)^i_j$

$= (\pi(n) P(n+1))_j \quad \forall j$ cioè

$\pi(n+1) = \pi(n) P(n+1)$

$\pi(n) = \pi(n-1) P(n) \qquad \pi(n+1) = \pi(n-1) P(n) P(n+1)$

Per induzione $\pi(n+1) = \pi(0) P(1) P(2) \ldots P(n) P(n+1)$

CASO PARTICOLARE

Processi stocastici omogenei $P(n+1) \equiv P$

Processi stocastici omogenei $P(n+1) \equiv P$

$$\pi(n+1) = \pi(0) P \cdot P \ldots P \cdot P = \pi(0) P^{n+1}$$