

<http://www.dma.unifi.it/~poggiolini>

Cliccare su "Didattica"; cliccare sul nome e a.a. del corso

Modica-Poggiolini, Privault più appunti.

Ω insieme non vuoto

$\mathcal{B}(\Omega) :=$ famiglia di tutti i sottoinsiemi di Ω .

$\mathcal{E} \subset \mathcal{B}(\Omega)$ si dice una σ -algebra di Ω se:

1. $\emptyset \in \mathcal{E}$
2. Se $A \in \mathcal{E}$, allora $A^c := \Omega \setminus A \in \mathcal{E}$
3. Se $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{E}$, allora $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{E}$

PROP Se $\mathcal{E}$ è una σ -algebra di Ω e $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{E}$,
allora $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{E}$.

I sottoinsiemi di Ω che appartengono alla σ -algebra $\mathcal{E}$ si dicono **EVENTI** ($\in \mathcal{E}$).

PROP Sia $\{\mathcal{E}_i\}_{i \in \mathcal{A}}$ una qualsiasi famiglia di σ -algebra di Ω .
Allora la famiglia $\bigcap_{i \in \mathcal{A}} \mathcal{E}_i = \{A \subset \Omega : A \in \mathcal{E}_i \ \forall i \in \mathcal{A}\}$ è
ancora una σ -algebra di Ω .

In particolare, se $\mathcal{D} \subset \mathcal{B}(\Omega)$ è una qualsiasi famiglia
di sottoinsiemi di Ω ,
 $\mathcal{G}(\mathcal{D}) := \bigcap \{ \mathcal{E} \subset \mathcal{B}(\Omega) : \mathcal{E} \text{ è una } \sigma\text{-algebra di } \Omega \text{ e } \mathcal{E} \supset \mathcal{D} \}$
è la più piccola σ -algebra contenente $\mathcal{D}$ e si chiama

G-algebra generata dalle famiglie $\mathcal{D}$.

La G-algebra di $\mathbb{R}^n$ generata dalle famiglie degli aperti di $\mathbb{R}^n$ si indica $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ e si dice G-algebra di Borel.

Un evento $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ si dice BORELIANO di $\mathbb{R}^n$.

Sia $\Omega \neq \emptyset$ un insieme e sia $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ una sua G-algebra.

Una funzione $P: A \in \mathcal{E} \mapsto P(A) \in [0, +\infty)$

si dice una MISURA su $(\Omega, \mathcal{E})$ se

1. $P(\emptyset) = 0$

2. $\forall \{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{E} \quad A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i, j \neq i \quad \text{si ha} \quad P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

Se, inoltre, $P(\Omega) = 1$, allora P si dice una (MISURA o)

PROBABILITÀ su $(\Omega, \mathcal{E})$ e la Terna $(\Omega, \mathcal{E}, P)$ si dice uno spazio probabilizzato.

Valgono le seguenti proprietà elementari:

PROP Sia $(\Omega, \mathcal{E}, P)$ uno spazio probabilizzato

Allora 1. $P(A) \in [0, 1] \quad \forall A \in \mathcal{E}$.

2. $\forall A, B \in \mathcal{E}$ T.c. $A \subset B$, si ha: a) $P(B) = P(A) + P(B \setminus A)$
b) $P(A) \leq P(B)$

3. $\forall A, B \in \mathcal{E} \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

4. Se $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{E}$, allora $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

Sia $(\Omega, \mathcal{E}, P)$ uno spazio probabilizzato.

Ω si dice evento certo, $\emptyset$ si dice evento impossibile,

Se $A \subset \Omega$ e $P(A) = 1$, A si dice evento quasi certo

Se $A \subset \Omega$ e $P(A) = 0$, A si dice evento quasi impossibile.

Sia $\mathcal{I}$ un insieme finito o numerabile e sia $\{D_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ una famiglia di eventi (finite se $\mathcal{I}$ è finito, numerabile se $\mathcal{I}$ è numerabile) -

Se 1 $\bigcup_{i \in \mathcal{I}} D_i = \Omega$

2 $\mathcal{I}$ D_i sono a due a due disgiunti, cioè

$$D_i \cap D_j = \emptyset \quad \forall i, j \in \mathcal{I} \text{ t.c. } i \neq j,$$

dico che la famiglia $\{D_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ è una partizione di Ω in eventi -

PROP. (Legge delle probabilità Totali)

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ uno spazio probabilizzato e sia $\{D_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ una partizione finita o numerabile di Ω in eventi -
Allora

$$P(A) = \sum_{i \in \mathcal{I}} P(A \cap D_i) \quad \forall A \in \mathcal{F}.$$

Posso scrivere $A = A \cap \Omega = A \cap \left(\bigcup_{i \in \mathcal{I}} D_i \right) = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} (A \cap D_i)$

Perché i D_i sono a due a due disgiunti e $A \cap D_i \subset D_i$, anche gli $A \cap D_i$ sono a due a due disgiunti quindi.

$$P(A) = P\left(\bigcup_{i \in \mathcal{I}} (A \cap D_i)\right) = \sum_{i \in \mathcal{I}} P(A \cap D_i).$$

TEO (Continuità delle misure)

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ uno spazio probabilizzato e sia $\{\mathcal{E}_i\}_{i=1}^{\infty}$ una successione di eventi -

1. Se $\mathcal{E}_i \subseteq \mathcal{E}_{i+1} \quad \forall i \in \mathbb{N}$, allora

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{E}_i\right) = \lim_{i \rightarrow \infty} P(\mathcal{E}_i) = \sup_{i \in \mathbb{N}} P(\mathcal{E}_i)$$

2. Se $\mathcal{E}_i \supseteq \mathcal{E}_{i+1} \quad \forall i \in \mathbb{N}$, allora

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} \mathcal{E}_i\right) = \lim_{i \rightarrow \infty} P(\mathcal{E}_i) = \inf_{i \in \mathbb{N}} P(\mathcal{E}_i) -$$

Sia $(\Omega, \mathcal{E}, P)$ uno spazio probabilizzato e sia $B \in \mathcal{E}$ T.c. $P(B) > 0$.
 Per ogni $A \in \mathcal{E}$ definisce $P(A|B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$
 Tale rapporto si chiama
 PROBABILITÀ DI A DATO B
 o PROBABILITÀ DI A CONDIZIONATA DA B.

PROP Sia $(\Omega, \mathcal{E}, P)$ uno spazio probabilizzato e sia $B \in \mathcal{E}$ T.c. $P(B) > 0$. Considero la funzione

$$P_B: A \in \mathcal{E} \mapsto P(A|B) \in [0, 1]$$

Allora $(\Omega, \mathcal{E}, P_B)$ è uno spazio probabilizzato

$$\text{Inoltre } P_B(A) = 1 \quad \forall A \in \mathcal{E} \text{ T.c. } A \supset B$$

$$P_B(A) = 0 \quad \forall A \in \mathcal{E} \text{ T.c. } A \cap B = \emptyset.$$

N.B. Se $B \in \mathcal{E}$ e $P(B) = 0$, allora $P(A|B)$ non è definito, può sicuramente $P(A \cap B) = 0 \quad \forall A \in \mathcal{E}$.

Facciamo allora la seguente convenzione:

$$\text{Se } B \in \mathcal{E} \text{ e } P(B) = 0 \Rightarrow \text{pongo } P(A|B)P(B) = 0 \quad \forall A \in \mathcal{E}.$$

Con questa convenzione allora risulta

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B) \quad \forall A, B \in \mathcal{E}.$$

PROP (Legge delle probabilità Totali)

Sia $(\Omega, \mathcal{E}, P)$ uno spazio probabilizzato e sia $\{D_i\}_{i \in I}$ una partizione finita o numerabile di Ω in eventi.

Allora

$$P(A) = \sum_{i \in I} P(A|D_i)P(D_i) \quad \forall A \in \mathcal{E}.$$

FORMULA DI BAYES.

Siano $A, B \in \mathcal{E}$ T.c. $P(A)P(B) > 0$.

$$\text{Allora } P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

VARIABILI ALEATORIE

Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ uno spazio probabilizzato e sia $X: \Omega \rightarrow [-\infty, +\infty]$ una funzione. X si dice una variabile aleatoria (v.a.) su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ se

$$\left\{ \omega \in \Omega : X(\omega) \leq t \right\} \in \mathcal{E} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

o in genere scriviamo le sottoinsiemi più compatte

$$X^{-1}([-\infty, t]) = \{X \leq t\}.$$

PROP Sono condizioni equivalenti.

1. X è una v.a.

2. $\{X \leq t\} \in \mathcal{E} \quad \forall t \in \mathbb{R}$

3. $\{X \geq t\} \in \mathcal{E} \quad \forall t \in \mathbb{R}$

4. $\{X > t\} \in \mathcal{E} \quad \forall t \in \mathbb{R}$

5. $\{X = +\infty\} \in \mathcal{E}, \{X = -\infty\} \in \mathcal{E}, \{X \in A\} \in \mathcal{E} \quad \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

Se X è una v.a. $\Rightarrow \forall t \in \mathbb{R}$ è ben definita $\mathbb{P}(X \leq t) \in [0, 1]$

La funzione $F_X: t \in \mathbb{R} \mapsto \mathbb{P}(X \leq t) \in [0, 1]$

legge di X

funzione di ripartizione di X

funzione di distribuzione cumulativa di X

PROP La legge F_X di una v.a. X gode delle seguenti proprietà:

1. F_X è monotone non decrescente

2. $\lim_{t \rightarrow -\infty} F_X(t) = \mathbb{P}(X = -\infty)$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} F_X(t) = 1 - \mathbb{P}(X = +\infty)$

3. F_X è continua da destra:

$$\lim_{s \rightarrow t^+} F_X(s) = F_X(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$4 \quad \lim_{s \rightarrow t^-} F_X(s) = F_X(t) - P(X=t)$$

Corollario • F_X è continua in un pto $\bar{t} \in \mathbb{R}$ sse $P(X=\bar{t})=0$.
 • L'insieme $\{t \in \mathbb{R} : P(X=t)=0\}$ è al più numerabile.

Per ogni $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ posso considerare $P_X(A) := P(X \in A)$.
 È facile dimostrare che P_X è una misura su $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ e
 che P_X è una probabilità su $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ se e solo
 $P(X=+\infty) = P(X=-\infty) = 0$

D'ora in poi lavoreremo sempre con questa ipotesi -
 La probabilità P_X si dice **DISTRIBUZIONE** di X

N.B. $F_X(t) = P(X \leq t) = \underbrace{P(X=-\infty)}_{=0 \text{ per l'ip.}} + P(X \in (-\infty, t]) = P_X((-\infty, t])$

Quindi se conosco la distribuzione P_X conosco la legge F_X .
 Si può dimostrare che è vero anche il viceversa.

INTEGRAZIONE DI V.A.

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ spazio probabilizzato e sia $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \quad (-\infty, +\infty)$
 una v.a. Dico che X è una funzione semplice se assume
 solo un numero finito di valori:

$$X(\Omega) = \{c_1, c_2, \dots, c_N\}$$

Perché X è una v.a., allora $E_i := \{X=c_i\} \in \mathcal{F} \quad \forall i=1, \dots, N$

Inoltre X si può scrivere nella forma

$$X(\omega) = \sum_{i=1}^N c_i \mathbb{1}_{E_i}(\omega)$$

La famiglia $\{E_i\}_{i=1}^N$ è una partizione finita di Ω in
 eventi.

Definisco $E[X] := \sum_{i=1}^N c_i P(X=c_i)$
 o anche $\int_{\Omega} X(\omega) P(d\omega)$

Sia $X: \Omega \rightarrow [-\infty, +\infty]$ una v.a. non negativa.

Può

$$\mathbb{E}[X] = \sup \left\{ \int_{\Omega} Y(\omega) P(d\omega) : Y \text{ è una funzione semplice non negativa T... } Y(\omega) \leq X(\omega) \forall \omega \in \Omega \right\}$$

(o $\int_{\Omega} X(\omega) P(d\omega)$)

Se $X: \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ è una v.a. qualsiasi, definisco

$$X^+(\omega) := \max\{0, X(\omega)\}, \quad X^-(\omega) = \max\{0, -X(\omega)\} -$$

parte positiva di X parte negativa di X

Si dimostra che X^+ e X^- sono entrambe v.a. e che

$$X = X^+ - X^-, \quad |X| = X^+ + X^-$$

Se almeno uno tra $\int_{\Omega} X^+(\omega) P(d\omega)$ e $\int_{\Omega} X^-(\omega) P(d\omega)$ è finito, dico che X è integrabile e può

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\Omega} X(\omega) P(d\omega) := \int_{\Omega} X^+(\omega) P(d\omega) - \int_{\Omega} X^-(\omega) P(d\omega)$$

PROP Sia X v.a. integrabile. Sono equivalenti.

- 1 $\mathbb{E}[X]$ è finito
- 2 $\mathbb{E}[X^+]$ ed $\mathbb{E}[X^-]$ sono entrambi finiti
- 3 $\mathbb{E}[|X|]$ è finito.

Se X è integrabile e $\mathbb{E}[X]$ è finito, X è anche sommabile

— o —

Valgono i seguenti risultati di passaggio al limite sotto il segno di integrale

LEMMA DI BERTO-LU

Sia $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una successione monotona non decrescente di v.a. non negative: $0 \leq X_1(\omega) \leq X_2(\omega) \leq \dots \leq X_i(\omega) \leq X_{i+1}(\omega) \quad \forall i \in \mathbb{N} \quad \forall \omega \in \Omega$.

Sia $X(\omega) := \lim_{i \rightarrow \infty} X_i(\omega) = \sup_{i \in \mathbb{N}} X_i(\omega)$

Allora X è una v.a. su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ e

$$\mathbb{E}[X] = \lim_{i \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_i] = \sup_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{E}[X_i].$$

TEOREMA DI CONVERGENZA DOMINATA DI LEBESGUE

Sia $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una successione di v.a. su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

Supponiamo $\exists \Omega_0$ evento particolare i.c.

1) $\forall \omega \in \Omega_0 \quad \exists \lim_{i \rightarrow \infty} X_i(\omega) =: X(\omega)$

2) $\exists \gamma: \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ v.a. sommabile i.c. $|X_i(\omega)| \leq \gamma(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega_0$

Allora X è una v.a. sommabile e $\mathbb{E}[X] = \lim_{i \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_i]$