

$$v = (v_1 \dots v_n) \in (\mathbb{R}^n)^+ \quad v_i \geq 0 \quad \forall i=1, \dots, n \quad \sum_{i=1}^n v_i = 1$$

$$\mathcal{V} = \left\{ v \in (\mathbb{R}^n)^+ : v_i \geq 0 \quad \forall i=1, \dots, n, \quad \sum_{i=1}^n v_i = 1 \right\}$$

$\mathcal{V}$ è un convesso.

Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $C \subset X$.

Dico che C è compatto per successioni se $\forall \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset C$, si può estrarre una sottosuccessione $\{x_{k_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ convergente ad un elemento di C secondo la metrica d .

$$(X, d) = ((\mathbb{R}^n)^+, d_1)$$

$$x = (x_1 \dots x_n)$$

$$y = (y_1 \dots y_n)$$

$$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$$

$$C = \mathcal{V} \quad \{x^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$$

$$x^{(k)} = (x_1^{(k)} \dots x_n^{(k)}) \in \mathcal{V}$$

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \sum_{i=1}^n x_i^{(k)} = 1, \quad x_i^{(k)} \geq 0 \quad \forall i=1, \dots, n$$

$$\text{Di conseguenza } x_1^{(k)} \in [0, 1] \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$\Rightarrow$ una sottosuccessione estratta $\{x_1^{(k_2(k))}\}_{k \in \mathbb{N}}$ che converge a un valore $\bar{x}_2 \in [0, 1]$

Considero $\{x_2^{(k_2(k))}\}_{k \in \mathbb{N}}$ è una successione estratta da $\{x_2^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ ed ha valori in $[0, 1]$

Quindi esiste una sottosuccessione $k_2(k)$ estratta da $k_1(k)$
 T.c. $\{x_2^{(k_2(k))}\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge a un valore $\bar{x}_2 \in [0, 1]$.

Se considero $\{x_1^{l_2(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ è estretto da $\{x_1^{l_1(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$

e dunque converge a $\bar{x}_1$

Ripetendo il procedimento n volte trovo una successione estretta $l_n(k) \rightarrow \infty, \forall i=1, \dots, n$

$$x_i^{l_n(k)} \rightarrow \bar{x}_i \in [0, 1]$$

Considero $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$

Siccome $\bar{x}_i \geq 0, \forall i=1, \dots, n$

$x^{l_n(k)}$ è un vettore stocastico $\forall k \in \mathbb{N}$

$$1 = \sum_{i=1}^n x_i^{l_n(k)} \rightarrow \sum_{i=1}^n \bar{x}_i = 1 \quad \text{cioè} \quad \bar{x} \in \mathcal{S}$$

$$\mathcal{S} = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}^+)^n : x_i \geq 0, \sum_{i=1}^n x_i = 1\}$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1$$

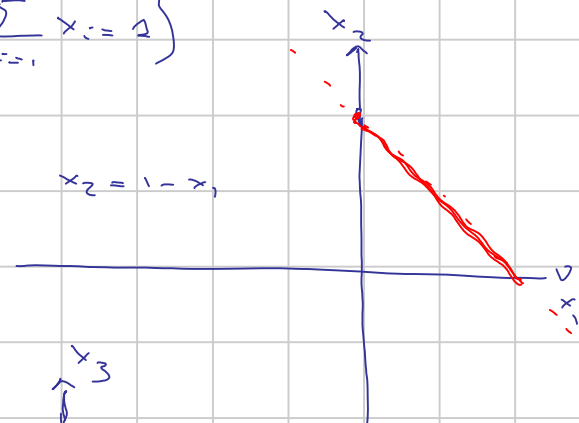
$$n=2$$

$$x_1 + x_2 = 1$$

$$x_2 = 1 - x_1$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$



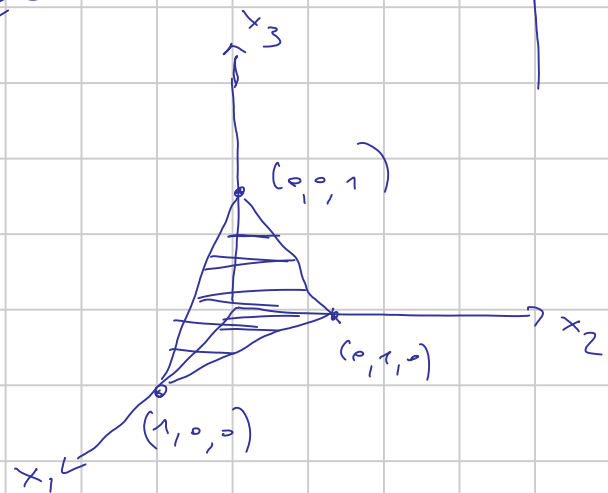
$$n=3$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

$$x_3 \geq 0$$



Sia P una matrice quadrata $n \times n$

Dico che P è una matrice stocastica se ogni sua riga è un vettore stocastico.

$$P = (P_{ij}^i)_{i,j=1, \dots, n}$$

~~$$A \in M_{n \times k} \quad v \in \mathbb{R}^k$$

$$A : v \in \mathbb{R}^k \rightarrow Av \in \mathbb{R}^n$$

$$(Av)_i = \sum_{j=1}^k A_{ij}^i v_j$$~~

$$P \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$$

$$\underline{P} : v \in (\mathbb{R}^n)^* \mapsto \underline{v}P \in (\mathbb{R}^n)^*$$

$$(\underline{v}P)_j = \sum_{\ell=1}^n v_\ell P_j^\ell \quad \forall j=1 \dots n$$

$$\underline{P} : v \in \mathcal{Y} \mapsto \underline{v}P \in (\mathbb{R}^n)^*$$

PROPOSIZIONE

Sia P una matrice $n \times n$ e sia $\underline{P}$ l'applicazione lineare associata.

Allora $\underline{P}(\mathcal{Y}) \subseteq \mathcal{Y}$ sse P è una matrice stocastica.

DIM 1° caso Supponiamo che P sia una matrice stocastica e dimostriamo che $\underline{P}(\mathcal{Y}) \subseteq \mathcal{Y}$.

$$\text{Sia } x \in \mathcal{Y} \quad \underline{P}(x) = xP$$

$$(\underline{P}(x))_j = \sum_{\ell=1}^n x_\ell P_j^\ell \quad \begin{matrix} \text{red } \nearrow 0 \forall \ell, j \\ \text{red } \searrow \geq 0 \end{matrix}$$

$$\sum_{j=1}^n (\underline{P}(x))_j = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{\ell=1}^n x_\ell P_j^\ell \right) = \sum_{\ell=1}^n \left(\sum_{j=1}^n x_\ell P_j^\ell \right) =$$

$$= \sum_{\ell=1}^n \left(x_\ell \underbrace{\left(\sum_{j=1}^n P_j^\ell \right)}_{=1 \forall \ell} \right) = \sum_{\ell=1}^n x_\ell = 1 \quad \Rightarrow \quad \underline{P}(x) \in \mathcal{Y} \quad \forall x \in \mathcal{Y}$$

cioè $\underline{P}(\mathcal{Y}) \subseteq \mathcal{Y}$.

2°) Supponiamo che $\underline{P}(\mathcal{Y}) \subseteq \mathcal{Y}$ - Voglio dimostrare che P è una matrice stocastica.

$$\text{So che } \forall x \in \mathcal{Y} \Rightarrow xP \in \mathcal{Y}$$

$$\text{Scego } x = e_1 = (1, 0, \dots, 0)$$

$$\text{Ciassumiamo } \mathcal{Y} \ni e_1 P$$

$$\text{Calcolo } (e_1 P)_j = \sum_{\ell=1}^n (e_1)_\ell P_j^\ell = (e_1)_1 P_j^1$$

$$= \sum_{\ell=1}^n \delta_{1\ell} P_j^\ell = P_j^1 \quad \forall j=1 \dots n$$

$e_1 P = (P_1^1, P_2^1, \dots, P_n^1) = 1^{\text{a}} \text{ riga di } P$
 quindi la 1° riga di P è un vettore stocastico.

Per ogni $i = 1, \dots, n$ prendo $x = e_i = (0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ i\text{-esima componente}}}{1}, 0, \dots, 0)$

Per ipotesi $\exists xP$

$$\forall j=1, \dots, n \quad (xP)_j = \sum_{l=1}^n (e_i)_l P_{lj}^l = \sum_{l=1}^n \delta_{il} P_{lj}^l = P_{ij}^i$$

$x=e_i \Rightarrow xP = (P_{i2}^i, P_{i2}^i, \dots, P_{in}^i) = i\text{-esima riga di } P$

Quindi $\forall i=1, \dots, n$ l' i -esima riga di P è un vettore stocastico
cioè P è una matrice stocastica.

$X(\Omega)$ v.e. discreta $X(\Omega) = \{t_i\}_{i \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}$

$\forall i \in \mathbb{N} \quad \pi_i := P(X=t_i) \quad \{\pi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$

$\pi_i \geq 0 \quad \forall i \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \sum_{i \in \mathbb{N}} \pi_i &= \sum_{i \in \mathbb{N}} P(X=t_i) = P\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{X=t_i\}\right) \\ &= P\left(X \in \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{t_i\}\right) = P(X \in \overline{\mathbb{R}}) = 1 \end{aligned}$$

$$\ell_2 = \left\{ x = (x_j)_{j \in \mathbb{N}} : x_j \in \mathbb{R} \quad \sum_{j \in \mathbb{N}} |x_j| < +\infty \right\}$$

$x \in \ell_2 \quad \|x\|_2 = \sum_{j \in \mathbb{N}} |x_j| \quad (\ell_2, \|\cdot\|_2) \text{ è uno spazio di Banach}$

Un vettore stocastico per noi è una successione

$\pi = (\pi_j)_{j \in \mathbb{N}} \quad \text{T.c.} \quad \pi_j \geq 0 \quad \text{e} \quad \sum_{j \in \mathbb{N}} \pi_j = 1$

$\|\pi\|_2$

— o —

$x \in \ell^2$

xP

$P = (P_{ij}^i)_{i,j \in \mathbb{N}}$

$$(xP)_j = \sum_{i \in \mathbb{N}} x_i P_{ij}^i$$

$$P = (P_j^i)_{i,j \in \mathbb{N}}$$

$$\sup_{i \in \mathbb{N}} \sum_{j \in \mathbb{N}} |P_j^i| =: \|P\| = \sup_{i \in \mathbb{N}} \|P^i\|_1 < +\infty$$

Se $\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}} \quad a_i \in \mathbb{R}$

Se $\text{per} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ una permutazione

Considera $b_i = a_{\text{per}(i)}$

Può succedere che $\sum a_i$ converga e $\sum b_i$ non converga.

Però se $\sum |a_i|$ converge, allora $\sum a_i = \sum b_i$ hanno lo stesso risultato.

Una matrice infinita $P = (P_j^i)_{i,j \in \mathbb{N}}$ si dice stocastica se

$$P_j^i \geq 0 \quad \forall i, j \in \mathbb{N}$$

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} P_j^i = 1 \quad \forall i \in \mathbb{N} \quad (\Rightarrow \|P\| = 1)$$

$$x \in \ell_2 \quad P = (P_j^i)_{i,j \in \mathbb{N}} \quad \forall x \quad \|Px\| < +\infty$$

$$(xP)_j := \sum_{i \in \mathbb{N}} x_i P_j^i$$

$$\text{Se } \sum_{j \in \mathbb{N}} |(xP)_j| < +\infty \quad \text{siccome } (xP)_j \in \mathbb{R} \quad \forall j$$

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} |(xP)_j| = \sum_{j \in \mathbb{N}} \left| \sum_{i \in \mathbb{N}} x_i P_j^i \right| \leq$$

$$= \sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{i \in \mathbb{N}} |x_i| \cdot |P_j^i| = \sum_{i \in \mathbb{N}} \sum_{j \in \mathbb{N}} |x_i| |P_j^i| =$$

$$= \sum_{i \in \mathbb{N}} |x_i| \left(\sum_{j \in \mathbb{N}} |P_j^i| \right) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} |x_i| \|P\| = \|P\| \cdot \underbrace{\sum_{i \in \mathbb{N}} |x_i|}_{\|x\|_1}$$

$$= \|P\| \cdot \|x\|_2$$

$x \in l_1$: Socratico

P T.c. $\|P\|$ finita $\Rightarrow xP \in \text{Socratico}$
???

Come nel caso finito l'immagine dell'insieme dei vettori Socratici è contenuta nell'insieme dei vettori Socratici. S.E. la "matrice" P è Socratica.

Come nel caso finito l'insieme dei "vettori Socratici" $\{x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}} : x_i \geq 0, \sum_{i \in \mathbb{N}} x_i = 1\} \subset l_1$ è un insieme convesso.

$$\left(\pi_i^{(n)} \right)_{i \in \mathbb{N}} = \pi^{(n)}$$

$$\pi_i^{(n)} = \delta_{in}$$

$$\begin{array}{lcl} n=1 & \pi^{(1)} = & \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \end{pmatrix} \\ n=2 & \pi^{(2)} = & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \end{pmatrix} \\ n=3 & \pi^{(3)} = & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \end{pmatrix} \end{array}$$

$\downarrow \quad \downarrow$
 $0 \quad 0$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \pi^{(n)} = (0, 0, 0, 0, 0, \dots)$$

che non è un vettore Socratico

$$P, Q \in M_{n \times n}(\mathbb{R}) \quad (PQ)_j^i = \sum_{\ell=1}^n P_\ell^i Q_j^\ell$$

P, Q matrici infinite T.c. $\|P\| < +\infty, \|Q\| < +\infty$

$$(PQ)_j^i = \sum_{\ell \in \mathbb{N}} P_\ell^i Q_j^\ell$$

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} |(PQ)_j^i| = \sum_{j \in \mathbb{N}} \left| \sum_{\ell \in \mathbb{N}} P_\ell^i Q_j^\ell \right| \leq$$

$$\leq \sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{\ell \in \mathbb{N}} |P_\ell^i| |Q_j^\ell| = \sum_{\ell \in \mathbb{N}} \sum_{j \in \mathbb{N}} |P_\ell^i| |Q_j^\ell|$$

$$= \sum_{\ell \in \mathbb{N}} |P_\ell^i| \left(\sum_{j \in \mathbb{N}} |Q_j^\ell| \right) \leq \sum_{\ell \in \mathbb{N}} |P_\ell^i| \|Q\| =$$

$$\leq \sum_{\ell \in \mathbb{N}} |P_\ell^i| \stackrel{\wedge}{\|Q\|} = \|Q\| \cdot \sum_{\ell \in \mathbb{N}} |P_\ell^i| \stackrel{\wedge}{\|P\|} \leq \|P\| \cdot \|Q\| \stackrel{\wedge}{+\infty}$$