

## GRAFO ORIENTATO

È una coppia  $(V, E)$  dove  $V$  è un insieme finito  
i cui elementi chiamiamo NODI e

$E$  è un sottoinsieme di  $V \times V$

Quindi ciascun elemento di  $E$  è una coppia  
ordinata di nodi -

Se  $(i, j) \in E$  dico che  $(i, j)$  è un ARC DEL  
GRAFO -

Se  $(i, i_2) \in E$

$(i_1, i_2) \in E$

$(i_2, i_3) \in E$

'

'

$(i_n, j) \in E$

dico che la concatenazione

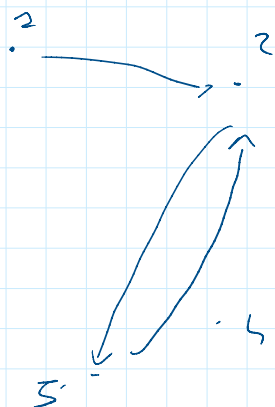
$(i, i_2) (i_1, i_2) (i_2, i_3) \dots (i_n, j)$

è un CAMMINO ORIENTATO

Da  $i$  VERSO  $j$

$\#V = k$

$k$



Se  $(i, j) \in E$

$i \longrightarrow j$

Sia  $(V, E)$  un grafo orientato con  $\#V = n$

Definisco  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$  in questo modo:

Pongo

$$A_{ij}^i = \begin{cases} 1 & (i, j) \in E, \\ 0 & (i, j) \notin E. \end{cases}$$

Considero

$$(A^2)_{ij}^i = \sum_{k=1}^n A_{ik}^i A_{kj}^k$$

$(A^2)_{ij}^i = 0$  SSE  $A_k^i A_j^k = 0 \quad \forall k=1 \dots n$   
 SSE almeno uno tra  $A_k^i$  e  $A_j^k$  è zero  $\forall k=1 \dots n$   
 SSE non esiste nessun cammino da  $i$  a  $j$  composto di 2 soli archi.

$(A^2)_{ij}^i > 0$  SSE esiste un cammino da  $i$  verso  $j$  fatto di due soli archi.

$$(A^3)_{ij}^i = \sum_{l=1}^n A_l^i \sum_{k=1}^n A_l^k A_j^k = \sum_{l,k=1}^n A_l^i A_l^k A_j^k$$

$(A^3)_{ij}^i > 0$  SSE esiste un cammino da  $i$  verso  $j$  composto di esattamente tre archi.

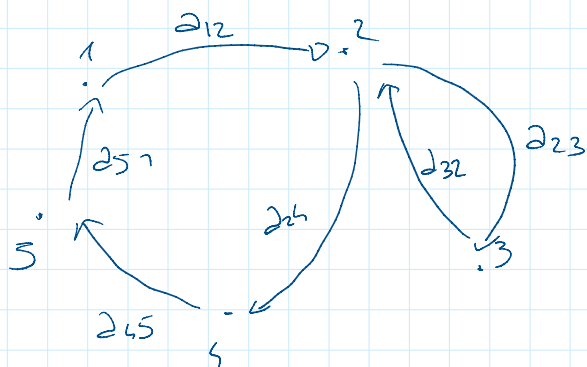
$\forall k \in \mathbb{N}, k > 0 \quad (A^k)_{ij}^i > 0$  SSE esiste un cammino da  $i$  verso  $j$  composto di esattamente  $k$  archi.

La matrice  $A$  si dice MATRICE DI INCIDENZA.

Una coppia  $(S, E)$  si dice un grafo pesato se

- 1)  $(S, E)$  è un grafo orientato.
- 2) Ad ogni arco  $(i, j) \in E$  è associato un peso  $a_{ij} > 0$

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$



Considero

$A$  T.c.

$$A_{ij}^i = \begin{cases} a_{ij} & \text{se } (i, j) \in E \\ 0 & \text{se } (i, j) \notin E \end{cases}$$

Considera  $A$  T.c.  $A_{ij}^i = \begin{cases} 2_{ij} & \text{se } (i,j) \in E \\ 0 & \text{se } (i,j) \notin E \end{cases}$

$$(A^2)_{ij}^i = \sum_{k=1}^n A_{ik}^i A_{kj}^k > 0 \quad \text{SSE} \quad \exists k \in \{1, \dots, n\} \text{ T.c.}$$

$$A_{ik}^i A_{kj}^k > 0 \quad \text{SSE} \quad (i,k), (k,j) \in E$$

$(A^2)_{ij}^i > 0$  SSE esiste un cammino da  $i$  verso  $j$  composto da 2 archi.

$$S = \{1, 2, 3, \dots, n\}$$

Fisso  $i \in S$  e supponiamo che dal nodo  $i$  esca almeno un arco:  $\exists j \in \{1, \dots, n\} \text{ T.c. } 2_{ij} > 0$

Pongo  $A_i := \sum_{j=1}^n 2_{ij}$  - chiaramente  $A_i > 0$

Definisco  $p_{ij} := \frac{2_{ij}}{A_i} \quad \forall j = 1, \dots, n$

$$(p_{i2}, p_{i3}, \dots, p_{in})$$

$$p_{ij} \geq 0 \quad \forall j = 1, \dots, n$$

e  $p_{ij} = 0 \quad \text{SSE} \quad 2_{ij} = 0$

$$\sum_{j=1}^n p_{ij} = \sum_{j=1}^n \frac{2_{ij}}{A_i} = \frac{1}{A_i} \sum_{j=1}^n 2_{ij} = \frac{1}{A_i} \cdot A_i = 1$$

Se dal nodo  $i$  non esce nessun arco pongo

$$p_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & j=i, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

$$(p_{i2}, p_{i3}, \dots, p_{in}) = e_i \quad \text{i-esimo vettore della base canonica.}$$

Siamese mente è stocastico

Associato al graf. pesato  $(S, E)$  la matrice  
 stocastica  $P = (P_{ij})_{i,j=1 \dots n}$ .

Si può fare anche l'associazione inversa -  
 Sia  $P = (P_{ij}) \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$  matrice stocastica.

Scelgo  $S = \{1, 2, \dots, n\}$

Se  $P_{ij}^i > 0$  dico che  $(i, j) \in E$  con  $a_{ij} = P_{ij}^i$

Se  $P_{ij}^i = 0$  dico che  $(i, j) \notin E$

Sia  $P$  una matrice stocastica indicizzata da un insieme  
 $S$ . Dico che uno stato  $i \in S$  vede un altro  
 stato  $j \in S$  se  $\exists n \in \mathbb{N}$  T.c.  $(P^n)_{ij}^i > 0$

n.b.  $P^0 = Id \quad (Id)_{ij}^i = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

quindi ogni stato  $i \in S$  vede se stesso.

"i vede j" si scrive  $i \rightarrow j$

"i non vede j" si scrive  $i \not\rightarrow j$

Se  $i, j \in S$  sono due stati T.c.  $i \rightarrow j$  e  $j \rightarrow i$   
 si dice che "i e j sono stati comunicanti." e si scrive  
 $i \leftrightarrow j$

Se  $S = \{1 \dots n\}$   $P = (P_{ij}^i)_{i,j \in \{1 \dots n\}}$

Considero il suo polinomio caratteristico -

$$P_n(X) = \det(XI - P) = \sum_{i=0}^n a_i X^i \quad a_n = 1$$

$$= a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X^1 + a_0 X^0$$

$$P_n(X) = X^n + 1 \quad X^{n-1} + \dots + 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad X \in \mathbb{C} \quad P \in M_n(\mathbb{R})$$



$$P_n(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0 \text{Id} \quad X \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$$

TEOREMA (DI ALGEBRA LINEARE): Ogni matrice quadrata è una radice del suo polinomio caratteristico.

Lo applico alla mia matrice stocastica  $P$ :

$$\rightarrow P^n + a_{n-1}P^{n-1} + a_{n-2}P^{n-2} + \dots + a_1P + a_0 \text{Id} = 0$$

$$(P^n)_j^i = -\left(a_{n-1}(P^{n-1})_j^i + a_{n-2}(P^{n-2})_j^i + \dots + a_1P_j^i + a_0 \text{Id}_j^i\right)$$

Considero due stati  $i$  e  $j$ :

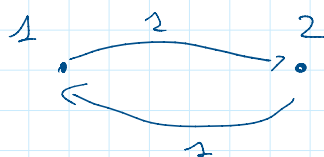
$$\text{Se } (P^0)_j^i = (P^1)_j^i = \dots = (P^{n-1})_j^i = 0 \Rightarrow (P^k)_j^i = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$B := \text{Id} + P + P^2 + \dots + P^{n-1}$$

$$(B)_j^i = 0 \quad \text{se e solo se} \quad (\text{Id})_j^i = (P)_j^i = \dots = (P^{n-1})_j^i = 0$$

se e solo se  $\nexists$  un cammino da  $i$  verso  $j$   
cioè  $i \not\rightarrow j$

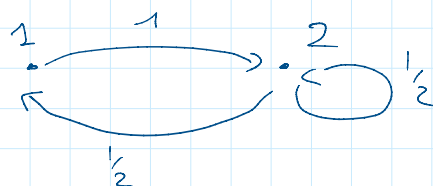
$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$



$$P^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \text{Id} + P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$



$$n=2 \quad B = \text{Id} + P =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$$

Se  $\forall i, j \in S$  v'ha che  $i \rightarrow j$ , dico che la matrice stocastica  $P$  è irriducibile. ovvero  
 $\forall i, j \in S \quad \exists n = n(i, j) \in \mathbb{N}$  T.c.  $(P^n)_{ij} > 0$

Se  $\exists n \in \mathbb{N}$  T.c.  $(P^n)_{ij} > 0 \quad \forall i, j \in S$ , dico che la matrice stocastica  $P$  è regolare.

OSSERVAZIONE: Ogni matrice stocastica regolare è irriducibile.

Il viceversa non è vero:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Abbiamo visto che } P^2 = Id$$

$$\Rightarrow P^3 = P \cdot P^2 = P \quad P^4 = Id$$

$$P^n = \begin{cases} P & n = 2k+1 \\ Id & n = 2k \end{cases}$$

Se  $P$  matrice stocastica indicizzata da un insieme  $S$  finito o numerabile.

Indico  $P_{ij}^{(n)} =: P_{ij}^{(n)}$   $(P^n)_{ij}^{(n)} =: P_{ij}^{(n)}$

Se  $j \in S$  - Dico che  $j$  è uno STATO RICORRENTE

$$\text{se } \sum_{n=1}^{\infty} P_{jj}^{(n)} = +\infty$$

Dico che  $j$  è uno STATO TRANSIENTE

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_{ij}^{(n)} \text{ converge.}$$

**PROPRITÀ** Sia  $T$  matrice stocastica indicizzata su un insieme  $S$  finito o numerabile.

- 1) Se  $i \rightarrow j$  e  $j$  è ricorrente allora  $\sum_{n \in \mathbb{N}} P_{ij}^{(n)} = +\infty$
- 2) Se  $i \leftrightarrow j$ , allora  $i$  e  $j$  sono entrambi ricorrenti o entrambi transienti.

Dim 1) Se da  $i \rightarrow j$ , so che  $\exists n_0 = n_0(i, j) \in \mathbb{N}$  T.c.

$$P_{ij}^{(n_0)} > 0$$

$$\text{Per } k \geq n_0 \quad P^k = P^{n_0} \cdot P^{k-n_0}$$

$$\text{In particolare} \quad P_{ij}^{(k)} = \sum_{\ell \in S} P_{i\ell}^{(n_0)} P_{\ell j}^{(k-n_0)} \geq P_{ij}^{(n_0)} P_{jj}^{(k-n_0)}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} P_{ij}^{(k)} \geq \sum_{k=n_0}^{\infty} P_{ij}^{(k)} \geq \sum_{k=n_0}^{\infty} \underbrace{P_{ij}^{(n_0)}}_{>0} P_{jj}^{(k-n_0)} =$$

$$= P_{ij}^{(n_0)} \sum_{k=n_0}^{\infty} P_{jj}^{(k-n_0)} \quad n := k - n_0$$

$$= \underbrace{P_{ij}^{(n_0)}}_{>0} \underbrace{\sum_{n \in \mathbb{N}} P_{jj}^{(n)}}_{=+\infty} = +\infty$$

- 2) Supponiamo che  $j$  sia uno stato ricorrente, da  $i \leftrightarrow j$  e dimostriamo che  $i$  è ricorrente

$$i \leftrightarrow j \quad \begin{cases} i \rightarrow j & \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ T.c. } P_{ij}^{(n_0)} > 0 \\ j \rightarrow i & \exists m_0 \in \mathbb{N} \text{ T.c. } P_{ji}^{(m_0)} > 0 \end{cases}$$

$$\text{Per } k \geq n_0 + m_0 \quad P^k = P^{n_0} \cdot P^{k-(n_0+m_0)} \cdot P^{m_0}$$

In particolare

$$P_{ii}^{(k)} = \sum_{\alpha, \beta \in S} P_{i\alpha}^{(n_0)} \cdot P_{\alpha\beta}^{(k-(n_0+m_0))} \cdot P_{\beta i}^{(m_0)} \geq$$

$$\geq P_{ij}^{(n_0)} P_{jj}^{(k-(n_0+m_0))} P_{ji}^{(m_0)}$$

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} P_{ii}^{(k)} \geq \sum_{k=n_0+m_0}^{\infty} P_{ii}^{(k)} \geq \sum_{k=n_0+m_0}^{\infty} \underbrace{P_{ij}^{(n_0)}}_{>0} P_{jj}^{(k-(n_0+m_0))} \underbrace{P_{ji}^{(m_0)}}_{>0}$$

$$= P_{ij}^{(n_0)} P_{ji}^{(m_0)} \sum_{k=n_0+m_0}^{\infty} P_{jj}^{(k-(n_0+m_0))} \quad n = k - (n_0+m_0)$$

$$= \underbrace{P_{ij}^{(n_0)}}_{\substack{V \\ 0}} \underbrace{P_{ji}^{(m_0)}}_{\substack{V \\ 0}} \underbrace{\sum_{n \in \mathbb{N}} P_{jj}^{(n)}}_{+\infty} = +\infty$$

Se  $P$  una matrice stocastica indicizzata da un insieme  $S$  finito o numerabile -

Se  $C \subseteq S$ , dico che  $C$  è una classe chiusa (per la matrice stocastica  $P$ ) se

$\forall i \in C$  e  $\forall j \in S \setminus C$  si ha che  $i \nrightarrow j$

N.B. Ovviamente  $S$  è una classe chiusa -

L'unione di due classi chiuse è una classe chiusa -

Se  $C$  e  $D$  sono due classi chiuse T.c.  $C \cap D \neq \emptyset$ , allora anche  $C \cap D$  è una classe chiusa -

**DEF** Se  $C$  è una classe T.c. nessun sottoinsieme

proprio (e non vuoto) di  $C$  è ancora una classe chiusa, dico che  $C$  è una classe chiusa minimale.

**PROPRIETÀ** Sia  $T$  una matrice stocastica indicizzata su un insieme  $S$  e sia  $C \subseteq S$  una classe chiusa. Allora  $C$  è una classe chiusa minimale sse tutti gli elementi di  $C$  sono tra loro comunicanti.

**DM 1** Supponiamo che gli elementi di  $C$  siano a due a due comunicanti e dimostriamo che  $C$  è minimale.

Per assurdo: Supponiamo  $\exists D \subseteq S$  t.c.  $D \neq \emptyset$   
 $D \subset C$   
Sia  $i \in D$  e  $j \in C \setminus D$

Poiché  $D$  è classe chiusa,  $i \not\rightarrow j$ .

Assumo però  $i, j \in C$  e quindi  $i \leftrightarrow j$ .

**2** Supponiamo che  $C$  sia classe chiusa minimale e dimostriamo che tutti i suoi voti sono comunicanti.

Per ogni  $j \in C$   $D_j := \{i \in C : i \leftrightarrow j\}$

La  $T_{C \times C}$  è reale sse  $D_j = \emptyset \forall j \in C$ .

Sicuramente  $j \notin D_j \Rightarrow D_j$  è un sottoinsieme proprio di  $C$ .

Prendo  $i \in D_j$  e  $k \notin D_j$ .

Mostro che  $i \not\rightarrow k$  - (così  $D_j$  è classe chiusa)

|                               |                                              |
|-------------------------------|----------------------------------------------|
| 1° caso $k \notin C$          | 2° caso $k \in C \setminus D_j$              |
| $i \in D_j \subset C$         | $\Rightarrow k \rightarrow j$                |
| $k \notin C$                  | Se $i \rightarrow k$ (e $k \rightarrow j$ ), |
| $\Rightarrow i \rightarrow k$ | allora $i \rightarrow j$ - ASSURDO           |

$k \neq l$

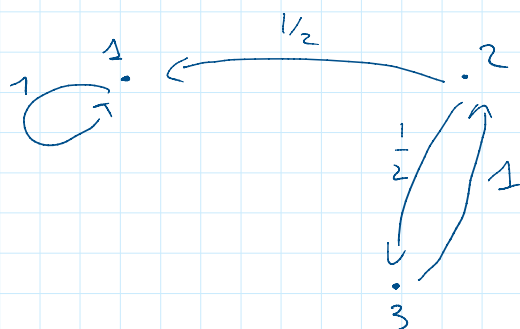
Se  $i \rightarrow k$  ( $e \rightarrow j$ ),  
 allora  $i \rightarrow j$  : ASSURDO  
 perché  $i \in D_j$

$\Rightarrow D_j$  è classe chiusa  $\subset$  classe chiusa minimale

$\Rightarrow D_j = \emptyset \quad \forall j$

$$S = \underbrace{(C_1 \cup C_2 \dots \cup C_5)}_{\text{unione disgiunta}} \cup T$$

**ESEMPIO**  $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad n=3$



$$P^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \quad B = I + P + P^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 3/2 \end{pmatrix}$$

$1 \rightarrow 1$

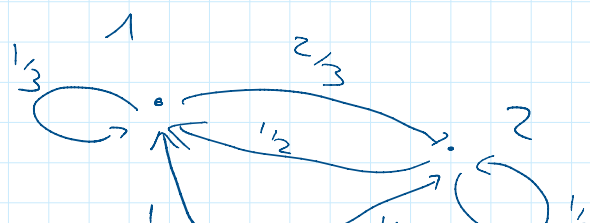
$C_1 = \{1\}$

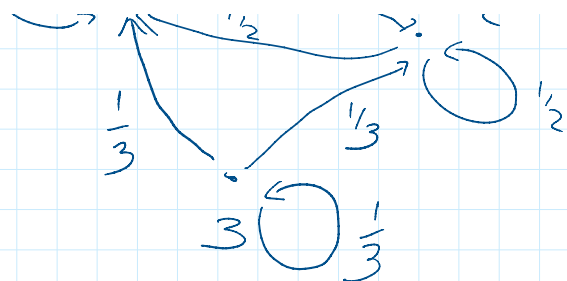
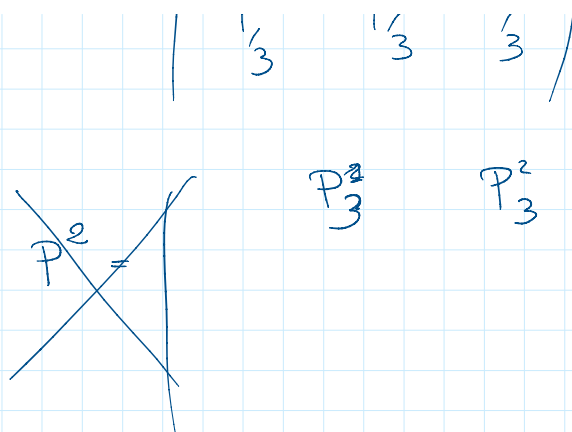
$2 \rightarrow 1, 2, 3$

$3 \rightarrow 1, 2, 3$

$S = \{1\} \cup \underbrace{\{2, 3\}}_T$   
 $\overset{n}{C} = C_1$

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$





$$B = I + P + P^2 = \begin{pmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

$$1 \rightarrow 1, 2$$

$$C_1 = \{1, 2\}$$

$$2 \rightarrow 1, 2$$

$$3 \rightarrow 1, 2, 3 \text{ me } 1 \rightarrow 3$$

$$S = \underbrace{\{1, 2\}}_{C_2 = C} \cup \underbrace{\{3\}}_T$$