$f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, A aperto

Se $(x_0, y_0) \in A$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0+t, y_0) - f(x_0,y_0)}{t}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0, y_0+t) - f(x_0,y_0)}{t}$$

$$(x_0+t, y_0) = (x_0,y_0) + t(1,0) \qquad \underline{e}_1 = (1,0)$$

$$= (x_0,y_0) + t\underline{e}_1$$

$$(x_0, y_0+t) = (x_0,y_0) + t(0,1) \qquad \underline{e}_2 = (0,1)$$

$$= (x_0,y_0) + t\underline{e}_2$$

$\underline{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \qquad v_1^2 + v_2^2 = 1 \qquad \underline{v} = (\cos(\alpha), \sin(\alpha)) \quad \alpha \in [0, 2\pi)$

$$\frac{f((x_0,y_0) + t(v_1,v_2)) - f(x_0,y_0)}{t} = \frac{f(x_0 + t\cos(\alpha), y_0 + t\sin(\alpha)) - f(x_0,y_0)}{t}$$

Se $\displaystyle\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0+tv_1, y_0+tv_2) - f(x_0,y_0)}{t}$ esiste ed è finito,

lo chiamo DERIVATA DIREZIONALE DI f RISPETTO ALLA DIREZIONE $\underline{v}$ NEL PTO (x_0,y_0) e la indico col simbolo

$D_{\underline{v}} f(x_0,y_0)$

N.B.
$$D_{\underline{e}_1} f(x_0,y_0) = \frac{\partial}{\partial x} f(x_0,y_0)$$
$$D_{\underline{e}_2} f(x_0,y_0) = \frac{\partial}{\partial y} f(x_0,y_0)$$

$$g(t) = f(x_0+tv_1, y_0+tv_2) \implies D_{\underline{v}} f(x_0,y_0) = g'(0)$$

ESEMPIO $f(x,y) = \log(x^2+y) \qquad (x_0,y_0) = (1,2)$

Calcolare $D_{\underline{v}} f(1,2)$ $\qquad$ $\underline{v}$ direzione qualsiasi

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y > 0\} \qquad (1,2) \in D$

$$f(1+tv_1, 2+tv_2) = \log\left((1+tv_1)^2 + 2 + tv_2\right) = g(t)$$

$$\underline{v} = (v_1, v_2) = (\cos(\alpha), \sin(\alpha))$$

$$g'(t) = \frac{1}{(1+tv_1)^2 + 2 + tv_2} \cdot \left(2(1+tv_1)v_1 + v_2\right)$$

$$g'(0) = \frac{1}{\ \ } \left(2v_1 + v_2\right) \qquad D f(1,2) = \frac{2v_1+v_2}{\ \ }$$

$$g'(0) = \frac{1}{1+2}\left(2v_1 + v_2\right) \qquad D_{\underline{v}} f(1,2) = \frac{2v_1+v_2}{3}$$

TEOREMA (FORMULA DEL GRADIENTE)

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto. Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e sia $(x_0,y_0) \in A$

t.c. f è differenziabile nel pto (x_0,y_0).

Allora $\forall \underline{v} = (v_1, v_2)$ direzione di $\mathbb{R}^2$ $\quad (v_1^2+v_2^2=1)$

la derivata direzionale $D_{\underline{v}} f(x_0,y_0)$ esiste ed è uguale a

$$\nabla f(x_0,y_0) \circ \underline{v} = v_1 \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + v_2 \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$$

DIM f differenziabile nel pto (x_0,y_0), allora

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0) + h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) + G(h,k)$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{G(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

Per $t \neq 0$ scelgo $\underline{h = tv_1 \qquad k = tv_2}$ $\qquad t \to 0 \quad (h,k) \to (0,0)$

$$f(x_0+tv_1, y_0+tv_2) = f(x_0,y_0) + t\left(v_1\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + v_2\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)$$
$$+ G(tv_1, tv_2)$$

$$\tilde{G}(t) := G(tv_1, tv_2) \qquad \frac{\tilde{G}(t)}{t} = \frac{G(tv_1,tv_2)}{t\sqrt{v_1^2+v_2^2}} =$$

$$\frac{G(tv_1,tv_2)}{|t|\sqrt{v_1^2+v_2^2}}\,\frac{|t|}{t} = \underbrace{\frac{G(tv_1,tv_2)}{\sqrt{(tv_1)^2+(tv_2)^2}}}_{\to 0}\,\frac{|t|}{t} \in \{-1,1\}$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to 0}\frac{\tilde{G}(t)}{t} = 0$$

$$\frac{f(x_0+tv_1, y_0+tv_2) - f(x_0,y_0)}{t} = \underbrace{v_1\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + v_2\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)}_{\text{non dipende da } t} + \underbrace{\frac{\tilde{G}(t)}{t}}_{\to 0}$$

$$\Rightarrow \exists\, D_{\underline{v}} f(x_0,y_0) = v_1\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + v_2\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$$
$$= \nabla f(x_0,y_0) \circ \underline{v}$$

DIREZIONI DI MASSIMA E DI MINIMA CRESCITA

Sia $A \subset \mathbb{R}^2$ aperto $f : A \to \mathbb{R}$ differenziabile in un pto $(x_0,y_0) \in A$

DIREZIONI DI MASSIMA E DI MINIMA CRESCITA

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, $f: A \to \mathbb{R}$ differenziabile in un pto $(x_0, y_0) \in A$

Supponiamo che $\nabla f(x_0, y_0) \neq (0,0)$

Allora la direzione del $\nabla f(x_0, y_0)$ cioè $\underline{v} = \dfrac{\nabla f(x_0,y_0)}{|\nabla f(x_0,y_0)|}$

è la direzione di massima crescita di f;

la direzione di $-\nabla f(x_0, y_0)$ cioè $\underline{w} = \dfrac{-\nabla f(x_0,y_0)}{|\nabla f(x_0,y_0)|} = -\underline{v}$

è la direzione di massimo decrescita

(ovvero di minima crescita).

DIM $f(x_0, y_0)$ $\qquad \underline{v}_\alpha = (\cos(\alpha), \sin(\alpha))$

$$g(t) = f((x_0,y_0) + t\, \underline{v}_\alpha) = f(x_0 + t\cos(\alpha), y_0 + t\sin(\alpha))$$

$$g'(0) = D_{\underline{v}_\alpha} f(x_0, y_0) = \nabla f(x_0,y_0) \circ \underline{v}_\alpha = \cos(\alpha) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + \sin(\alpha) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$$

$$h(\alpha) = \cos(\alpha) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + \sin(\alpha) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$$

$$h'(\alpha) = -\sin(\alpha) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + \cos(\alpha)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) =$$

$$= (-\sin(\alpha), \cos(\alpha)) \circ \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)$$

$$= 0 \quad \text{SSE} \quad \nabla f(x_0,y_0) \perp (-\sin(\alpha), \cos(\alpha))$$

$$\text{SSE} \quad \nabla f(x_0,y_0) \,//\, (\cos(\alpha), \sin(\alpha))$$

1) $(\cos(\alpha), \sin(\alpha)) = \dfrac{\nabla f(x_0,y_0)}{|\nabla f(x_0,y_0)|}$

2) $(\cos(\alpha), \sin(\alpha)) = \dfrac{-\nabla f(x_0,y_0)}{|\nabla f(x_0,y_0)|}$

$$h''(\alpha) = -\cos(\alpha)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) - \sin(\alpha)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) =$$

$$= -(\cos(\alpha), \sin(\alpha)) \circ \nabla f(x_0,y_0) =$$

1) $(\cos(\alpha), \sin(\alpha)) = \dfrac{\nabla f(x_0,y_0)}{|\nabla f(x_0,y_0)|}$

$$h''(\alpha) = -\frac{\nabla f(x_0,y_0)}{|\nabla f(x_0,y_0)|} \circ \nabla f(x_0,y_0) = \frac{-|\nabla f(x_0,y_0)|^2}{|\nabla f(x_0,y_0)|} =$$

$$= -|\nabla f(x_0,y_0)| < 0 \quad \Rightarrow \text{PTO DI MAX REL}$$

2) $(\cos(\alpha), \sin(\alpha)) = -\dfrac{\nabla f(x_0,y_0)}{|\nabla f(x_0,y_0)|}$

2) $(\cos(\alpha), \sin(\alpha)) = -\dfrac{\nabla f(x_0, y_0)}{|\nabla f(x_0,y_0)|}$

$$h''(\alpha) = +\frac{\nabla f(x_0,y_0)}{|\nabla f(x_0,y_0)|} \cdot \nabla f(x_0,y_0) = |\nabla f(x_0,y_0)| > 0$$

$\Longrightarrow$ PTO DI MIN REL

DERIVATA DI FUNZIONE COMPOSTA

Sia $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, A aperto e sia $g: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I intervallo.
Supponiamo che la funzione $h(x,y) := g(f(x,y))$ sia ben definita nell'intorno $U_\delta(x_0,y_0)$, $\delta > 0$, intorno di un pto $(x_0,y_0) \in A$. Supponiamo inoltre

1) f sia differenziabile in (x_0,y_0)
2) g sia derivabile in $t_0 := f(x_0,y_0)$

Allora h è differenziabile in (x_0,y_0) e

$$\nabla f(x_0,y_0) = g'(t_0)\nabla f(x_0,y_0) = g'(f(x_0,y_0))\,\nabla f(x_0,y_0)$$

— · —

Siano $g_1, g_2 : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I intervallo e sia $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, A aperto.
Supponiamo che la funzione $h(t) := f(g_1(t), g_2(t))$ sia ben definita in un intervallo $(t_0-\delta, t_0+\delta) \subset I$, $\delta > 0$
Supponiamo inoltre:

1) g_1 e g_2 siano entrambe derivabili in t_0
2) f sia differenziabile nel pto (x_0,y_0) dove $x_0 := g_1(t_0)$, $y_0 := g_2(t_0)$

Allora h è derivabile in t_0

$$h'(t_0) = g_1'(t_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + g_2'(t_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) =$$
$$= \nabla f(x_0,y_0) \cdot \left(g_1'(t_0),\ g_2'(t_0)\right)$$

COMMENTO

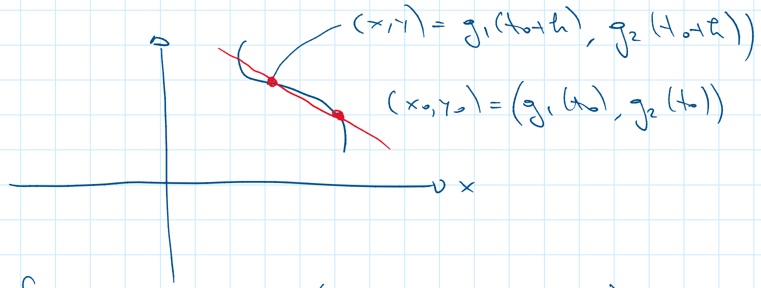
$g_1 : t \in I \subseteq \mathbb{R} \mapsto g_1(t) \in \mathbb{R}$

$g_2 : t \in I \subseteq \mathbb{R} \mapsto g_2(t) \in \mathbb{R}$

$g : t \in I \subseteq \mathbb{R} \mapsto (g_1(t), g_2(t)) \in \mathbb{R}^2$

$\cancel{Gr(g) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \quad x \in I \quad y = g_1(x),\ z = g_2(x)\} \subseteq \mathbb{R}^3}$

$Im(g) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad : \quad x = g_1(t), \quad y = g_2(t), \quad t \in I\}$



$$\begin{cases} x = g_1(t_0) + s\,(g_1(t_0+h) - g_1(t_0)) \\ y = g_2(t_0) + s\,(g_2(t_0+h) - g_2(t_0)) \end{cases} \qquad s \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} x = g_1(t_0) + sh\,\dfrac{g_1(t_0+h) - g_1(t_0)}{h} \\ y = g_2(t_0) + sh\,\dfrac{g_2(t_0+h) - g_2(t_0)}{h} \end{cases} \qquad s \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} x = g_1(t_0) + \tau \\ y = g_2(t_0) + \tau \end{cases} \boxed{\begin{matrix} \dfrac{g_1(t_0+h) - g_1(t_0)}{h} \\ \dfrac{g_2(t_0+h) - g_2(t_0)}{h} \end{matrix}} \qquad \tau \in \mathbb{R}$$

Quando $h \to 0$, la direzione della retta per i due pti converge a $(g_1'(t_0), g_2'(t_0))$

Se $(g_1'(t_0), g_2'(t_0)) \neq (0,0)$ $\Rightarrow$ ha senso considerare la retta Tg all'immagine di g come la retta di eq parametrica
$$\begin{cases} x = g_1(t_0) + \tau\, g_1'(t_0) \\ y = g_2(t_0) + \tau\, g_2'(t_0) \end{cases} \qquad \tau \in \mathbb{R}$$

DIM 2 $\quad h(x,y) = f(g_1(t), g_2(t))$

So che f è differenziabile in $(x_0,y_0) := (g_1(t_0), g_2(t_0))$

$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0) + h\,\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + k\,\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) + \omega(h,k)$

con $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\omega(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$

con $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\omega(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$ ⟸

$$\varepsilon(h,k) = \begin{cases} \frac{\omega(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} & (h,k)\neq(0,0) \\ 0 & (h,k)=(0,0) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $\varepsilon(h,k)$ è continua in $(0,0)$ e

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0) + h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) + \varepsilon(h,k)\sqrt{h^2+k^2}$$

$h = g_1(t_0+s) - g_1(t_0)$ $\qquad$ $k = g_2(t_0+s) - g_2(t_0)$

$$f(g_1(t_0+s), g_2(t_0+s)) = f(g_1(t_0), g_2(t_0)) +$$
$$+ \left(g_1(t_0+s)-g_1(t_0)\right)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + \left(g_2(t_0+s)-g_2(t_0)\right)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) +$$
$$+ \sqrt{h^2+k^2}\ \varepsilon(h,k)$$

$$\frac{f(g_1(t_0+s), g_2(t_0+s)) - f(g_1(t_0), g_2(t_0))}{s} =$$

$$= \underbrace{\frac{g_1(t_0+s)-g_1(t_0)}{s}}_{\to g_1'(t_0)}\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + \underbrace{\frac{g_2(t_0+s)-g_2(t_0)}{s}}_{\to g_2'(t_0)}\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$$

$$+ \boxed{\frac{1}{s}\sqrt{(g_1(t_0+s)-g_1(t_0))^2 + (g_2(t_0+s)-g_2(t_0))^2}}\ \varepsilon\big(\underbrace{g_1(t_0+s)-g_1(t_0)}_{\to 0}, \underbrace{g_2(t_0+s)-g_2(t_0)}_{\to 0}\big)$$

$\to 0$ $\quad s\to 0$ $\quad \to 0$

$$\to \underbrace{\frac{|s|}{s}}_{\in\{-1,1\}}\underbrace{\sqrt{\left(\frac{g_1(t_0+s)-g_1(t_0)}{s}\right)^2 + \left(\frac{g_2(t_0+s)-g_2(t_0)}{s}\right)^2}}_{\sqrt{(g_1'(t_0))^2 + (g_2'(t_0))^2}}$$

$$\Rightarrow \lim_{s\to 0}\frac{f(g_1(t_0+s), g_2(t_0+s)) - f(g_1(t_0), g_2(t_0))}{s} = g_1'(t_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + g_2'(t_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$$

cioè $f(g_1(t), g_2(t))$ è derivabile in t_0

e abbiamo ottenuto la formula per la sua derivata.

— o —

Sia $A\subseteq\mathbb{R}^2$ e sia $f: A\to\mathbb{R}$. Sia $(x_0,y_0)\in A$

Dico che (x_0,y_0) è un p.to di minimo locale per f in A se

$\exists\, U_\delta(x_0,y_0),\ \delta>0$ T.c. $f(x,y)\geq f(x_0,y_0)$ $\forall (x,y)\in U_\delta(x_0,y_0)\cap A$

Dico che (x_0,y_0) è un p.to di massimo locale per f in A se

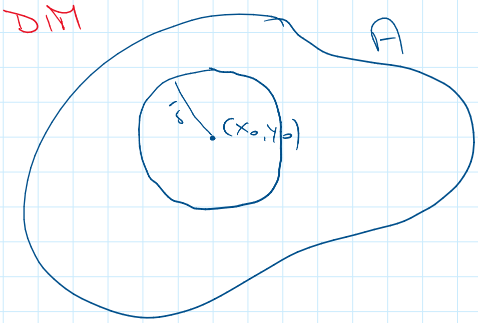
$\exists\, U_\delta(x_0,y_0),\ \delta>0$ T.c. $f(x,y)\leq f(x_0,y_0)$ $\forall (x,y)\in U_\delta(x_0,y_0)\cap A$.

TEOREMA DI FERMAT

Sia $A\subseteq\mathbb{R}^2$ aperto e sia $f: A\to\mathbb{R}$.

Sia $(x_0,y_0)\in A$ p.to di estremo locale (ovvero p.to di max locale o di min. locale) per f in A. Supponiamo che f sia derivabile in (x_0,y_0). Allora $\nabla f(x_0,y_0)=(0,0)$.

DIM



Per fissare le idee suppongo che (x_0,y_0) sia un p.to di minimo locale.

$\exists\,\delta>0$ T.c.

$f(x,y)\geq f(x_0,y_0)$ $\forall (x,y)\in U_\delta(x_0,y_0)\cap A = U_\delta(x_0,y_0)$

$g(x)=f(x,y_0)$

$x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$

$(x,y_0)\overset{?}{\in} U_\delta(x_0,y_0)$

$(x-x_0)^2+(y_0-y_0)^2<\delta^2$ $\quad (x-x_0)^2<\delta^2$

$(x,y_0)\in U_\delta(x_0,y_0)$ SSE $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$

$g(x)\geq g(x_0)$ $\forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ $\Rightarrow g'(x_0)=0$

$g'(x_0)=\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ $\Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=0$

$h(y)=f(x_0,y)$ $\quad y\in(y_0-\delta,y_0+\delta)$ $\quad \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=0$

— o —

Sia $f: A\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, A aperto e sia $(x_0,y_0)\in A$ T.c. f è derivabile in A e $\nabla f(x_0,y_0)=(0,0)$. Dico che (x_0,y_0) è un PTO CRITICO DI f.

— o —

$f: A\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, A aperto, f differenziabile.

$c\in\mathbb{R}$ $\quad L_c=\{(x,y)\in A \text{ T.c. } f(x,y)=c\}$

$(x_0,y_0)\in L_c$ $\quad \begin{cases} x=g_1(t)\\ y=g_2(t)\end{cases}$ $\quad t\in(t_0-\delta,t_0+\delta)$

$(x_0,y_0)=(g_1(t_0),g_2(t_0))$

Supponiamo anche che g_1 e g_2 siano funzioni derivabili

$$f(g_1(t), g_2(t)) \equiv c \qquad \forall t \in (t_0-\delta, t_0+\delta)$$

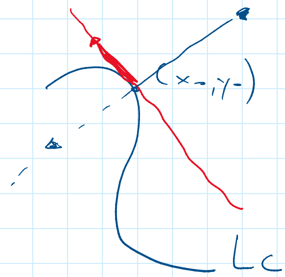
$$h(t) = f(g_1(t), g_2(t)) \quad \Rightarrow \quad h'(t) \equiv 0$$

$$0 = h'(t) = \nabla f(g_1(t), g_2(t)) \circ (g_1'(t), g_2'(t)) \qquad \forall t$$

$$\nabla f(x_0, y_0) \circ (g_1'(t_0), g_2'(t_0)) = 0$$

Se $(g_1'(t_0), g_2'(t_0)) \neq (0,0)$

$\nabla f(x_0,y_0)$ è perpendicolare a L_c in (x_0,y_0)



DERIVATE PARZIALI DEL SECONDO ORDINE

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto e $f: A \to \mathbb{R}$.

Suppongo che f sia derivabile rispetto a x in ogni pto $(x,y) \in A$

$$\frac{\partial f}{\partial x} : (x,y) \in A \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \in \mathbb{R}$$

Se $\frac{\partial f}{\partial x}$ è derivabile rispetto a x in un pto $(x_0,y_0) \in A$ cioè se esiste $\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x_0,y_0)$, la chiamo DERIVATA SECONDA PURA DI f RISPETTO A x e la indico con

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) \quad \text{o} \quad f_{xx}(x_0,y_0)$$

Se $\frac{\partial f}{\partial x}$ è derivabile rispetto a y in un pto $(x_0,y_0) \in A$, cioè se esiste $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x_0,y_0)$, la chiamo DERIVATA SECONDA MISTA DI f RISPETTO A x E ~~PO~~ A y e la indico

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0) \quad \text{o} \quad f_{yx}(x_0,y_0)$$

Considero $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ Supponiamo che sia definito $\forall (x,y) \in A$

È ben definita la funzione $\frac{\partial f}{\partial y} : (x,y) \in A \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \in \mathbb{R}$

Se è derivabile rispetto a x cioè se esiste $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x_0,y_0)$ chiamo questo valore DERIVATA SECONDA MISTA DI f RISPETTO A y E POI A x e la indico

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) \quad o \quad f_{xy}(x_0,y_0)$$

Infine se $\exists \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x_0,y_0)$ la indico

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) \quad o \quad f_{yy}(x_0,y_0)$$

DERIVATA SECONDA PURA DI f RISPETTO A y.

ESEMPIO $\quad f(x,y) = x^2 y^3$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^3 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 3y^2 = 3x^2y^2$

$f_{xx} = 2y^3 \qquad f_{xy} = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2y^2) = 6xy^2$

$f_{yx} = \frac{\partial}{\partial y}(2xy^3) = 2x\,3y^2 = 6xy^2 \qquad f_{yy} = 3x^2 \cdot 2y = 6x^2y$

TEOREMA DI SCHWARZ (no dim)

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto. Sia $f: A \to \mathbb{R}$. Supponiamo che le derivate parziali seconde miste f_{xy} e f_{yx} siano ben definite in un intorno di un pto $(x_0,y_0) \in A$ e che siano continue in (x_0,y_0)

Allora $f_{xy}(x_0,y_0) = f_{yx}(x_0,y_0)$.

DEF Sia $A \subset \mathbb{R}^2$ aperto e sia $f: A \to \mathbb{R}$.

Se f, le sue derivate parziali prime e le sue derivate parziali seconde sono continue in ogni pto di A, dico che $f \in C^2(A)$.

— o —

$\nabla f(x_0,y_0) = (f_x(x_0,y_0), f_y(x_0,y_0))$

$$H_f(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x_0,y_0) & f_{xy}(x_0,y_0) \\ f_{yx}(x_0,y_0) & f_{yy}(x_0,y_0) \end{pmatrix}$$ MATRICE HESSIANA DI f NEL PTO (x_0,y_0)

Se $f \in C^2(A)$, per il Teorema di Schwarz $H_f(x_0,y_0)$ è una matrice simmetrica.

FORME QUADRATICHE DI $\mathbb{R}^2$

$$q(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \qquad q(x,y) = (x,y)\, M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

r retta per l'origine $\quad \underline{v} = (v_1, v_2)$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \quad t \in \mathbb{R} \qquad \begin{cases} x = tv_1 \\ y = tv_2 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

$$q(tv_1, tv_2) = at^2v_1^2 + 2b\, tv_1 tv_2 + ct^2v_2^2 =$$
$$= t^2(av_1^2 + 2bv_1v_2 + cv_2^2)$$

Se $t \neq 0 \Rightarrow q(tv_1, tv_2)$ ha segno costante che non dipende da t

1) q è positiva su ogni retta: dico che q è una forma quadratica definita positiva $\quad q(x,y) = x^2 + y^2$

2) q è positiva su alcune rette, nulla su altre ma non è mai negativa: dico che q è una forma quadratica semidefinita positiva. $\quad q(x,y) = x^2$

3) q è negativa su ogni retta: dico che q è una forma quadratica definita negativa $\quad q(x,y) = -x^2 - y^2$

4) q è negativa su alcune rette, nulla su altre ma non è mai positiva: dico che q è una forma quadratica semidefinita negativa $\quad q(x,y) = -x^2$

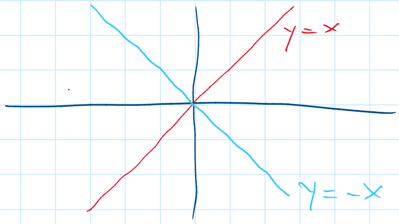
5) q è positiva su alcune rette, negativa su altre, nulla su altre: dico che q è una forma quadratica

nulla su altre: dico che q è una forma quadratica indefinita.

$q(x,y) = x^2 - y^2$.

$$q(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

$a = c = 0 \qquad q(x,y) = 2bxy \qquad b \neq 0$



$$q(x,x) = 2bx^2$$
$$q(x,-x) = -2bx^2$$

segno opposto

$\Downarrow$

q è indefinita.

Almeno uno tra a e c è $\neq 0$

Posso supporre $a \neq 0$

$$q(x,y) = a\left(x^2 + \frac{2b}{a}xy + \frac{c}{a}y^2\right) =$$

$$= a\left(x^2 + 2x\cdot\frac{b}{a}y + \frac{b^2}{a^2}y^2 - \frac{b^2}{a^2}y^2 + \frac{c}{a}y^2\right)$$

$$= a\left(\left(x + \frac{b}{a}y\right)^2 + \frac{(ac - b^2)y^2}{a^2}\right)$$

$a > 0 \qquad ac - b^2 > 0 \qquad \Rightarrow q$ definita positiva

$a > 0 \qquad ac - b^2 = 0 \qquad \Rightarrow q(x,y) = a\left(x + \frac{b}{a}y\right)^2 \Rightarrow$ semidefinita positiva

$a > 0 \qquad ac - b^2 < 0 \qquad x = -\frac{b}{a}y \qquad a\cdot\frac{(ac-b^2)y^2}{a^2} < 0 \qquad y \neq 0$

$y = 0 \qquad ax^2 > 0 \qquad x \neq 0$

q indefinita.

$a < 0 \qquad ac - b^2 > 0 \qquad \Rightarrow q$ definita negativa

$a < 0 \qquad ac - b^2 = 0 \qquad \Rightarrow q$ semidefinita negativa

$a < 0 \qquad ac - b^2 < 0 \qquad \Rightarrow q$ indefinita

N.B. $ac - b^2 > 0 \Rightarrow ac > b^2 \Rightarrow ac > 0$ cioè a e c sono entrambi $\neq 0$ e sono concordi.

$M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ $\qquad ac - b^2 = \det M$

$\det(M - \lambda I_2) = \det \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda - a)(\lambda - c) - b^2$

$= \lambda^2 - (a+c)\lambda + ac - b^2$

M simmetrica $\Rightarrow$ gli autovalori di M sono reali.

Li indico λ_1 e λ_2 con $\lambda_1 \leq \lambda_2$

$\lambda^2 - (a+c)\lambda + ac - b^2 = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$

$\lambda^2 - (a+c)\lambda + ac - b^2 = \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2$

$\lambda_1 + \lambda_2 = a + c = \operatorname{tr} M$

$\lambda_1 \lambda_2 = ac - b^2 = \det M$

q definita positiva $\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ ac - b^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tr} M > 0 & \lambda_1 + \lambda_2 > 0 \\ \det M > 0 & \lambda_1\lambda_2 > 0 \end{cases}$ $\boxed{0 < \lambda_1 \leq \lambda_2}$

q definita negativa $\Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tr} M < 0 & \lambda_1 + \lambda_2 < 0 \\ \det M > 0 & \lambda_1\lambda_2 > 0 \end{cases}$ $\boxed{\lambda_1 \leq \lambda_2 < 0}$

q semidefinita positiva $\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ ac - b^2 = 0 \end{cases}$ $\qquad ac = b^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tr} M > 0 & \lambda_1 + \lambda_2 > 0 \\ \det M = 0 & \lambda_1\lambda_2 = 0 \end{cases}$ $\boxed{0 = \lambda_1 < \lambda_2}$

q semidefinita negativa $\Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tr} M < 0 & \lambda_1 + \lambda_2 \\ \det M = 0 & \lambda_1\lambda_2 = 0 \end{cases}$ $\boxed{\lambda_1 < \lambda_2 = 0}$

q indefinita $\qquad a = c = 0 \Rightarrow \det M = -b^2 < 0$

$a \neq 0 \quad ac - b^2 < 0$

q indefinita SSE $\det M < 0$ $\quad \lambda_1\lambda_2 < 0$ $\quad \boxed{\lambda_1 < 0 < \lambda_2}$