TEMPI DI ATTESA, LIMITE CENTRALE, METRICHE, CONVESSI

Note Title 08/10/2019

La legge dei grandi numeri vale anche nelle seguenti ipotesi: $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ successione di v.a.

- identicamente distribuite
- con valore atteso finito
- ~~2~~ due a due indipendenti

— o —

Sia $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di v.a. nonnegative per cui valga la legge forte dei grandi numeri.

Considero $T_n(\omega) := \sum_{k=0}^{n} S_k(\omega)$ $n\in\mathbb{N}$

Poiché le $S_k(\omega)$ sono non negative, per ogni $\omega\in\Omega$ la successione numerica $\{T_n(\omega)\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione monotone crescente non negative.

Definisco

$$N_t(\omega) := \begin{cases} +\infty & \text{se } T_n(t) < t \quad \forall n\in\mathbb{N} \\ \sup\{n\in\mathbb{N} : T_n(\omega)\le t\} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Sia $E := \mathbb{E}[S_n]$ per ogni $n\in\mathbb{N}$

Allora $\lim_{t\to+\infty} \frac{N_t(\omega)}{t} = \frac{1}{E}$ p.o. ω (se $E=0$ $\frac{1}{E}$ "=" $+\infty$)

DIM $\frac{T_n(\omega)}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} S_k(\omega)$ converge in probabilità, in media quadratica e $\mathbb{P}$-q.c. a E

Distinguo due casi

(1) La successione $T_n(\omega)$ converge quando $n\to\infty$.

cioè $\sum_{k=0}^{\infty} S_k(\omega) = z\in\mathbb{R}$.

Allora $T_n(\omega)\le z$ $\forall n\in\mathbb{N}$

Considero $t>z$: $T_n(\omega) < t$ $\forall n\in\mathbb{N}$ e dunque $N_t(\omega) = +\infty \quad \forall t > \tau$

cioè $\dfrac{N_t(\omega)}{t} = +\infty \quad \forall t > \tau \Rightarrow \lim_{t \to +\infty} \dfrac{N_t(\omega)}{t} = +\infty$

lo vedo come $\dfrac{1}{E}$ con $E = 0$

$$\frac{T_n(\omega)}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} S_k(\omega) \longrightarrow E$$

$$0 \le T_n(\omega) \le \tau \qquad 0 \le \frac{T_n(\omega)}{n} \le \frac{\tau}{n}$$

Quindi quando $n \to \infty$ $\dfrac{T_n(\omega)}{n}$ converge a 0

Per l'unicità del limite $E = 0$

2 $T_n(\omega)$ diverge a $+\infty$ $\quad \sum_{k=0}^{\infty} S_k(\omega) = +\infty.$

$$N_t(\omega) = \sup\{n \in \mathbb{N} : T_n(\omega) \le t\}$$

Sicuramente $\lim_{t \to \infty} N_t(\omega) = +\infty \Rightarrow$ posso lavorare con $N_t(\omega) \ge 2$

$$a_t(\omega) = N_t(\omega) - 1 \qquad b_t(\omega) = N_t(\omega) + 1$$

$$T_{a_t(\omega)}(\omega) \le t < T_{b_t(\omega)}(\omega)$$

$$\frac{1}{T_{b_t(\omega)}(\omega)} < \frac{1}{t} < \frac{1}{T_{a_t(\omega)}(\omega)}$$

$b_t(\omega) := N_t(\omega) + 1$

$a_t(\omega) = N_t(\omega) - 1$

$$\frac{N_t(\omega)}{T_{b_t(\omega)}(\omega)} < \frac{N_t(\omega)}{t} < \frac{N_t(\omega)}{T_{a_t(\omega)}(\omega)}$$

$$\frac{b_t(\omega) - 1}{T_{b_t(\omega)}(\omega)} < \frac{N_t(\omega)}{t} < \frac{a_t(\omega) + 1}{T_{a_t(\omega)}(\omega)}$$

$$\frac{b_t(\omega)-1}{b_t(\omega)} \frac{1}{T_{b_t(\omega)}(\omega)/b_t(\omega)} < \frac{N_t(\omega)}{t} < \frac{a_t(\omega)+1}{a_t(\omega)} \frac{1}{T_{a_t(\omega)}(\omega)/a_t(\omega)}$$

$\to E$ estratta da $\frac{T_n(\omega)}{n}$; $\to E$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{x}$ $\to 1$; $\lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x}$ $\to 1$

$t \to +\infty$ $\quad N_t(\omega) \to +\infty$ $\quad a_t(\omega) \to +\infty$

$b_t(\omega) \to +\infty$

Successioni estratte

Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione

Sia $k: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strettamente monotona crescente

La successione $\{a_{k(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ si dice successione estratta da $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

TEO Se $\exists \lim_{n\to\infty} a_n = L \in \overline{\mathbb{R}}$

allora $\exists \lim_{n\to\infty} a_{k(n)} = L$

Per i due carabinieri $\lim_{t\to+\infty} \frac{N_t(\omega)}{t} = \frac{1}{E}$

— o —

Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato.

Sia X una v.a. scalare su tale spazio e sia $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di v.a. scalari sullo stesso spazio.

Sia $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ la legge di X

e per ogni $n\in\mathbb{N}$ sia $F_{X_n} : \mathbb{R} \to [0,1]$ la legge di X_n.

Dico che la successione X_n converge in legge alla v.a. X se

$\forall t\in\mathbb{R}$ t.c. F_X è continua in t si ha

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(t) = F_X(t)$$

Teorema centrale del limite

Sia $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di v.a. su uno spazio $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$. Supponiamo che le $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ siano

- i.i.d
- $\mathbb{E}[X_n] = E$ finito
- $Var[X_n] = \sigma^2$ finita

Per $n\in\mathbb{N}$ considero $S_n(\omega) = \sum_{k=1}^{n} X_k(\omega)$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{S_n - nE}{\sigma\sqrt{n}} \le t\right) = \Phi(t) \qquad \forall t\in\mathbb{R}$$

cioè la successione $Y_n(\omega) := \dfrac{S_n(\omega) - nE}{\sigma\sqrt{n}}$ converge in legge a una v.a. X t.c. $\mathbb{P}_X = \mathcal{N}(0,1)$.

Inoltre la convergenza è uniforme cioè

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in\mathbb{R}} \left| \mathbb{P}\left(\frac{S_n - nE}{\sigma\sqrt{n}} \le t\right) - \Phi(t)\right| = 0$$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n}$ t.c. $\forall n > \bar{n}$ e $\forall t\in\mathbb{R}$

$$\Phi(t) - \varepsilon \le \mathbb{P}\left(\frac{S_n - nE}{\sigma\sqrt{n}} \le t\right) \le \Phi(t) + \varepsilon$$

$$\bar{X}_n := \frac{1}{n} S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \qquad S_n = n\bar{X}_n$$

$$\Phi(t) - \varepsilon \le \mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{n}\,(\bar{X}_n - E)}{\sigma\cancel{\sqrt{n}}} \le t\right) \le \Phi(t) + \varepsilon$$

$$\Phi(t) - \varepsilon \le \mathbb{P}\left(\bar{X}_n - E \le \frac{\sigma t}{\sqrt{n}}\right) \le \Phi(t) + \varepsilon$$

$$\Phi(t) - \varepsilon \leq \mathbb{P}\left(\overline{X}_n \leq E + \frac{\sigma t}{\sqrt{n}}\right) \leq \Phi(t) + \varepsilon$$

$$\mathbb{P}\left(\overline{X}_n \leq s\right) \qquad s = E + \frac{\sigma t}{\sqrt{n}}$$

$$t = \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\left(s - E\right)$$

$$\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(s-E)\right) - \varepsilon \leq \mathbb{P}\left(\overline{X}_n \leq s\right) \leq \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(s-E)\right) + \varepsilon$$

TEOREMA DI BERRY - ESSEN

Nelle stesse ipotesi del Teorema centrale del limite e supponendo che $\mathbb{E}[|X_n|^3] = \gamma$ finito, abbiamo che

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \left| \mathbb{P}\left(\frac{S_n - nE}{\sigma\sqrt{n}} \leq t\right) - \Phi(t) \right| \leq \frac{C}{\sqrt{n}}$$

dove C dipende da σ^2 e da γ.

METRICA, SPAZIO METRICO

Sia X un insieme non vuoto e sia

$d: X \times X \to \mathbb{R}$.

Se d gode delle seguenti proprietà:

1) $d(x,y) \geq 0 \quad \forall x,y \in X$ e $d(x,y)=0$ SSE $x=y$

2) $d(x,y) = d(y,x) \quad \forall x,y \in X$

3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \quad \forall x,y,z \in X$

dico che la funzione d è una metrica (distanza) su X e la coppia (X,d) si dice uno spazio metrico.

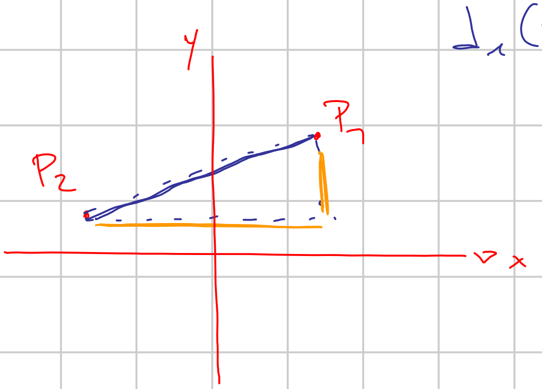
Esempio $\quad X=\mathbb{R} \quad d(x,y) = |x-y|$

$X = \mathbb{Q} \quad d(x,y) = |x-y|$

$X = \mathbb{R}^2 \quad d_2(P_1,P_2) = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

$P_1\ (x_1, y_1)$
$P_2\ (x_2, y_2)$

$d_1(P_1,P_2) = |x_1-x_2| + |y_1-y_2|$



$d_\infty(P_1,P_2) = \max\{|x_1-x_2|, |y_1-y_2|\}$

$\forall p \in [1,+\infty)$

$d_p(P_1,P_2) = \left(|x_1-x_2|^p + |y_1-y_2|^p\right)^{1/p}$

Sia (X,d) uno spazio metrico.

Sia $\bar{x} \in X$ e sia $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione a valori in X

Dico che x_n converge a $\bar{x}$ nella metrica d se

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, \bar{x}) = 0$$

Sia (X,d) uno spazio metrico e sia $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione a valori in X.

Dico che $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di Cauchy nella metrica d se

$\forall \varepsilon>0 \quad \exists \bar{n}=\bar{n}(\varepsilon) \quad$ t.c. $\quad \forall k,n>\bar{n} \quad d(x_k,x_n)<\varepsilon$.

— o —

Si può dimostrare che

$\forall (X,d)$ spazio metrico, ogni successione convergente in (X,d) è anche successione di Cauchy in (X,d).

Il viceversa non è vero.

Se (X,d) è uno spazio metrico t.c. ogni successione di Cauchy in (X,d) converge in (X,d) dico che (X,d) è uno spazio metrico completo.

$X=\mathbb{R} \quad d(x,y)=|x-y|$

$(\mathbb{R}^{\not{2}n},d^2)$, $(\mathbb{R}^{\not{2}n},d_1)$, $(\mathbb{R}^{\not{2}n},d_\infty)$, $(\mathbb{R}^{\not{2}n},d_p)$

— o —

Sia (X,d) uno spazio metrico.

Sia $x_0\in X$ e sia $r>0$.

L'insieme

$$B_r(x_0)=\{x\in X : d(x,x_0)<r\}$$

si dice PALLA APERTA DI CENTRO x_0 e RAGGIO r.

Esempio $(\mathbb{R}^2,d_2) \qquad P_0=(x_0,y_0)$

$$B_r(P_0):=\{P=(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x-x_0)^2+(y-y_0)^2<r^2\}$$

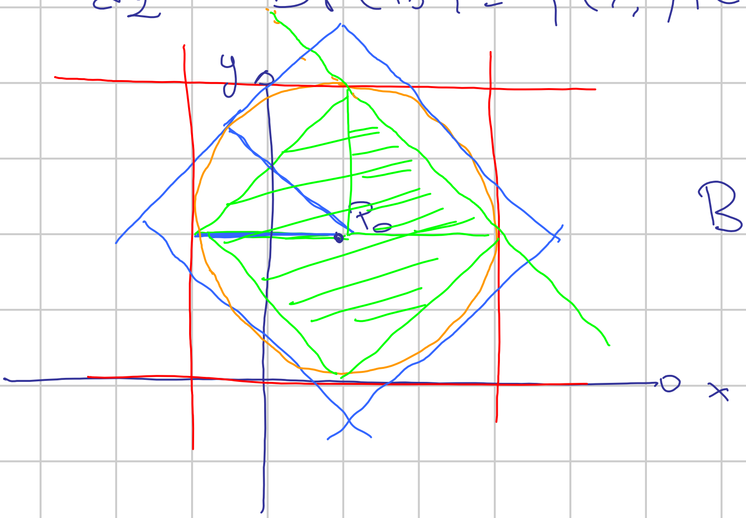
Un sottoinsieme $A\subset X$, con (X,d) spazio metrico, si dice aperto se $\forall x_0 \in A \quad \exists\, r = r(x_0) > 0$ t.c.

$$B_r(x_0) \subset A$$

Un sottoinsieme $C \subset X$ si dice chiuso se $X \setminus C$ è aperto.

$P_0 = (1,2) \qquad B_r(P_0) \qquad d_2$

d_2: $B_r^2(P_0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + (y-2)^2 < r^2\}$



d_1:

$B_r^1(P_0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :$
$|x-1| + |y-2| < r\}$

$x \geq 1 \quad y \geq 2$

$x - 1 + y - 2 < r$

$y < -x + r + 3$

$d_\infty \quad B_r^\infty(P_0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x-1|, |y-2|\} < r\}$
$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x-1| < r$ e $|y-2| < r\}$
$1-r < x < 1+r$ e $2-r < y < 2+r$

$\forall r > 0 \quad \exists\, \bar{n}$ t.c. $\forall n > \bar{n} \quad d(x_n, \bar{x}) < r$
$\forall r > 0 \quad \exists\, \bar{n}$ t.c. $\forall n > \bar{n} \quad x_n \in B_r(\bar{x})$

Sia X uno spazio vettoriale e sia $N : X \to \mathbb{R}$ una funzione che gode delle seguenti proprietà:

1) $N(x) \geq 0 \quad \forall x \in X$ e $N(x) = 0$ sse $x = 0_X$
2) $N(\lambda x) = |\lambda|\, N(x) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$ e $\forall x \in X$
3) $N(x+y) \leq N(x) + N(y) \quad \forall x, y \in X$

Dico che (X, N) è uno spazio normato e che

N è una NORMA su X

Si è soliti scrivere $\|x\|$ invece di $N(x)$

PROPRIETÀ Se X è uno spazio vettoriale e $(X, \|\cdot\|)$ è uno spazio normato, allora posto

$$d(x,y) := \|x-y\| \qquad \forall x,y \in X,$$

si ha che (X,d) è uno spazio metrico.

DIM
$$d(x,y) = \|x-y\| \geq 0 \qquad \forall x,y \in X$$
$$d(x,y) = 0 \quad \text{SSE} \quad \|x-y\| = 0 \quad \text{SSE} \quad x-y = 0_X$$
$$\text{SSE} \quad x = y$$
$$x, y, z \in X$$
$$d(x,y) = \|x-y\| = \|(x-z)+(z-y)\| \leq$$
$$\leq \|x-z\| + \|z-y\| = d(x,z) + d(z,y)$$

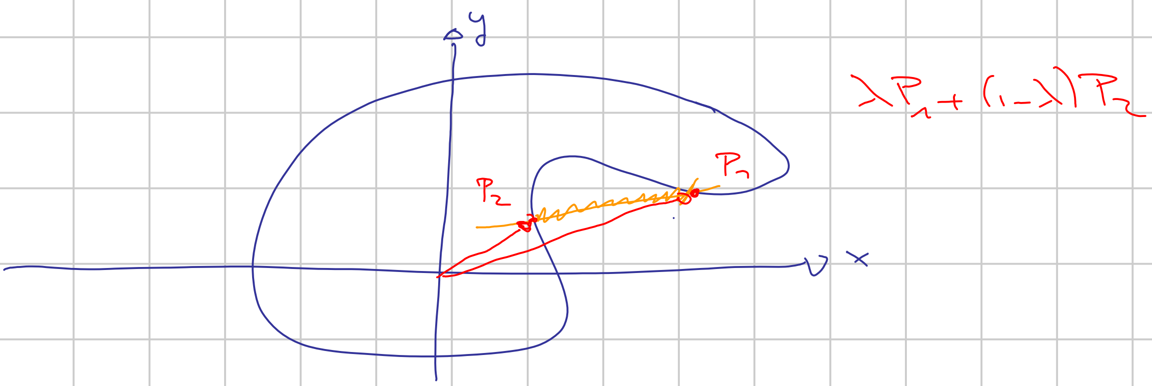
Se $(X, \|\cdot\|)$ è uno spazio normato ed è uno spazio metrico completo rispetto alla metrica $d(x,y) = \|x-y\|$ indotta dalla norma, dico che X è uno SPAZIO DI BANACH.

— o —

INSIEMI CONVESSI.

Sia V uno spazio vettoriale e sia X un sottoinsieme di V.
Dico che X è un insieme convesso se $\forall x,y \in X$ e $\forall \lambda \in [0,1]$, il vettore $\lambda x + (1-\lambda) y \in X$

Esempio $\mathbb{R}^2$



PROPRIETÀ Sia V uno spazio vettoriale e sia X un sottoinsieme convesso di V.
Allora $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\forall x_1 \ldots x_n \in X$ e $\forall \lambda_1 \ldots \lambda_n$ numeri reali non negativi t.c. $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, si ha che $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \in X$

DIM Per induzione su n.
Se $n=2$ non c'è niente da dimostrare.
Se $n>2$ $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_{n-1} x_{n-1}) + \lambda_n x_n$

$\bar{\lambda} := \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \in [0,1]$ Posso supporre $\bar{\lambda} \in (0,1)$

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = \bar{\lambda}\left(\underbrace{\frac{\lambda_1}{\bar{\lambda}}}_{\geq 0} x_1 + \underbrace{\frac{\lambda_2}{\bar{\lambda}}}_{\geq 0} x_2 + \ldots + \underbrace{\frac{\lambda_{n-1}}{\bar{\lambda}}}_{\geq 0} x_{n-1}\right) + \lambda_n x_n$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda_i}{\bar{\lambda}} = \frac{1}{\bar{\lambda}}\left(\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i\right) = \frac{1}{\bar{\lambda}}\bar{\lambda} = 1$$

Per l'ipotesi di induzione $\frac{\lambda_1}{\bar{\lambda}} x_1 + \ldots + \frac{\lambda_{n-1}}{\bar{\lambda}} x_{n-1} \in X$
Lo chiamo $\bar{x}$

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = \bar{\lambda}\bar{x} + \lambda_n x_n \qquad \text{Ma } \lambda_n = 1 - \bar{\lambda}$$
$$= \bar{\lambda}\bar{x} + (1-\bar{\lambda}) x_n \in X$$

Considero $V = (\mathbb{R}^n)^*$ È uno spazio vettoriale.
$v = (v_1 \ldots v_n) \in (\mathbb{R}^n)^*$ $\quad \|v\|_1 = \sum_{i=1}^n |v_i|$
$$\|v\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n v_i^2\right)^{1/2}$$

Considero $\mathcal{J} := \{v \in (\mathbb{R}^n)^* : v = (v_1 \ldots v_n) \quad v_i \geq 0, \sum_{i=1}^n v_i = 1\}$

N.B. Sia X una v.a. che prende solo un # finito (n) di valori $X(\Omega) = \{t_1, t_2, \dots t_n\}$

$\forall i = 1 \dots n \quad \mathbb{P}(X = t_i) =: p_i \qquad p_i \geq 0$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X = t_i) = \mathbb{P}\left(X \in \bigcup_{i=1}^{n} \{t_i\}\right) = \mathbb{P}(X \in \mathbb{R}) = 1$$

$\Rightarrow (p_1 \dots p_n) \in \mathcal{J}$

Se $v = (v_1 \dots v_n) \in \mathcal{J} \qquad \|v\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |v_i| = \sum_{i=1}^{n} v_i = 1$

DEF L'insieme dei vettori riga $v \in (\mathbb{R}^n)^*$ le cui componenti sono nonnegative e in cui la somma delle componenti si dice insieme dei vettori stocastici.

PROPR $\mathcal{J}$ insieme dei vettori stocastici a n componenti è un insieme convesso di $(\mathbb{R}^n)^*$.

DIM Siano $x, y \in \mathcal{J} \qquad x = (x_1 \dots x_n) \quad \forall i\ x_i \geq 0 \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = 1$

$y = (y_1 \dots y_n) \quad y_i \geq 0 \quad \sum_{i=1}^{n} y_i = 1$

Sia $\lambda \in [0,1]$. Considero

$\lambda x + (1-\lambda) y = \lambda (x_1 \dots x_n) + (1-\lambda)(y_1 \dots y_n) =$

$= (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) + ((1-\lambda) y_1, (1-\lambda) y_2, \dots, (1-\lambda) y_n)$

$= (\lambda x_1 + (1-\lambda) y_1, \ \lambda x_2 + (1-\lambda) y_2, \ \dots, \ \lambda x_n + (1-\lambda) y_n)$

$\Rightarrow$ Per ogni $i = 1 \dots n$, l'i-esima componente di $\lambda x + (1-\lambda) y$ è $\underbrace{\lambda}_{\geq 0} \underbrace{x_i}_{\geq 0} + \underbrace{(1-\lambda)}_{\geq 0} \underbrace{y_i}_{\geq 0} \geq 0$

La somma delle componenti è $\sum_{i=1}^{n} (\lambda x_i + (1-\lambda) y_i) =$

$$\lambda \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)}_{=1} + (1-\lambda) \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}_{=1} = \lambda \cdot 1 + (1-\lambda) \cdot 1 = \lambda + (1-\lambda) = \underline{1}$$