$(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ $\quad \mathbb{E}[X] = \int_\Omega X(\omega)\, \mathbb{P}(d\omega)$

Se X è una v.a. su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ t.c. $\mathbb{P}(X = +\infty) = \mathbb{P}(X = -\infty) = 0$, allora $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbb{P}_X)$ è uno spazio probabilizzato.

Una funzione $f: \mathbb{R} \to [-\infty, +\infty]$ t.c. $\{f \leq t\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ $\forall t \in \mathbb{R}$ si dice una funzione di Borel.

In particolare se $f: \mathbb{R} \to [-\infty, +\infty]$ è una funzione di Borel nonnegative, è sempre ben definito

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\, \mathbb{P}_X(dx) =$$

Se X è una v.a. su uno spazio $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ a valori in $\mathbb{R}$ e $f: \mathbb{R} \to [-\infty, +\infty]$ è una funzione di Borel, allora la composizione

$$f \circ X : \omega \in \Omega \longmapsto f(X(\omega)) \in [-\infty, +\infty]$$

è una v.a. su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$

In particolare, se f è non negative, allora

$$(\heartsuit) \quad \mathbb{E}[f \circ X] = \int_\Omega (f \circ X)(\omega)\, \mathbb{P}(d\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, \mathbb{P}_X(dx)$$

In particolare scelgo

1) $f(x) = \max\{0, x\} \Rightarrow f \circ X = X^+$

$$(\heartsuit) \Rightarrow \quad \mathbb{E}[X^+] = \int_{\mathbb{R}} \max\{0, x\}\, \mathbb{P}_X(dx) \quad \leftarrow$$

2) $f(x) = \max\{0, -x\} \Rightarrow f \circ X = X^-$

(e) $\Rightarrow$ $\mathbb{E}[X^-] = \int_{\mathbb{R}} \max\{0,-x\}\, \mathbb{P}_X(dx)$

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X^+] - \mathbb{E}[X^-] = \int_{\mathbb{R}} \max\{0,x\}\, \mathbb{P}_X(dx) - \int_{\mathbb{R}} \max\{0,-x\}\, \mathbb{P}_X(dx)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left(\max\{0,x\} - \max\{0,-x\}\right) \mathbb{P}_X(dx)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} x\, \mathbb{P}_X(dx)$$

Abbiamo ottenuto che se X è una v.a. integrabile allora

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} x\, \mathbb{P}_X(dx).$$

— o —

Lancio una moneta $\quad \Omega = \{T, C\} \quad \mathcal{E} = \mathcal{P}(\Omega)$

$X(T) = 1$ $\quad \mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}(X=0) = \frac{1}{2}$

$X(C) = 0$

$\mathbb{P}_X$ è concentrata su $\{0,1\}$

$p_0 = \mathbb{P}(X=0) = \frac{1}{2}$

$p_1 = \mathbb{P}(X=1) = \frac{1}{2}$

Dado non truccato $\quad \Omega = \{1,2,3,4,5,6\}, \quad \mathcal{E} = \mathcal{P}(\Omega)$

$X(2) = X(4) = X(6) = 1$ $\quad \mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}(\{2,4,6\}) = \frac{1}{2}$

$X(1) = X(3) = X(5) = 0$

$\mathbb{P}(X=0) = \mathbb{P}(\{1,3,5\}) = \frac{1}{2}$

$\mathbb{P}_X$ ancora concentrata su $\{0,1\}$

$p_0 = \mathbb{P}(X=0) = \frac{1}{2}$

$p_1 = \mathbb{P}(X=1) = \frac{1}{2}$

1) V.A. con distribuzione discreta

Sono v.a. X le cui distribuzione $\mathbb{P}_X$ è concentrata su un insieme discreto $\{t_j\}_{j \in J} \subset \mathbb{R}$ dove $J = \{1, \ldots, N\}$ o $J = \mathbb{N}, \mathbb{Z}$ o $\mathbb{Q}$.

Questo insieme è t.c. $\mathbb{P}\left(X \in \bigcup_{j \in J} \{t_j\}\right) = 1$

$$\mathbb{P}_X(A) = 0 \quad \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \text{ t.c. } A \cap \bigcup_{j \in J} \{t_j\} = \emptyset$$

$\forall j \in J \quad p_j := \mathbb{P}(X = t_j) = \mathbb{P}_X(\{t_j\})$

si dice densità di X in t_j

Ovviamente $\begin{cases} p_j \geq 0 \\ \sum_{j \in J} p_j = 1 \end{cases}$

$$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \qquad \mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}_X\left(A \cap \bigcup_{j \in J} \{t_j\}\right) =$$

$$= \mathbb{P}_X\left(\bigcup_{j \in J} (A \cap \{t_j\})\right) = \sum_{j \in J} \mathbb{P}_X(A \cap \{t_j\}) =$$

$$= \sum_{j \in J : t_j \in A} \mathbb{P}_X(\{t_j\}) = \sum_{j \in J : t_j \in A} p_j$$

Scelgo $A = (-\infty, t]$ $\qquad F_X(t) = \mathbb{P}_X(A) = \sum_{j \in J : t_j \leq t} p_j$

In particolare se J è finito, allora X è una funzione semplice e $\mathbb{E}[X] = \sum_{j \in J} t_j p_j$.

La formula rimane vera anche se J è numerabile, purché la X sia integrabile.

Cioè $\mathbb{E}[|X|] = \sum_{j \in J} |t_j| p_j$, $\mathbb{E}[X] = \sum_{j \in J} t_j p_j$.

Se $\varphi : \mathbb{R} \to [-\infty, +\infty)$ è una funzione di Borel non negativa, allora $\mathbb{E}[\varphi \circ X] = \sum_{j \in \mathcal{J}} \varphi(t_j)\, p_j$

— o —

N.B. $\mathcal{J} = \{1 \ldots N\}$ $\quad t_1 \ldots t_N$

$(p_1, \ldots p_N)$

— o —

Lancio della monetina: esce Testa con probabilità $p \in [0,1]$ e croce con probabilità $q := 1-p$.

$X(T) = 1$

$X(C) = 0$

$$\mathbb{E}[X] = 1\, \mathbb{P}(X=1) + 0\, \mathbb{P}(X=0)$$
$$= 1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) = p.$$

V.A. con distribuzione assolutamente continua (A.C.)

Sono v.a. X t.c. $\exists f : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ sommabile secondo Lebesgue e t.c.

$$\mathbb{P}_X(A) = \int_A f(x)\, dx \qquad \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

In particolare $\quad 1 = \mathbb{P}_X(\mathbb{R}) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx$

$A = (-\infty, t] \qquad F_X(t) = \mathbb{P}_X(A) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\, dx \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$

- Di conseguenza F_X è continua e $\mathbb{P}(X=t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$
- Se $\bar{t} \in \mathbb{R}$ e f è continua in $\bar{t}$, allora $\exists F_X'(\bar{t}) = f(\bar{t})$

La funzione f si dice densità della v.a. X.

Si dimostra che se $\varphi : \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ di Borel, si ha

$$\mathbb{E}[\varphi \circ X] = \int_{\Omega} \varphi(X(\omega))\, \mathbb{P}(d\omega) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, \mathbb{P}_X(dx) =$$
$$= \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) f(x)\, dx.$$

In particolare, se $\mathbb{E}[X]$ esiste finito, allora

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} x f(x)\, dx$$

— o —

FORMULA DI CAVALIERI

$\forall X$ v.a. sommabile $\mathbb{E}[X] = \int_0^{+\infty} (1 - F_X(t))\, dt - \int_{-\infty}^{0} F_X(t)\, dt$

— o —

VARIANZA

Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato e sia $X: \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ una v.a. t.c. $\mathbb{E}[X]$ esiste finito.
Chiamo VARIANZA DI X $\quad Var[X] := \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2 \right]$

PROPRIETÀ
1) $Var[X] \geq 0$ (eventualmente $+\infty$).
2) $Var[X] = 0$ SSE X è q.c. una costante.
In tal caso questa costante è $\mathbb{E}[X]$.
3) $Var[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$
4) $Var[\alpha X + \beta] = \alpha^2 Var[X] \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

N.B. $\mathbb{E}[\alpha X + \beta] = \alpha \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[\beta] = \alpha \mathbb{E}[X] + \beta$

$\sqrt{Var[X]}$ si indica $\sigma(X)$ e si chiama SCARTO QUADRATICO MEDIO

DISUGUAGLIANZA DI MARKOV

Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato. Sia $X: \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ v.a.
Sia $I \subset \mathbb{R}$ intervallo t.c. $X(\Omega) \subset I$ e sia
$\varphi: I \to [0, +\infty]$, funzione di Borel strettamente crescente.
Allora $\quad \varphi(t)\, \mathbb{P}(X \geq t) \leq \mathbb{E}[\varphi \circ X] \quad \forall t \in I.$

DISUGUAGLIANZA DI CHEBYCHEV

Sia X una v.a. su uno spazio probabilizzato $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ t.c. $\mathbb{E}[X]$ esiste finito.

Allora
$$\mathbb{P}\left(\left| X - \mathbb{E}[X] \right| > \varepsilon \right) \leq \frac{Var[X]}{\varepsilon^2} \quad \forall \varepsilon > 0$$

Uso Markov con $I = [0, +\infty)$ $f(t) = t^2$ e $Y = |X - \mathbb{E}[X]|$

Bernoulli:
$$\mathbb{P}(X=1) = p \in [0,1] \quad \mathbb{P}(X=0) = 1-p$$
$$\mathbb{E}[X] = 1 \cdot \mathbb{P}(X=1) + 0 \cdot \mathbb{P}(X=0) = p$$
$$Var[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$$
$$\mathbb{E}[X^2] = 1 \cdot \mathbb{P}(X^2=1) + 0\, \mathbb{P}(X^2=0) \qquad X^2(\Omega) = \{1, 0\}$$
$$= 1 \cdot \mathbb{P}(X=1) + 0\, \mathbb{P}(X=0) = p$$
$$Var[X] = p - p^2 = p(1-p) \leq \frac{1}{4} \qquad \left| \begin{array}{l} 1-2p \geq 0 \\ p \leq \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

Esercizio Sia X v.a. con distribuzione A.C. e densità $f(x)$.

Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ con $\alpha \neq 0$

Considero la v.a. $Y := \alpha X + \beta$.

$\alpha > 0$
$$F_Y(t) = \mathbb{P}(\alpha X + \beta \leq t) = \mathbb{P}\left(X \leq \frac{t-\beta}{\alpha} \right) =$$
$$= F_X\left(\frac{t-\beta}{\alpha}\right) = \int_{-\infty}^{\frac{t-\beta}{\alpha}} f(x)\, dx \qquad x = \frac{y-\beta}{\alpha}$$
$$dx = \frac{1}{\alpha} dy$$
$$= \int_{-\infty}^{t} f\left(\frac{y-\beta}{\alpha}\right) \cdot \frac{1}{\alpha}\, dy \qquad x \to -\infty \quad y \to -\infty$$
$$x = \frac{t-\beta}{\alpha} \quad y = t$$

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad F_Y(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\alpha} f\left(\frac{y-\beta}{\alpha}\right) dy$$

cioè Y ha distribuzione A.C. con densità

$$g(y) = \frac{1}{\alpha} f\left(\frac{y-\beta}{\alpha}\right) \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

$\alpha < 0$ $\quad g(y) = -\frac{1}{\alpha} f\left(\frac{y-\beta}{\alpha}\right) \quad \forall y \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \forall \alpha \neq 0 \quad g(y) = \frac{1}{|\alpha|} f\left(\frac{y-\beta}{\alpha}\right) \quad \forall y \in \mathbb{R}.$

Esercizio Sia X v.a. A.C. con $\mathbb{P}_X = f(x)\,dx$

Considero $Y = X^2$

$$F_Y(t) = \mathbb{P}(Y \le t) = \mathbb{P}(X^2 \le t)$$

$$\{X^2 \le t\} = \begin{cases} \emptyset & t < 0 \quad \mathbb{P}(\emptyset) = 0 \\ \{X = 0\} & t = 0 \quad \mathbb{P}(X=0) = 0 \\ \{-\sqrt{t} \le X \le \sqrt{t}\} & t > 0 \end{cases}$$

$t > 0 \quad \{X^2 \le t\} = \{-\sqrt{t} \le X \le \sqrt{t}\} = \{X \le \sqrt{t}\} \setminus \{X < -\sqrt{t}\}$

$\supseteq$

$$F_Y(t) = \mathbb{P}(X^2 \le t) = \mathbb{P}(X \le \sqrt{t}) - \mathbb{P}(X < -\sqrt{t}) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\sqrt{t}} f(x)\,dx - \int_{-\infty}^{-\sqrt{t}} f(x)\,dx = \int_{-\sqrt{t}}^{\sqrt{t}} f(x)\,dx =$$

$$= \int_0^{\sqrt{t}} f(x)\,dx + \int_{-\sqrt{t}}^{0} f(x)\,dx$$

$x = \sqrt{y}$ $\qquad$ $x = -\sqrt{y}$

$y = x^2$ $\qquad$ $y = x^2$

$dx = \frac{1}{2\sqrt{y}}\,dy$ $\qquad$ $dx = \frac{-1}{2\sqrt{y}}\,dy$

$x = 0 \quad y = 0$ $\qquad$ $x = 0 \quad y = 0$

$x = \sqrt{t} \quad y = t$ $\qquad$ $x = -\sqrt{t} \quad y = t$

$$\int_0^t f(\sqrt{y})\frac{1}{2\sqrt{y}}\,dy + \int_t^0 f(-\sqrt{y})\cdot\frac{-1}{2\sqrt{y}}\,dy$$

$$= \int_0^t \frac{1}{2\sqrt{y}} f(\sqrt{y})\,dy + \int_0^t \frac{1}{2\sqrt{y}} f(-\sqrt{y})\,dy$$

$$= \int_0^t \frac{1}{2\sqrt{y}}\left(f(\sqrt{y})+f(-\sqrt{y})\right)dy = \int_{-\infty}^{t} g(y)\,dy$$

$$g(y) = \begin{cases} 0 & y \le 0, \\ \frac{1}{2\sqrt{y}}\left(f(\sqrt{y})+f(-\sqrt{y})\right) & y>0 . \end{cases}$$

— o —

V.A. con distribuzione gaussiana (o normale) di parametri $\mu \in \mathbb{R}$ e $\sigma^2>0$

Si dice che una v.a. X ha distribuzione gaussiana di parametri μ e σ^2 e si scrive $\mathbb{P}_X = N(\mu,\sigma^2)$ se $\mathbb{P}_X$ è A.C. con densità

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Nel caso particolare $\mu=0$ e $\sigma^2=1$, la distribuzione $N(0,1)$ si dice gaussiana standard e la densità è

$$f_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$