venerdì 27 marzo 2020 09:35

LIMITE DI FUNZIONE

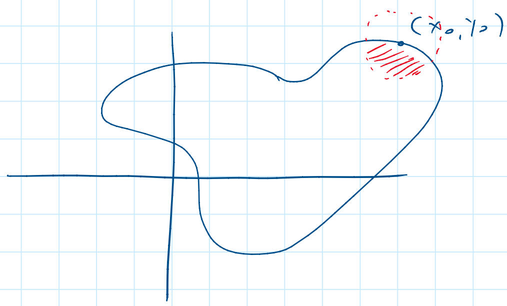
Sia $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e sia $(x_0,y_0) \in A \cup \partial A$

Sia $L \in \mathbb{R}$

Dico che $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$

se $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ t.c. $\forall (x,y) \in A \cap U_\delta(x_0,y_0) \quad (x,y) \neq (x_0,y_0)$

si ha $|f(x,y) - L| < \varepsilon$



$|f(x,y) - L| < \varepsilon$

$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = +\infty$

$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists \delta > 0$ t.c. $\forall (x,y) \in A \cap U_\delta(x_0,y_0) \quad (x,y) \neq (x_0,y_0)$

si ha $f(x,y) > M$

$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = -\infty$

$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists \delta > 0$ T.c. $\forall (x,y) \in A \cap U_\delta(x_0,y_0) \quad (x,y) \neq (x_0,y_0)$

si ha $f(x,y) < M$.

Teorema di permanenza del segno

① Se $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L > 0$ o $+\infty$, allora

$\exists \delta > 0$ t.c. $f(x,y) > 0 \quad \forall (x,y) \in A \cap U_\delta(x_0,y_0) \quad (x,y) \neq (x_0,y_0)$

② Se $f(x,y) \geq 0 \quad \forall (x,y) \in A \cap U_\delta(x_0,y_0) \quad \delta > 0, \quad (x,y) \neq (x_0,y_0)$

e se esiste il $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ allora questo limite

è un reale non negativo o è $+\infty$.

è un reale non negativo o è $+\infty$.

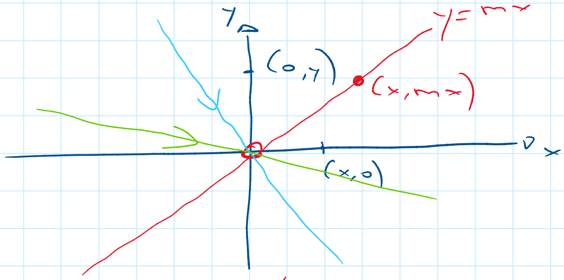
Def FUNZIONI CONTINUE

Sia $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e sia $(x_0, y_0) \in A$

Dico che f è continua in (x_0, y_0) se $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0)$

N.B $\quad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

$f(0,0) = 0$



$f(x,0) \quad x \neq 0$

$= \dfrac{x \cdot 0}{x^2+0} = 0$

$f(0,y) = \quad y \neq 0$

$= \dfrac{0 \cdot y}{0+y^2} = 0$

$$f(x, mx) = \frac{x \cdot mx}{x^2 + m^2 x^2} = \frac{m \cancel{x^2}}{\cancel{x^2}(1+m^2)}$$

$x \to 0 \qquad (x, mx) \to (0,0) \qquad \lim_{x\to 0} f(x, mx) = \lim_{x \to 0} \dfrac{m}{1+m^2}$

che vale 0 se $m = 0$

$f(x,y) = \sin(x+y) \qquad f(x,y) = \exp(x^2-y^2)(x^3+5y^2)$

TEOREMA Sia $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua.

Allora i seguenti insiemi sono aperti

$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) > 0\}$

$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) < 0\}$

$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) \neq 0\}$

Sono chiusi: $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) \geq 0\}$

$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) \leq 0\}$

$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = 0\}$

DIM Dimostro che $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) > 0\}$ è aperto.

DIM Dimostra che $A := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : f(x,y) > 0\}$ è aperto.

Sia $(x_0,y_0)\in A$ cioè $f(x_0,y_0)>0$

f è continua $\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0) > 0$

Per il Teorema di permanenza del segno

$\exists\,\delta>0$ t.c. $f(x,y)>0 \quad \forall (x,y)\in U_\delta(x_0,y_0)$

cioè $\exists\,\delta>0$ t.c. $U_\delta(x_0,y_0)\subseteq A \Rightarrow A$ è aperto.

TEOREMA DI WEIERSTRASS

Sia $E\subseteq\mathbb{R}^2$ chiuso e limitato e sia $f:E\to\mathbb{R}$ funzione continua. Allora f ammette massimo e minimo

cioè $\exists\,(x_M,y_M)\in E$, $(x_m,y_m)\in E$ t.c.

$$f(x_m,y_m)\le f(x,y)\le f(x_M,y_M) \qquad \forall (x,y)\in E.$$

— o —

$f: A\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ $\quad A$ aperto, $(x_0,y_0)\in A$

$f(x,y) \qquad g(x)=f(x,y_0)$

$$\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}$$

f è derivabile rispetto a x nel p.to (x_0,y_0) se la funzione g è derivabile in x_0, ovvero se esiste finito

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}$$

$h = x-x_0 \qquad \frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0} = \frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}$

ovvero se esiste finito $\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}$

In tal caso il valore del limite si dice DERIVATA PARZIALE DI f RISPETTO A x in (x_0,y_0) e si indica

$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \qquad \partial_x f(x_0,y_0) \qquad D_x f(x_0,y_0) \qquad D_1 f(x_0,y_0)$

$f_x(x_0,y_0)$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \qquad \partial_x f(x_0,y_0) \qquad D_x f(x_0,y_0) \qquad D_1 f(x_0,y_0) \qquad f_x(x_0,y_0)$

∂ "dé"

Analogamente dico che f è derivabile rispetto a y nel punto (x_0,y_0) se esiste finito

$$\lim_{k\to 0} \frac{f(x_0,y_0+k)-f(x_0,y_0)}{k}$$

In tal caso il valore del limite si dice DERIVATA PARZIALE DI f RISPETTO A y NEL PUNTO (x_0,y_0)

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \qquad \partial_y f(x_0,y_0) \qquad D_y f(x_0,y_0) \qquad D_2 f(x_0,y_0) \qquad f_y(x_0,y_0)$$

Se, nel punto (x_0,y_0) f è derivabile sia rispetto a x che rispetto a y, dico che f è derivabile in (x_0,y_0).

Il vettore $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)$

si dice GRADIENTE DI f nel punto (x_0,y_0) e si indica

$$\nabla f(x_0,y_0) \qquad Df(x_0,y_0) \qquad \operatorname{grad} f(x_0,y_0)$$

ESEMPIO $\quad f(x,y) = x^2+2xy-y^3+\log(x-y)$

Calcolare $\nabla f(3,2)$

f è definita in $A := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x-y>0\}$

$(3,2)\in A \qquad g(x,y)=x-y$ è continua in $\mathbb{R}^2 \Rightarrow A$ è aperto.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x+2y+\frac{1}{x-y} \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(3,2) = 2\cdot 3+2\cdot 2+\frac{1}{3-2} = 6+4+1 = 11$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x-3y^2+\frac{1\cdot(-1)}{x-y} = 2x-3y^2-\frac{1}{x-y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(3,2) = 2\cdot 3-3\cdot 4-\frac{1}{3-2} = 6-12-1 = -7$$

$$\nabla f(3,2) = (11,-7)$$

$\nabla f(3,2) = (11,-7)$

ESEMPIO $\quad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

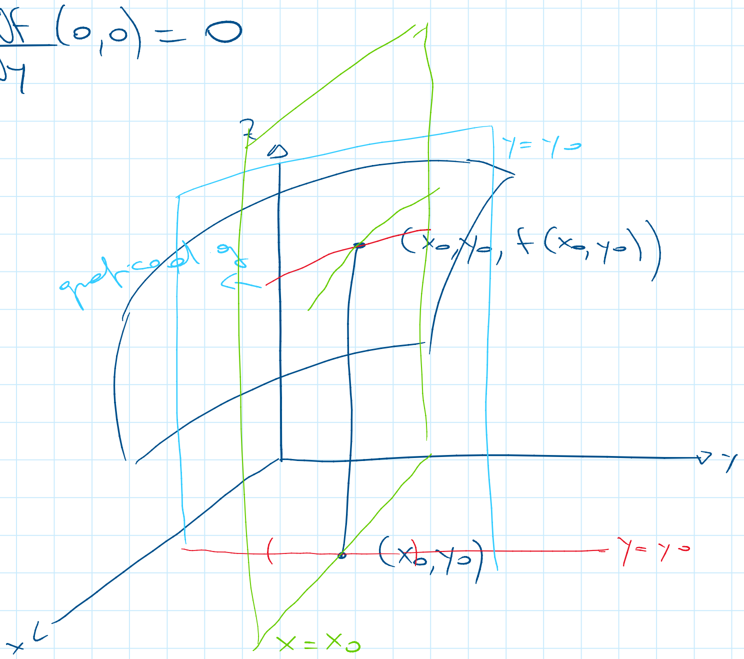
Abbiamo già visto che $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ non esiste

$\Rightarrow f$ non è continua in $(0,0)$

$(x_0,y_0)=(0,0) \qquad \dfrac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \dfrac{f(h,0)}{h} = \dfrac{0}{h} = 0$

$\Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 \qquad \dfrac{f(0,0+k)-f(0,0)}{k} = \dfrac{f(0,k)}{k} = \dfrac{0}{k} = 0$

$\Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$



$f : (x,y) \in A \subseteq \mathbb{R}^2 \to f(x,y) \in \mathbb{R}$

$g(x) = f(x,y_0)$

$\begin{cases} z = g(x_0) + g'(x_0)(x-x_0) \\ y = y_0 \end{cases} \qquad r_1 \begin{cases} z = f(x_0,y_0) + \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) \\ y = y_0 \end{cases}$

$h(y) = f(x_0,y)$

$\begin{cases} z = h(y_0) + h'(y_0)(y-y_0) \\ x = x_0 \end{cases} \qquad r_2 \begin{cases} z = f(x_0,y_0) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) \\ x = x_0 \end{cases}$

$r_1 \begin{cases} x = t \\ y = y_0 \\ z = f(x_0,y_0) + \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(t-x_0) \end{cases} \qquad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \end{pmatrix}$

$$P_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ f(x_0,y_0) \end{pmatrix}$$

$$r_2 \begin{cases} x = x_0 \\ y = t \\ z = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(t-y_0) \end{cases} \qquad v_2 : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \end{pmatrix}$$

$$P_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ f(x_0,y_0) \end{pmatrix}$$

$$V_1 \wedge V_2 = \begin{pmatrix} -\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \\ -\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \\ 1 \end{pmatrix} \qquad P_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ f(x_0,y_0) \end{pmatrix}$$

$$\pi \quad P \in \mathbb{R}^3 \quad \text{t.c.} \quad (P - P_0) \circ (v_1 \wedge v_2) = 0$$

$$P\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ f(x_0,y_0) \end{pmatrix} \right) \circ \begin{pmatrix} -\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \\ -\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$(x-x_0)\cdot\left(-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right) + (y-y_0)\left(-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right) + \left(z - f(x_0,y_0)\right)1 = 0$$

$$\pi) \qquad z = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$

$$z = f(x_0,y_0) + \nabla f(x_0,y_0) \circ (x-x_0, y-y_0)$$

— o —

$f : (a,b) \to \mathbb{R} \qquad x_0 \in (a,b) \qquad f$ sia derivabile in x_0

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$$

$$f'(x_0) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} \left(\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) \right) = 0$$

$$g(h) := \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) \qquad h \neq 0$$

$$\lim_{h \to 0} g(h) = 0$$

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0) + g(h)$$

$$f(x_0+h) = f(x_0) + h f'(x_0) + h g(h)$$

$$G(h) := h g(h) \qquad \lim_{h \to 0} \frac{G(h)}{h} = 0$$

$$f(x_0+h) = f(x_0) + h f'(x_0) + G(h)$$ dove G è una funzione t.c. $\lim_{h \to 0} \frac{G(h)}{h} = 0$

— o —

$f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad (x_0, y_0) \in A$

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0, y_0) + a_1 h + a_2 k + G(h,k)$$

con $\lim_{(h,k) \to (0,0)} \frac{G(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$

Dico che f è differenziabile in (x_0, y_0) se esistono $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ t.c.

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0, y_0) + a_1 h + a_2 k + G(h,k)$$

dove G è una funzione definita in un intorno di $(0,0)$, escluso il pto $(0,0)$ e t.c. $\lim_{(h,k) \to (0,0)} \frac{G(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$

PROPOSIZIONE Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, A aperto e sia $(x_0, y_0) \in A$. Se f è differenziabile in (x_0, y_0), allora f è derivabile e continua nel pto (x_0, y_0).

DIM f è differenziabile $\Rightarrow \exists (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ t.c.

$$f(x,y) = f(x_0, y_0) + a_1 (x - x_0) + a_2 (y - y_0) + G(x-x_0, y-y_0)$$

con G t.c. $\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} \frac{G(x-x_0, y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} = 0$

Scelgo $x = x_0 + h$, $y = y_0$ $\quad h \neq 0$

$$f(x_0+h, y_0) = f(x_0,y_0) + a_1 h + G(h,0) \qquad \text{con } \lim_{h \to 0} \frac{G(h,0)}{\sqrt{h^2}} = $$

$$\frac{f(x_0+h,y_0) - f(x_0,y_0)}{h} = a_1 + \frac{G(h,0)}{h} \quad h \neq 0 \qquad = \lim_{h\to 0} \frac{G(h,0)}{|h|} = 0$$

$$\downarrow h \to 0 \qquad \frac{G(h,0)}{|h|} \frac{|h|}{h}$$

$$a_1 \qquad \downarrow \qquad \in [-1,1]$$

$$0$$

$$\Rightarrow \exists \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = a_1$$

Analogamente scegliendo $x = x_0$, $y = y_0 + k$ provo che $\exists \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = a_2$

$\Rightarrow$ Se f è differenziabile, allora è anche derivabile nel p.to e

$$(a_1, a_2) = \nabla f(x_0,y_0)$$

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) + G(x-x_0, y-y_0)$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{G(x-x_0,y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} = 0 \quad \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} G(x-x_0,y-y_0) = 0$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \Big(f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cancel{(x-x_0)}^{\to 0} + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cancel{(y-y_0)}^{\to 0}$$

$$+ \cancel{G(x-x_0,y-y_0)} \to 0$$

$$= f(x_0,y_0)$$

TEOREMA (no dim) Sia $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, A aperto e sia $(x_0,y_0) \in A$

Supponiamo che $\exists \delta > 0$ t.c. nell'intorno $U_\delta(x_0,y_0)$ sono ben definite le derivate $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ – Supponiamo inoltre che entrambe le funzioni derivate parziali siano continue in (x_0,y_0)

Allora f è differenziabile in (x_0,y_0) –

In particolare, se le derivate parziali esistono e sono continue in tutto A, allora f è differenziabile in ogni p.to di A –

ESEMPIO $\quad f(x,y) = (x^3 + yx^2)\, e^{x^2-y^2}$

Calcolare, se esiste, il piano tangente al grafico di f nel p.to

Calcolare, se esiste, il piano tangente al grafico di f nel pto $(1,2,f(1,2))$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (3x^2+2xy)\, e^{x^2-y^2} + (x^3+yx^2)\, e^{x^2-y^2}\, 2x =$$
$$= e^{x^2-y^2}\left(3x^2+2xy+2x^4+2yx^3\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 e^{x^2-y^2} + (x^3+yx^2)\, e^{x^2-y^2}(-2y) =$$
$$= e^{x^2-y^2}\left(x^2-2x^3y-2x^2y^2\right)$$

$$f(1,2) = (1^3+2\cdot 1^2)\, e^{1^2-2^2} = 3e^{-3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = e^{-3}\left(3+2\cdot 2+2+2\cdot 2\right) = 13e^{-3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = e^{-3}\left(1-2\cdot 2-2\cdot 4\right) = -11e^{-3}$$

$\pi)\quad z = 3e^{-3} + 13e^{-3}(x-1) - 11e^{-3}(y-2)$

$\pi)\quad z = 13e^{-3}x - 11e^{-3}y + 12e^{-3}$

ESEMPIO $\qquad f(x,y) = \dfrac{x^3-x^2y}{x+y}$

Calcolare, se esiste, il piano tangente al grafico di f nel pto $(2,-1,f(2,-1))$

$D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x+y \neq 0\} \qquad (2,-1)\in D$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{(3x^2-2xy)(x+y)-1(x^3-x^2y)}{(x+y)^2}$$ è continua in D

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{3x^3+3x^2y-2x^2y-2xy^2-x^3+x^2y}{(x+y)^2} = \frac{2x^3+2x^2y-2xy^2}{(x+y)^2}$$
$$= \frac{2x(x^2+xy-y^2)}{(x+y)^2}$$

$$f(x,y) = \frac{x^3-x^2y}{x+y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-x^2(x+y)-1(x^3-x^2y)}{}$$

$$f(x,y) = \frac{\quad}{x+y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-x^2(x+y) - 1\,(x^3 - x^2 y)}{(x+y)^2} \quad \text{è continua in } D$$

$$= \frac{-x^3 - x^2 y - x^3 + x^2 y}{(x+y)^2} = \frac{-2x^3}{(x+y)^2}$$

$$f(2,-1) = \frac{8+4}{2-1} = 12$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2,-1) = \frac{4\,(4-2-1)}{(2-1)^2} = 4 \cdot 1 = 4$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(2,-1) = \frac{-2 \cdot 8}{(2-1)^2} = -16$$

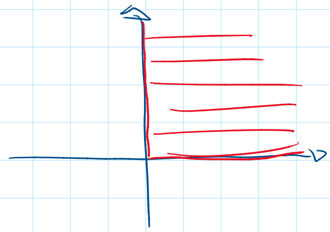
π) $$z = 12 + 4(x-2) - 16(y+1)$$

$$z = 4x - 16y + 12 - 8 - 16 \qquad z = 4x - 16y - 12$$

ESEMPIO $\quad f(x,y) = x\sqrt{y} - y\sqrt{x}$

Calcolare, se esiste, il piano Tg al grafico di f nel pto $(2,3,f(2,3))$

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y \geq 0 \ , \ x \geq 0\}$$

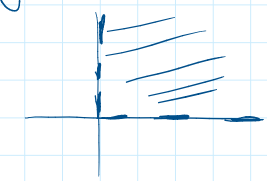


$$f(x,y) = x\,y^{1/2} - y\,x^{1/2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^{1/2} - y\,\frac{1}{2}\,x^{-1/2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x\,\frac{1}{2}\,y^{-1/2} - x^{1/2}$$

$\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ esistono e sono continue nell'$\text{int}(D) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x>0, y>0\}$



$$f(2,3) = 2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2,3) = \sqrt{3} - \frac{3}{2}\,\frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{3} - \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(2,3) = \frac{1}{\sqrt{3}} - \sqrt{2} = \frac{\sqrt{3}}{3} - \sqrt{2}$$

π) $$z = \left(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}\right) + \left(\sqrt{3} - \frac{3\sqrt{2}}{4}\right)(x-2) + \left(\frac{\sqrt{3}}{3} - \sqrt{2}\right)(y-3)$$

$$z = \left(\sqrt{3} - \frac{3\sqrt{2}}{4}\right)x + \left(\frac{\sqrt{3}}{3} - \sqrt{2}\right)y + \cancel{2\sqrt{3}} - \cancel{3\sqrt{2}} - \cancel{2\sqrt{3}} + \frac{3}{2}\sqrt{2} - \sqrt{3} + \cancel{3\sqrt{2}}$$

$$Z = \left(\sqrt{3} - \frac{3\sqrt{2}}{4}\right)x + \left(\frac{\sqrt{3}}{3} - \sqrt{2}\right)y + \cancel{2\sqrt{3}} - \cancel{3\sqrt{2}} - \cancel{2\sqrt{3}} + \frac{3}{2}\sqrt{2} - \sqrt{3} + \cancel{3\sqrt{2}}$$

$$Z = \left(\sqrt{3} - \frac{3\sqrt{2}}{4}\right)x + \left(\frac{\sqrt{3}}{3} - \sqrt{2}\right)y + \frac{3}{2}\sqrt{2} - \sqrt{3}$$