

$N(\mu, \sigma^2)$ $\mu \in \mathbb{R}$ $\sigma^2 > 0$ la distribuzione A.-r. associata alle densità

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 1$$

$\mu=0$ $\sigma^2=1$ $N(0,1)$ gaussiana standard

$$f_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \text{Se } P_{X_0} &= N(0,1) \quad E[|X|] = \int_{\mathbb{R}} |x| P_{X_0}(dx) = \int_{\mathbb{R}} |x| f_0(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} |x| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx < +\infty \end{aligned}$$

$$E[X_0] = \int_{\mathbb{R}} x P_{X_0}(dx) = \int_{\mathbb{R}} x f_0(x) dx = \int_{\mathbb{R}} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Var}[X_0] &= \int_{\mathbb{R}} x^2 P_{X_0}(dx) = \int_{\mathbb{R}} x^2 f_0(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^2 \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{(-x)}{1} \underbrace{\left(-x \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\right)}_{\frac{d}{dx} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)} dx \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\left((-x) \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \right) \Big|_{x=-\infty}^{x=+\infty} + \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{2\pi} = 1$$

$$P_{X_0} = N(0, 1)$$

$$X := aX_0 + b$$

$$a > 0 \quad b \in \mathbb{R}$$

$$P_X = f(x)dx$$

$$f(x) = \frac{1}{|a|} f_0\left(\frac{x-b}{a}\right) = \frac{1}{a} f_0\left(\frac{x-b}{a}\right) = \frac{1}{a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-b}{a}\right)^2\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi a^2}} \exp\left(-\frac{(x-b)^2}{2a^2}\right)$$

$$\text{cioè } P_X = N(b, a^2)$$

$$\Rightarrow \text{Se } P_Y = N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow P_Y = P_{aX_0 + \mu} \text{ con } P_{X_0} = N(0, 1)$$

$$\Rightarrow E[Y] = E[aX_0 + \mu] = aE[X_0] + E[\mu] = a \cdot 0 + \mu = \mu$$

$$\text{e } \text{Var}[Y] = \text{Var}[aX_0 + \mu] = a^2 \text{Var}[X_0] = a^2 \cdot 1 = a^2$$

La legge associata alla distribuzione $N(0, 1)$ è indicata Φ
 Inoltre la densità associata a $N(0, 1)$ è pari a 0

$$\Phi(t) + \Phi(-t) = 1$$

Dim

$$\Phi(-t) = \int_{-\infty}^{-t} f_0(x) dx \quad x = -y$$

$$= \int_{+\infty}^t f_0(-y) (-1) dy = \int_t^{+\infty} \underbrace{f_0(-y)}_{= f_0(y)} dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f_0(y) dy - \int_{-\infty}^t f_0(y) dy = 1 - \Phi(t) \Rightarrow \Phi(-t) + \Phi(t) = 1$$

$x \rightarrow -\infty \quad y \rightarrow +\infty$
 $x = -t \quad y = t$
 $dx = -1 dy$
 $[t, +\infty) = \mathbb{R} \setminus (-\infty, t)$

$$P_X = N(\mu, \sigma^2) \quad F_X(t) = P(X \leq t) \quad \textcircled{A}$$

Considero X_0 r.v. T.c. $P_{X_0} = N(0, 1)$ e so che

$$P_{\mu + aX_0} = N(\mu, \sigma^2) = P_X$$

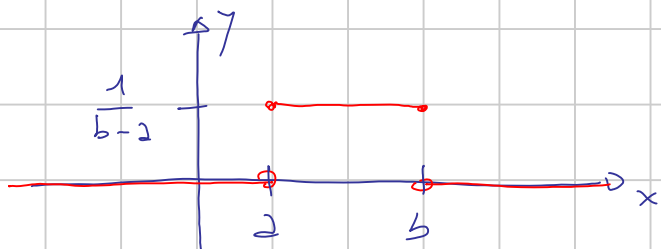
$$\textcircled{A} \quad F_X(t) = P(X \leq t) = P(\mu + aX_0 \leq t) = P\left(X_0 \leq \frac{t-\mu}{a}\right)$$

$$F_X(t) = \Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)$$

V.a. con distribuzione uniforme su un intervallo $[a, b]$.

La distribuzione uniforme sull'intervallo $[a, b]$ si indica $U([a, b])$ ed è la distribuzione A.r. associata alla densità

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a, b]}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$



È semplicemente la restrizione di $\mathbb{1}_{\mathbb{R}}$ all'intervallo $[a, b]$

rinormalizzato in modo che

$$U(A) = 1 \quad \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \text{ t.c. } A \supseteq [a, b]$$

Se X è una v.a. r.c. $P_X = U([a, b])$, allora

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & t < a \\ \frac{t-a}{b-a} & a \leq t < b \\ 1 & t \geq b \end{cases}$$

$$E[X] = \frac{a+b}{2}$$

$$\text{Var}[X] = \frac{(b-a)^2}{12}$$

V.A. a valori vettoriali.

Ci è $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ spazio probabilizzato e una funzione $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$X: \omega \mapsto (X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega)) \in \mathbb{R}^n$$

Dico che la funzione X è una v.e. vettoriale o una v.a. multivariata se:

$$\rightarrow \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \text{ si ha } \{X \in A\} \in \mathcal{F}.$$

Si dimostra facilmente che una funzione $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ è una v.a. multivariata sse tutte le sue componenti sono

v.e. scalari.

Le v.e. $X_1, \dots, X_n$ inducono la distribuzione $P_{X_1}, \dots, P_{X_n}$ sui borelliani di $\mathbb{R}$.

D'altra parte $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ posso calcolare $P(X \in A)$ quindi è ben definita una funzione $P_X: \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0,1]$

Basta porre $P_X(A) = P(X \in A)$

Si dimostra che $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), P_X)$ è uno spazio probabilizzato.

La probabilità P_X è la distribuzione di X o

DISTRIBUZIONE CONGIUNTA di $(X_1, \dots, X_n)$ e sono

$P_{X_1, X_2, \dots, X_n}$

Le distribuzioni $P_{X_1}, \dots, P_{X_n}$ definite su $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ si dicono DISTRIBUZIONI MARGINALI di X .

$F_X: (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto P(X_1 \leq t_1, X_2 \leq t_2, \dots, X_n \leq t_n) \in [0,1]$

$n=2$ $X, Y: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ v.e. su $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ T.c. $E[X]$ ed $E[Y]$ esistono giunti.

$$\text{Cov}(X, Y) := E[(X - E[X])(Y - E[Y])]$$

è detta covarianza di X e Y .

$$|\text{Cov}(X, Y)| \leq \sqrt{\text{Var}[X] \text{Var}[Y]}$$

$$\text{Cov}(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y]$$

$$\rightarrow \text{Var}[X+Y] = \text{Var}[X] + \text{Var}[Y] + 2 \text{Cov}(X, Y)$$

Se $X_1, \dots, X_n$ v.e. tutte con valore atteso finito,

allora

$$\text{Var}\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = \sum_{i=1}^n \text{Var}[X_i] + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{Cov}(X_i, X_j)$$

EVENTI INDIPENDENTI

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ uno spazio probabilizzato e siano $A, B \in \mathcal{F}$.

Dico che A e B sono indipendenti se

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Siano $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$. Dico che $A_1, \dots, A_n$ è una famiglia di eventi indipendenti se $\forall k=2, \dots, n$ e $\forall A_{i_1}, \dots, A_{i_k}$ dist. 2 a 2

$$\text{ha } A_1, \dots, A_n \text{ si ha}$$
$$P\left(\bigcap_{j=1}^k A_{i_j}\right) = \prod_{j=1}^k P(A_{i_j})$$

N.B. $P(B) > 0$ A e B indipendenti.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A)$$

V.A. INDIPENDENTI

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ uno spazio probabilizzato e siano

$X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ v.a. su tale spazio

$Y: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$

Considero $(X, Y): \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$: è una v.a. su $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

Dico che X e Y sono v.a. indipendenti se

$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ si ha

$$P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A) \cdot P(Y \in B)$$

cioè

$$P_{X,Y}(A \times B) = P_X(A) \cdot P_Y(B).$$

PROP Se X e Y sono v.a. indipendenti, allora

$$F_{X,Y}(s, t) = F_X(s) F_Y(t) \quad \forall s \in \mathbb{R}^n$$
$$\quad \quad \quad \forall t \in \mathbb{R}^m$$

Se X e $Y: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sono v.a. indipendenti, entrambe con valore atteso finito, allora $E[XY] = E[X]E[Y]$
e dunque $Cov(X, Y) = 0$ e dunque $Var[X+Y] = Var[X] + Var[Y]$

Siano $X_1, \dots, X_n: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ v.a. su $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

Dici che $X_1, \dots, X_n$ sono una famiglia (finita) di v.e. indipendenti se

$$\forall A_1, \dots, A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \quad P(X_1 \in A_1, X_2 \in A_2, \dots, X_n \in A_n) \\ = P(X_1 \in A_1) P(X_2 \in A_2) \dots P(X_n \in A_n)$$

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n \{X_i \in A_i\}\right) = \prod_{i=1}^n P(X_i \in A_i)$$

— — —

Sia $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ una famiglia numerabile di v.e.

Dici che $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ è una famiglia numerabile di v.e. indipendenti se $\forall n \in \mathbb{N}$ $X_1, \dots, X_n$ è una famiglia di v.e. indipendenti.

— — —

$$\Omega = \{T, C\} \quad \mathcal{F} = \mathcal{B}(\Omega)$$

$$X(T) = 1$$

$$X(C) = 0$$

$$P(X=1) = P(\{T\}) = p \in [0,1]$$

$$E[X] = p$$

$$P(X=0) = P(\{C\}) = 1-p \in [0,1]$$

$$\text{Var}[X] = p(1-p)$$

$$\Omega = \{T, C\}^n \quad \mathcal{F} = \mathcal{B}(\Omega)$$

X = v.e. che conta il numero di T in n lanci.

$$X(\Omega) = \{0, 1, \dots, n\}$$

$$P(X=k)$$

$$\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \{T, C\}^n$$

$$X(\omega) = k \text{ sse}$$

k componenti di ω valgono T

$n-k$ componenti di ω valgono C

Sia $\bar{\omega} = (\bar{\omega}_1, \dots, \bar{\omega}_n)$ avente esattamente k componenti che valgono T

$$P(\{\bar{w}\})$$

$$\{\bar{w}\} = \{w: w_1 = \bar{w}_1\} \cap \{w: w_2 = \bar{w}_2\} \cap \dots \cap \{w: w_n = \bar{w}_n\}$$

sono eventi indipendenti

$$P(\{\bar{w}\}) = \prod_{i=1}^n P(\{w: w_i = \bar{w}_i\}) = p^k (1-p)^{n-k}$$

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \forall k \in \{0, 1, \dots, n\}$$

DISTRIBUZIONE BINOMIALE DI PARAMETRI n E p .

Per ogni $i = 1, \dots, n$ considero $X_i(w) = \begin{cases} 1 & \text{se } w_i = T \\ 0 & \text{se } w_i = C \end{cases}$
 Le X_i sono v.e. di Bernoulli di parametro p e sono indipendenti.

Inoltre $X = \sum_{i=1}^n X_i$

$$E[X] = E\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = \sum_{i=1}^n E[X_i] = \sum_{i=1}^n p = np$$

$$Var[X] = Var\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = \sum_{i=1}^n Var[X_i] = \sum_{i=1}^n p(1-p) = np(1-p)$$

Siano $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ e $Y \sim \mathcal{B}(m, p)$ indipendenti.

$$P_{X+Y} = \mathcal{B}(n+m, p)$$

Convergenza per successione di v.a.

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ spazio probabilizzato e sia $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ una successione di v.a. su questo spazio - Sia $\bar{X}$ un'ulteriore v.a. su $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

- CONVERGENZA IN PROBABILITÀ P

Dico che X_i converge in probabilità alla v.a. $\bar{X}$ se
 $\forall \delta > 0 \quad \lim_{i \rightarrow \infty} P(|X_i - \bar{X}| > \delta) = 0$

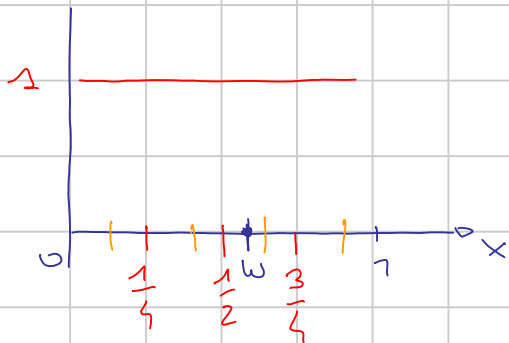
- CONVERGENZA IN MEDIA QUADRATICA (CONVERGENZA L^2)

Dico che X_i converge in media quadratica a $\bar{X}$ se
 $\lim_{i \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |X_i(\omega) - \bar{X}(\omega)|^2 P(d\omega) = 0$

- CONVERGENZA P -p.c. (p.c.)

Dico che X_i converge P -p.c. a $\bar{X}$ se

$\exists \Omega_0 \subset \Omega$ t.c. $P(\Omega_0) = 1$ e t.c. $\forall \omega \in \Omega_0 \quad \lim_{i \rightarrow \infty} X_i(\omega) = \bar{X}(\omega)$



$$(\Omega, \mathcal{F}, P) = ([0, 1], \mathcal{B}, \mathcal{L}^1)$$

$$X_1 = 1 \mathbb{I}_{[0, 1]}$$

$$X_2 = 1 \mathbb{I}_{[0, \frac{1}{2}]}$$

$$X_3 = 1 \mathbb{I}_{[\frac{1}{2}, 1]}$$

$$X_4 = 1 \mathbb{I}_{[0, \frac{1}{4}]}$$

$$X_5 = 1 \mathbb{I}_{[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]}$$

$$X_6 = 1 \mathbb{I}_{[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]}$$

$$X_7 = 1 \mathbb{I}_{[\frac{3}{4}, 1]}$$

$$\delta \in (0, 1)$$

$$P(|X_i| > \delta) = P(X_i > \delta) \rightarrow 0$$

$\Rightarrow X_i$ converge in probabilità alla v.a. $\bar{X} = 0$

LEGGE DEI GRANDI NUMERI

LEMA Sia $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ successione d.v.e. su uno spazio probabilizzato $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ Tal. che

- Le X_n sono a 2 a 2 scorrelate
cioè $\text{Cov}(X_i, X_j) = 0 \quad \forall i, j \quad i \neq j$
- Le X_n hanno tutte lo stesso valore atteso finito:
 $\mathbb{E}[X_n] = \bar{E} \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- $\exists C \in \mathbb{R}$ T.c. $\text{Var}[X_n] \leq C \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Considera $S_n := \sum_{k=1}^n X_k$ e $\bar{X}_n = \frac{1}{n} S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$.

Allora

$$\mathbb{P} \left(|\bar{X}_n - \bar{E}| > \delta \right) \leq \frac{C}{n\delta^2} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall \delta > 0$$

$$\int_{\Omega} |\bar{X}_n(\omega) - \bar{E}|^2 \mathbb{P}(d\omega) \leq \frac{C}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Dim Calcolo $\mathbb{E}[\bar{X}_n] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k\right] = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[X_k]$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \bar{E} = \frac{1}{n} n \bar{E} = \bar{E}$$

$\rightarrow \text{Var}[\bar{X}_n] = \text{Var}\left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k\right] = \frac{1}{n^2} \text{Var}\left[\sum_{k=1}^n X_k\right] =$

$$= \frac{1}{n^2} \left(\sum_{k=1}^n \text{Var}[X_k] + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{Cov}(X_i, X_j) \right) = 0$$
$$= \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \text{Var}[X_k] \leq \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n C = \frac{1}{n^2} n C = \frac{C}{n} \quad \leftarrow$$

$$\int_{\Omega} |\bar{X}_n(\omega) - \mathbb{E}[\bar{X}_n]|^2 \mathbb{P}(d\omega) \leq \frac{C}{n}$$

$$\int_{\Omega} |\bar{X}_n(\omega) - \bar{E}|^2 \mathbb{P}(d\omega) \leq \frac{C}{n} \quad \leftarrow$$

Applico Chebyshev a $\bar{X}_n$

$$\mathbb{P}(|\bar{X}_n - \mathbb{E}[\bar{X}_n]| > \delta) \leq \frac{\text{Var}[\bar{X}_n]}{\delta^2}$$

$$\mathbb{P}(|\bar{X}_n - E| > \delta) \leq \frac{C}{n\delta^2} \quad \square$$

Corollario (Legge debole dei grandi numeri)

Nelle ipotesi del lemma precedente

$\bar{X}_n$ converge in probabilità alla v.e. costante E

Corollario

Nelle ipotesi del lemma precedente, $\bar{X}_n$ converge in media quadratica alla v.e. costante E .

Teorema (Legge forte dei grandi numeri)

(NO DIN) Nelle ipotesi del lemma precedente

$\bar{X}_n$ converge P-q.c. alla v.e. costante E .

ESEMPIO

Siano $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ v.e. i.i.d. con $\mathbb{P}_{X_i} = U([0, 1])$

Si può dimostrare che $\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n X_i \leq 1\right) = \frac{1}{n!}$

Voglio calcolare la probabilità che siano esattamente n addendi per raggiungere o superare il valore 1.

$$\left\{ \text{sono esattamente } n \text{ addendi} \right\} = \left\{ \sum_{i=1}^n X_i \geq 1, \sum_{i=1}^{n-1} X_i < 1 \right\} =$$

$$= \left\{ \sum_{i=1}^n X_i \geq 1 \right\} \setminus \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} X_i \geq 1 \right\}$$

$$\mathbb{P}(\text{sono esattamente } n \text{ addendi}) =$$

$$= \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n X_i \geq 1\right) - \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n-1} X_i \geq 1\right) = \left(1 - \frac{1}{n!}\right) - \left(1 - \frac{1}{(n-1)!}\right)$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{1}{n!} (n-1) = \frac{n-1}{(n-2)! n (n-1)} = \frac{1}{(n-2)! n}$$

$$\mathbb{E}[\text{\# addendi necessari ad ottenere somma} \geq 1] =$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} n \cdot \frac{1}{(n-2)! n} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} = e$$

$j = n-2$
 $n \geq 2$
 $j \geq 0$

$$\{X_i^j\}_{\substack{i=1, \dots, \infty \\ j=1, \dots, N}} \quad \text{i.i.d.} \quad \mathbb{P}_{X_i} = U([0, 1])$$

$$N_j(\omega) := \min \left\{ n \in \mathbb{N} : \sum_{i=1}^n X_i^j(\omega) \geq 1 \right\}$$

Le N_j sono indipendenti e i.d. $\mathbb{E}[N_j] = e$

$$\mathbb{E}[N_j^2] = \sum_{n=2}^{\infty} n^2 \frac{1}{(n-2)! n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(n-2)!}$$

$$2n = \frac{n}{(n-2)!} > 0 \quad \frac{2n+1}{2n} = \frac{n+1}{(n-1)!} \cdot \frac{(n-2)!}{n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \frac{1}{n-1}$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[N_j^2] < +\infty \quad \Rightarrow \quad \text{Var}[N_j] = C < +\infty \quad \rightarrow \infty$$

Quindi posso applicare a N_j le leggi dei grandi numeri:

$$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N N_j(\omega) \longrightarrow \mathbb{E}[N_j] = e$$

$\mathbb{P}$ -p.c.
in media
quadratica
e in probab. $\mathbb{P}_e$