martedì 24 marzo 2020 11:07

TEOREMA Sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ t.c. $f'':(a,b)\to\mathbb{R}$ è continua.

Sia $x_0\in(a,b)$ p.to stazionario $(f'(x_0)=0)$

1) Se $f''(x_0)>0$, allora x_0 è un p.to di minimo relativo

1') Se $f''(x_0)<0$, allora x_0 è un p.to di massimo relativo

2) Se x_0 è un p.to di minimo relativo, allora $f''(x_0)\geq 0$

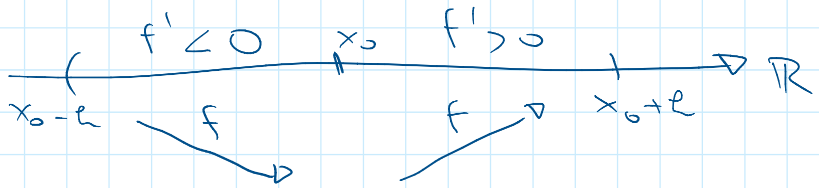
2') Se x_0 è un p.to di massimo relativo, allora $f''(x_0)\leq 0$

DIM 1) $f''(x_0)>0$

$\exists h>0$ t.c. $f''(x)>0 \quad \forall x\in(x_0-h,x_0+h)$

f' è strettamente crescente in (x_0-h, x_0+h)

$f'(x_0)=0$



$\Rightarrow$ x_0 è un p.to di min relativo

1') $f''(x_0)<0 \Rightarrow x_0$ p.to di max rel

2) x_0 sia p.to di min rel $\Rightarrow f''(x_0)\geq 0$

Per ASSURDO supponiamo $f''(x_0)<0$

Allora x_0 è p.to di max rel.

Ma per hp x_0 è p.to di min rel.

$\exists h>0$ t.c. $f(x)=f(x_0) \quad \forall x\in(x_0-h,x_0+h)$

$\Rightarrow f'(x)=0 \quad \forall x\in(x_0-h,x_0+h)$

$f''(x)=0 \quad \forall x\in(x_0-h,x_0+h) \Rightarrow f''(x_0)=0$

2') ANALOGO

STUDIO DI FUNZIONE

1) $f(x) = x^3 e^{-x}$

Dominio $= \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to +\infty} x^3 e^{-x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{e^x} = 0$$

$y = 0$ AS. ORIZZ per $x \to +\infty$

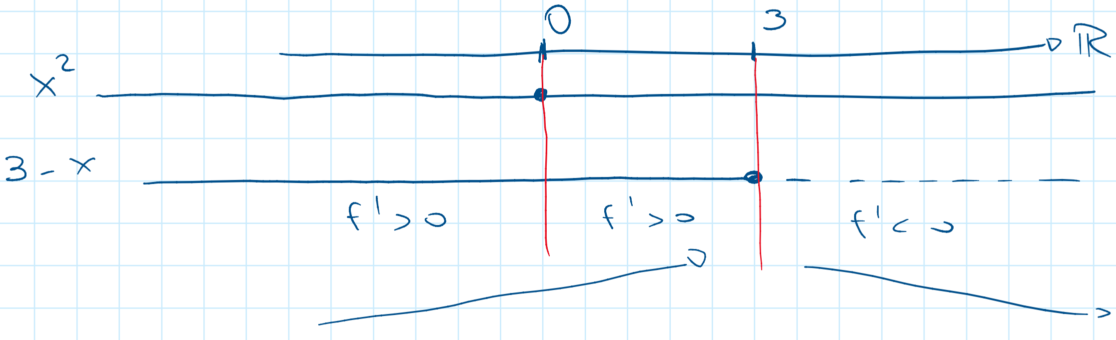
$$\lim_{x \to -\infty} \underset{\downarrow \atop -\infty}{x^3}\ \underset{\downarrow \atop +\infty}{e^{-x}} = -\infty \quad \leftarrow$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} x^2 e^{-x} = +\infty$$

$$f(x) = x^3 e^{-x}$$

$$f'(x) = 3x^2 e^{-x} + x^3 \left(e^{-x} (-1) \right) = x^2 e^{-x} (3 - x)$$

$f'(x) \gtrless 0$ SSE $x^2 (3 - x) \gtrless 0$



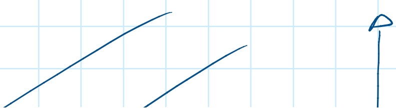
$x_1 = 0 \quad x_2 = 3$ pti stazionari

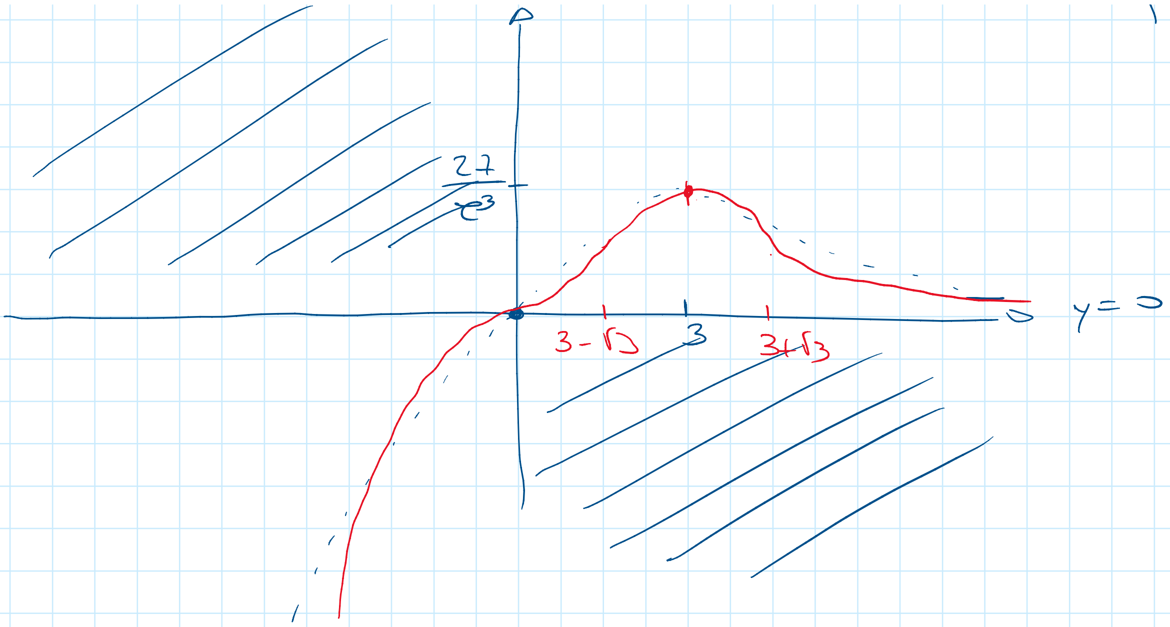
$x_1 = 0$ pto stazionario ma non è pto di estremo relativo

$x_2 = 3$ pto di max relativo e assoluto

$$f(3) = x^3 e^{-x} \Big|_{x=3} = 27 e^{-3}$$

$f(x) = x^3 e^{-x}$





$$f'(x) = e^{-x}\left(3x^2 - x^3\right)$$

$$f''(x) = -e^{-x}\left(3x^2 - x^3\right) + e^{-x}\left(6x - 3x^2\right)$$

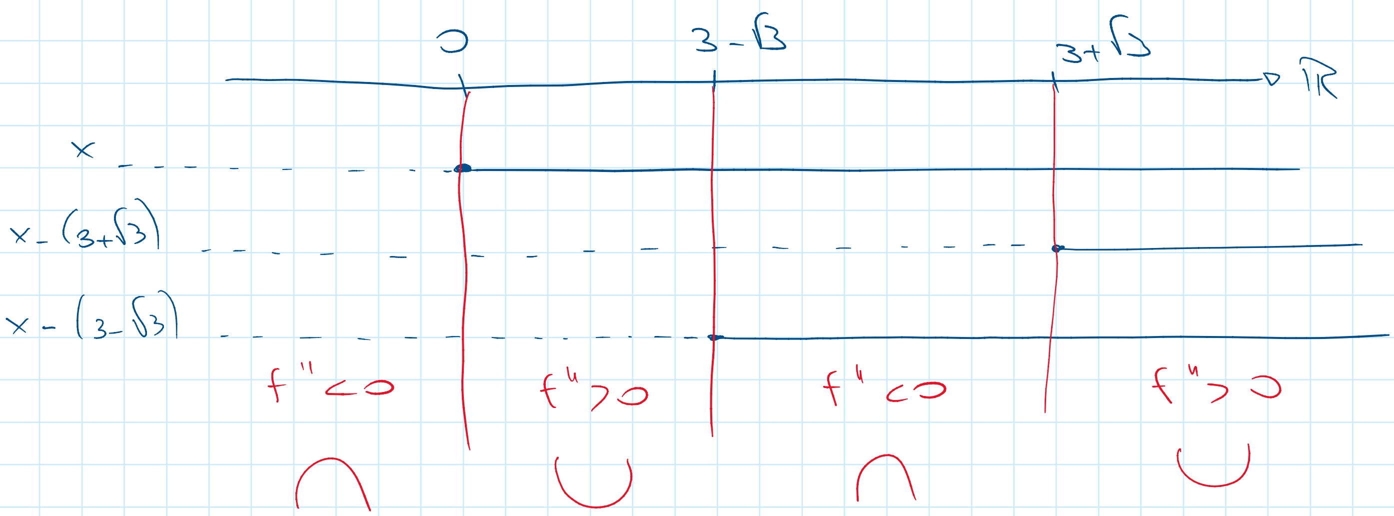
$$= e^{-x}\left(-3x^2 + x^3 + 6x - 3x^2\right) =$$

$$= e^{-x}\, x\left(x^2 - 6x + 6\right)$$

$f''(x) \gtrless 0$ SSE $x\left(x^2 - 6x + 6\right) \gtrless 0$

$x^2 - 6x + 6 = 0$ $\quad \frac{\Delta}{4} = 9 - 6 = 3$ $\quad x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{3}$

$x\left(x^2 - 6x + 6\right) \gtrless 0$ $\quad x\left(x - \left(3+\sqrt{3}\right)\right)\left(x - \left(3-\sqrt{3}\right)\right) \gtrless 0$



0, $3-\sqrt{3}$ e $3+\sqrt{3}$ sono pti di flesso

$$f(x)=\frac{5x^2+11x+5}{x^2+1}$$

$D=\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x^2}\left(5+\frac{11}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = 5$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 5$$

$y=5$ AS. ORIZZ

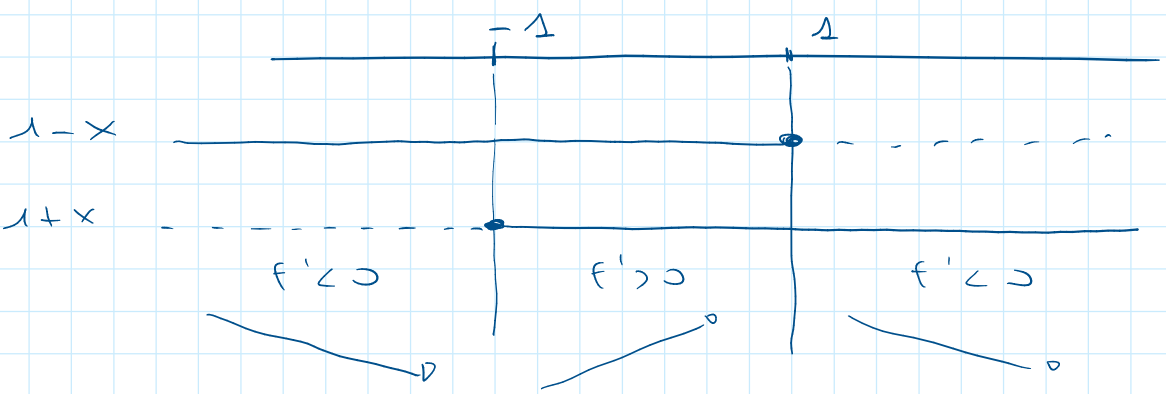
per $x\to+\infty$ e per $x\to-\infty$

$$f'(x)=\frac{(10x+11)(x^2+1)-2x(5x^2+11x+5)}{(x^2+1)^2}=$$

$$=\frac{\cancel{10x^3}+\cancel{10x}+11x^2+11-\cancel{10x^3}-22x^2-\cancel{10x}}{(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{-11x^2+11}{(x^2+1)^2}=\frac{11(1-x^2)}{(x^2+1)^2}=\frac{11(1-x)(1+x)}{(x^2+1)^2}$$

$f'(x) \gtrless 0$ SSE $(1-x)(1+x) \gtrless 0$



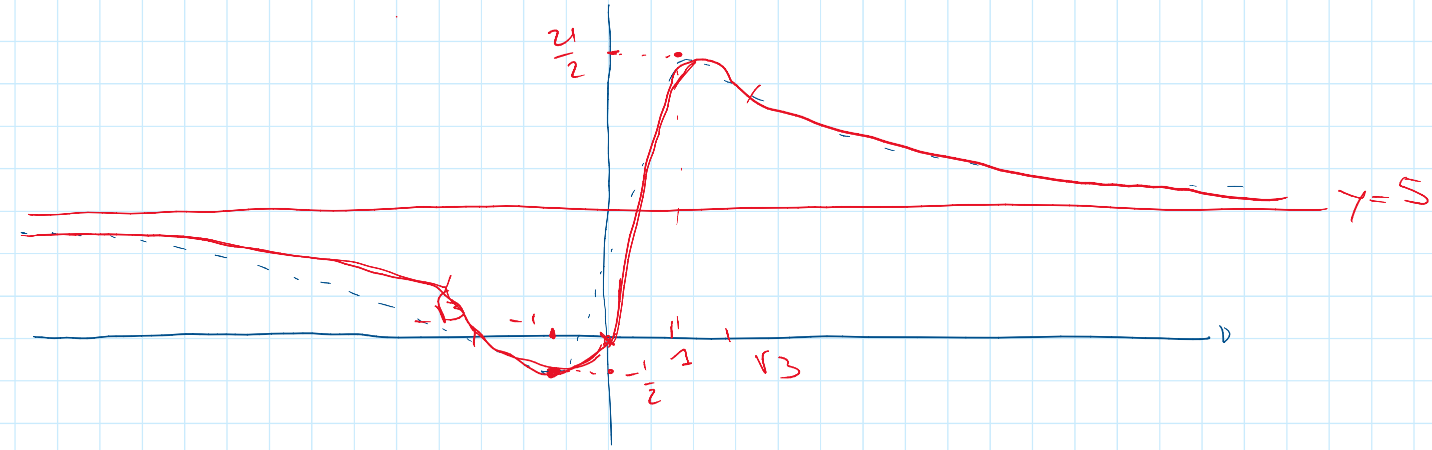
-1 p.to di min rel

+1 p.to di max rel

$$f(-1)=\frac{5-11+5}{1+1}=-\frac{1}{2}$$

$$f(1)=\frac{5+11+5}{1+1}=\frac{21}{2}$$

$$f(x)=\frac{5x^2+11x+5}{x^2+1}$$



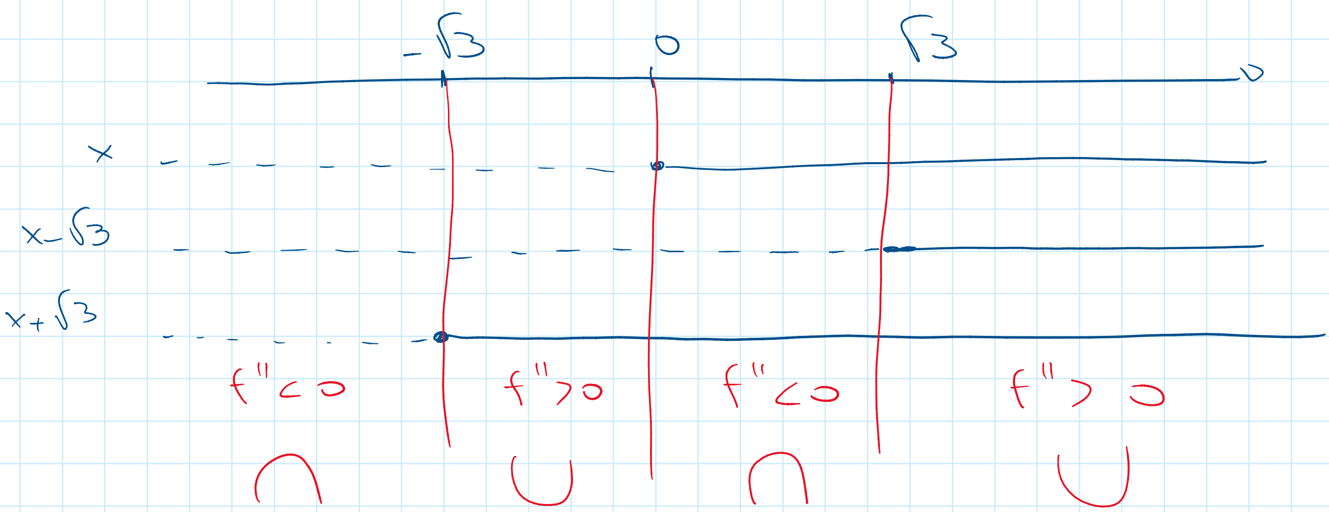
$$f'(x) = 11 \; \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$$

$$f''(x) = 11 \; \frac{(-2x)(x^2+1)^{\cancel{2}} - (-x^2+1)\,2\cancel{(x^2+1)}\cdot 2x}{(x^2+1)^{\cancel{4}\,3}} =$$

$$= \frac{11}{(x^2+1)^3} \left(2x \left(-x^2 - 1 + 2x^2 - 2 \right)\right) =$$

$$= \frac{22}{(x^2+1)^3} \cdot x \cdot (x^2-3) = \frac{22}{(x^2+1)^3} \; x (x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$$

$$f''(x) \gtrless 0 \qquad \text{SSE} \qquad x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) \gtrless 0$$



$$f(x) = \frac{x^2+3x-1}{}$$

$x-2$

$$D=\{x\in\mathbb{R} : x-2\neq 0\} = \{x\in\mathbb{R} : x\neq 2\} = (-\infty,2)\cup(2,+\infty)$$

$$x^2+3x-7\Big|_{x=2} = 4+6-7\neq 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\cancel{2}}\overbrace{\left(1+\frac{3}{x}-\frac{7}{x^2}\right)}^{\to 1}}{\cancel{x}\underbrace{\left(1-\frac{2}{x}\right)}_{\to 1}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x}\left(1+\frac{3}{x}-\frac{7}{x^2}\right)}{\left(1-\frac{2}{x}\right)}\cdot\frac{1}{\cancel{x}} = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x)-1\cdot x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+3x-7}{x-2}-x\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+3x-7-x(x-2)}{x-2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^2}+3x-7-\cancel{x^2}+2x}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{5x-7}{x-2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\left(5-\frac{7}{x}\right)}{\cancel{x}\left(1-\frac{2}{x}\right)} = \frac{5}{1} = 5$$

$y = 1\cdot x+5$ è AS. OBLIQUO per $x\to+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+3x-7}{x-2} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^{\cancel{2}}\left(1+\frac{3}{x}-\frac{7}{x^2}\right)}{\cancel{x}\left(1-\frac{2}{x}\right)} = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x}\left(1+\frac{3}{x}-\frac{7}{x^2}\right)}{1-\frac{2}{x}}\cdot\frac{1}{\cancel{x}} = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-1\cdot x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2+3x-7}{x-2}-x\right) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+3x-7-x(x-2)}{x-2} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x^2}+3x-7-\cancel{x^2}+2x}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{5x-7}{x-2} = 5$$

$y = x+5$ è AS OBLIQUO sia per $x\to+\infty$ che per $x\to-\infty$

$y = x + 5$ è AS OBLIQUO sia per $x \to +\infty$ che per $x \to -\infty$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} \frac{x^2+3x-7}{x-2} = +\infty$$

$x^2+3x-7 \to 3$; $x-2 \to 0$ ma è sempre positivo

$$x^2+3x-7 \Big|_{x=2} = 10-7 = 3$$

è continua $\lim_{x \to 2} (x^2+3x-7) = 3$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} \frac{x^2+3x-7}{x-2} = -\infty$$

$x^2+3x-7 \to 3$; $x-2 \to 0$ ma è sempre negativo

$x = 2$ è AS. VERTICALE $\lim_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$

$$f(x) = \frac{x^2+3x-7}{x-2}$$

$$f'(x) = \frac{(2x+3)(x-2) - 1\cdot(x^2+3x-7)}{(x-2)^2} =$$

$$= \frac{2x^2-4x+\cancel{3x}-6-x^2-\cancel{3x}+7}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{x^2-4x+1}{(x-2)^2}$$

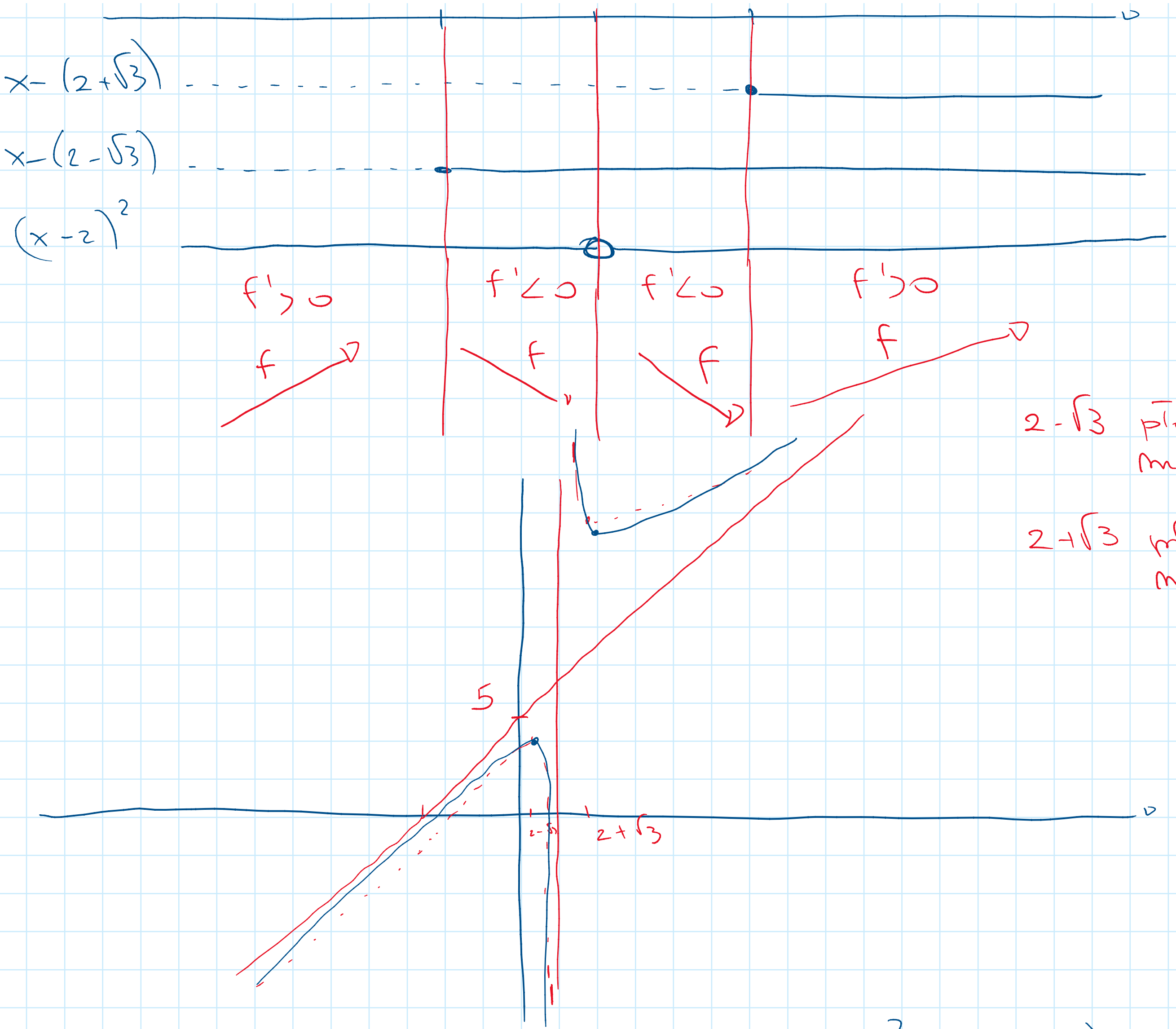
$(x-2)^2 > 0 \quad \forall x \in D$

$x^2-4x+1 = 0$ $\qquad \frac{\Delta}{4} = 4 - 1\cdot 1 = 4-1 = 3$

$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}$

$$f'(x) = \frac{(x-(2+\sqrt{3}))(x-(2-\sqrt{3}))}{(x-2)^2}$$

$2-\sqrt{3}$ $\qquad$ 2 $\qquad$ $2+\sqrt{3}$



$2-\sqrt{3}$ p.to di max rel

$2+\sqrt{3}$ p.to di min rel

$$f(2-\sqrt{3}) = \left.\frac{x^2+3x-7}{x-2}\right|_{x=2-\sqrt{3}} = \frac{(2-\sqrt{3})^2+3(2-\sqrt{3})-7}{(2-\sqrt{3})-2} =$$

$$= \frac{\cancel{4}+\cancel{3}-4\sqrt{3}+6-3\sqrt{3}-\cancel{7}}{\cancel{2}-\sqrt{3}\cancel{-2}} = \frac{6-7\sqrt{3}}{-\sqrt{3}} \cdot \frac{-\sqrt{3}}{-\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{-6\sqrt{3}+21}{3} = 7-2\sqrt{3}$$

$$f(2+\sqrt{3}) = \left.\frac{x^2+3x-7}{x-2}\right|_{x=2+\sqrt{3}} = \frac{(2+\sqrt{3})^2+3(2+\sqrt{3})-7}{(2+\sqrt{3})-2} =$$

$$= \frac{\cancel{4}+\cancel{3}+4\sqrt{3}+6+3\sqrt{3}-\cancel{7}}{\cancel{2}+\sqrt{3}-\cancel{2}} = \frac{6+7\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} =$$

$\cancel{2} + \sqrt{3} - \cancel{2}$

$$= \frac{6\sqrt{3} + 21}{3} = 7 + 2\sqrt{3}$$

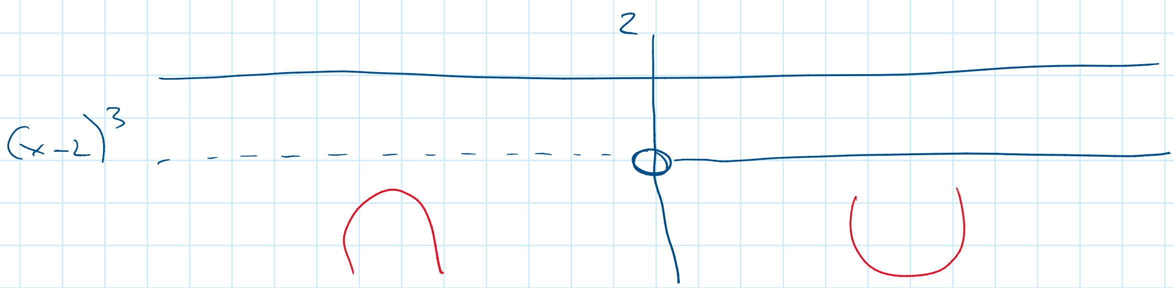
$$f'(x) = \frac{x^2 - 4x + 1}{(x-2)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(2x-4)(x-2)^{\cancel{2}} - (x^2-4x+1)\,2\,\cancel{(x-2)}}{(x-2)^{\cancel{4}\,3}} =$$

$$= 2\,\frac{(x-2)(x-2) - x^2 + 4x - 1}{(x-2)^3} =$$

$$= 2\,\frac{\cancel{x^2} - \cancel{4x} + 4 - \cancel{x^2} + \cancel{4x} - 1}{(x-2)^3} = \frac{6}{(x-2)^3}$$

$f''(x) \gtrless 0$ SSE $(x-2)^3 \gtrless 0$ $x \neq 2$



$$f(x) = e^{\frac{-2x+1}{x-3}} = \exp\left(\frac{-2x+1}{x-3}\right)$$

$$D = \{x \in \mathbb{R} : x - 3 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 3\} = (-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \exp\left(\frac{-2x+1}{x-3}\right) = e^{-2}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{-2x+1}{x-3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x}\left(-2 + \frac{1}{x}\right)}{\cancel{x}\left(1 - \frac{3}{x}\right)} = -2$$

per $x \to +\infty$ $y = e^{-2}$ è AS. ORIZZONTALE

$x\left(1-\frac{3}{x}\right)$

per $x \to +\infty$ $\quad y = e^{-2}$ è AS. ORIZZONTALE

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} \exp\left(\frac{\overbrace{-2x+1}^{\to -5}}{\underbrace{x-3}_{\to 0 \text{ ma è } >0}}\right) = 0$$

per $x \to 3$ $\quad -2x+1 \to -2\cdot 3+1 = -5$ $\quad x-3 \to 0$

ma se considero solo $x \to 3^+$ $\quad \begin{cases} x-3 \to 0 \\ x-3 > 0 \end{cases}$

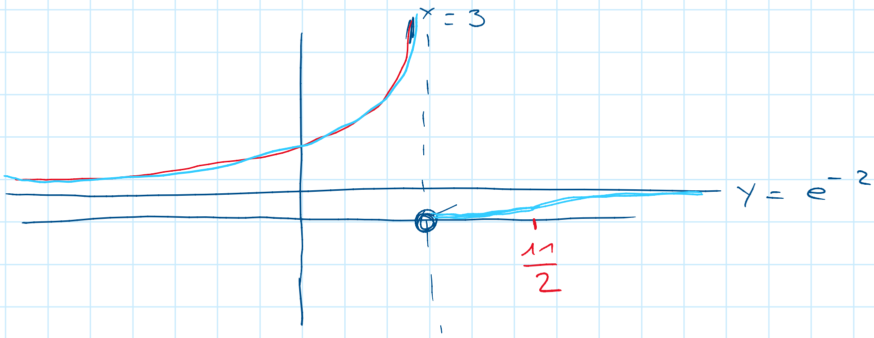
$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} \exp\left(\frac{\overbrace{-2x+1}^{\to -5}}{\underbrace{x-3}_{\to 0 \text{ ma è } <0}}\right) = +\infty$$

$\frac{-2x+1}{x-3} \to +\infty$ per $x \to 3^-$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \exp\left(\frac{-2x+1}{x-3}\right) =$$

$$\lim_{x\to -\infty} \exp\left(\frac{\cancel{x}\left(-2+\frac{1}{x}\right)}{\cancel{x}\left(1-\frac{3}{x}\right)}\right) = e^{-2}$$

$y = e^{-2}$ è AS ORIZZ sia per $x \to +\infty$ che per $x \to -\infty$



f è limitata inf.

$\inf f = 0$

$\nexists$ min ass.

f non è limitata superiormente

$\nexists$ pti stazionari

$$f(x) = \exp\left(\frac{-2x+1}{x-3}\right)$$

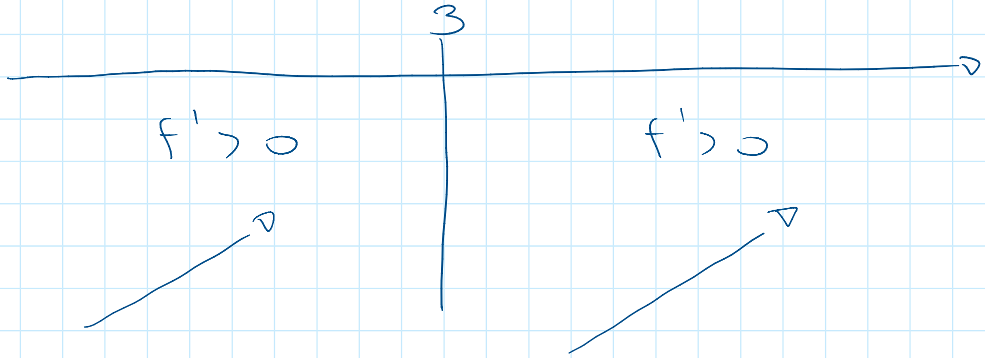
$$f'(x) = \exp\left(\frac{-2x+1}{x-3}\right) \cdot \left(\frac{-2x+1}{x-3}\right)' =$$

$$= \exp\left(\frac{-2x+1}{x-3}\right) \cdot \frac{-2(x-3) - 1(-2x+1)}{(x-3)^2} =$$

$$= \exp\left(\frac{-2x+1}{x-3}\right) \cdot \frac{-\cancel{2x}+6+\cancel{2x}-1}{(x-3)^2}$$

$$= \exp\left(\frac{-2x+1}{x-3}\right) \cdot \frac{5}{(x-3)^2} > 0 \qquad \forall x \in D$$

$f' > 0$



$5(x-3)^{-2}$

$$f''(x) = \left(\exp\left(\frac{-2x+1}{x-3}\right)\right)' \frac{5}{(x-3)^2} + \exp\left(\frac{-2x+1}{x-3}\right)\left(\frac{5}{(x-3)^2}\right)'$$

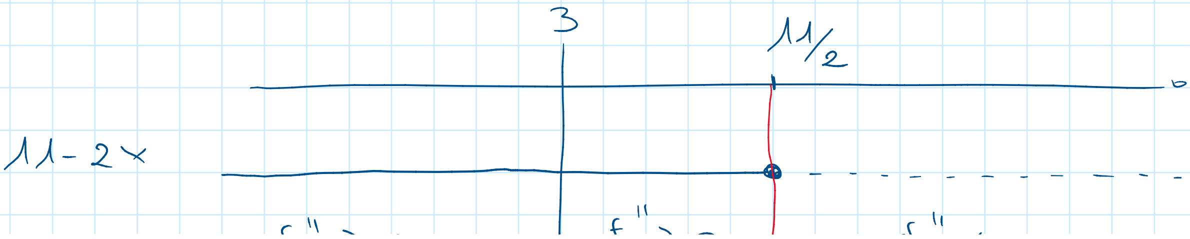
$$= \exp\left(\frac{-2x+1}{x-3}\right) \cdot \frac{5}{(x-3)^2} \cdot \frac{5}{(x-3)^2} + \exp\left(\frac{-2x+1}{x-3}\right)\left(5 \cdot (-2)(x-3)^{-3}\right)$$

$$= \exp\left(\frac{-2x+1}{x-3}\right)\left(\frac{25}{(x-3)^4} - \frac{10}{(x-3)^3}\right) =$$

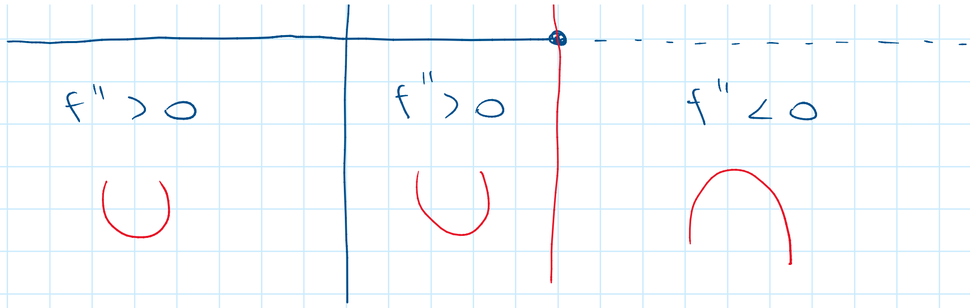
$$= \exp\left(\frac{-2x+1}{x-3}\right) \frac{5}{(x-3)^4}\left(5 - 2(x-3)\right)$$

$$= \underbrace{\exp\left(\frac{-2x+1}{x-3}\right) \frac{5}{(x-3)^4}}_{>0 \ \forall x \in D} \left(5 - 2x + 6\right)$$

$f''(x) \geq 0$ SSE $11 - 2x \geq 0$ $\qquad x = \frac{11}{2}$



11-2x



— o —

$f(x)=\arcsin(x^2-1)$

$-1\le x^2-1\le 1$ $\quad$ $1-1\le x^2-1+1\le 1+1$ $\quad$ $0\le x^2\le 2$ vale $\forall x$

$D=\{x\in\mathbb{R} : x^2\le 2\}=[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$

$f(x)=f(-x)$

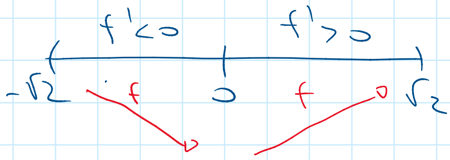
$f(-\sqrt{2})=f(\sqrt{2})=\arcsin(2-1)=\arcsin(1)=\frac{\pi}{2}$

$f(0)=\arcsin(-1)=-\frac{\pi}{2}$

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-(x^2-1)^2}}\cdot 2x=\frac{2x}{\sqrt{\cancel{1}-(x^4-2x^2+\cancel{1})}}=\frac{2x}{\sqrt{2x^2-x^4}}=$$

$$=\frac{2x}{\sqrt{x^2(2-x^2)}}=\frac{2x}{\sqrt{x^2}\sqrt{2-x^2}}=\frac{2x}{|x|\sqrt{2-x^2}}\qquad x\neq 0$$

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{\sqrt{2-x^2}} & x\in(0,\sqrt{2})\\[2ex] \dfrac{-2}{\sqrt{2-x^2}} & x\in(-\sqrt{2},0)\end{cases}$$



$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}f'(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{2}{\sqrt{2-x^2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}f'(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{-2}{\sqrt{2-x^2}}=-\sqrt{2}$$

$x_0=0$ è p.to angoloso ed è l'unico p.to di minimo

$x_0 = 0$ è pto angoloso ed è l'unico pto di minimo assoluto, $f(0) = -\frac{\pi}{2}$ è il min assoluto

$x_1 = -\sqrt{2}$ e $x_2 = \sqrt{2}$ sono pti di max assoluto e
$f(-\sqrt{2}) = f(\sqrt{2}) = \frac{\pi}{2}$ è il max assoluto

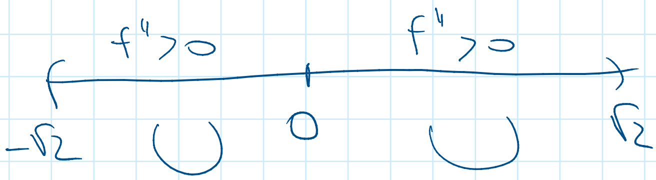
∄ altri pti di estremo relativo

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{2-x^2}} & x \in (0, \sqrt{2}) \\[2ex] \dfrac{-2}{\sqrt{2-x^2}} & x \in (-\sqrt{2}, 0) \end{cases}$$

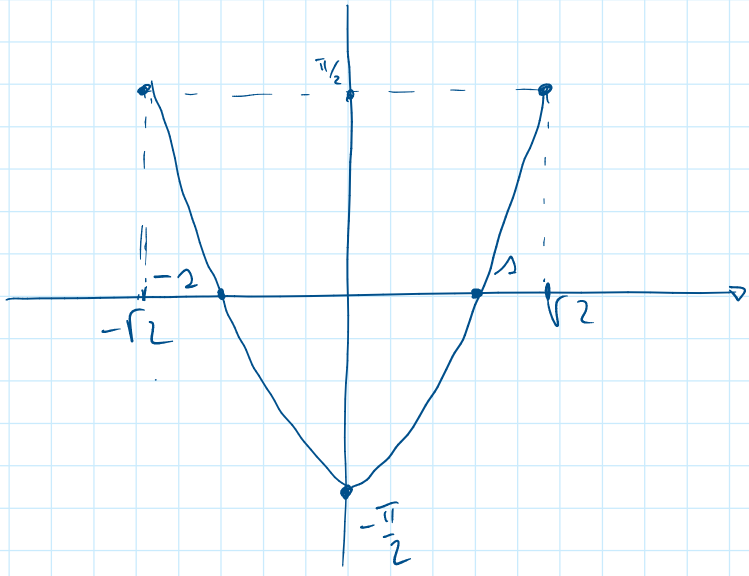
$x \in (0, \sqrt{2})$ $\qquad f'(x) = \dfrac{2}{\sqrt{2-x^2}} = 2\,(2-x^2)^{-1/2}$

$$f''(x) = 2 \cdot \cancel{-\tfrac{1}{2}}\,(2-x^2)^{-\frac{1}{2}-1}\,(\cancel{-2}x) = 2x\,(2-x^2)^{-3/2}$$

$$f''(x) = \begin{cases} 2x\,(2-x^2)^{-3/2} & x \in (0, \sqrt{2}) \\ -2x\,(2-x^2)^{-3/2} & x \in (-\sqrt{2}, 0) \end{cases}$$



$f(x) = 0$ $\qquad \arctan(x^2-1) = 0$ $\qquad x^2 - 1 = 0$ $\qquad x = 1 \;\vee\; x = -1$



—o—

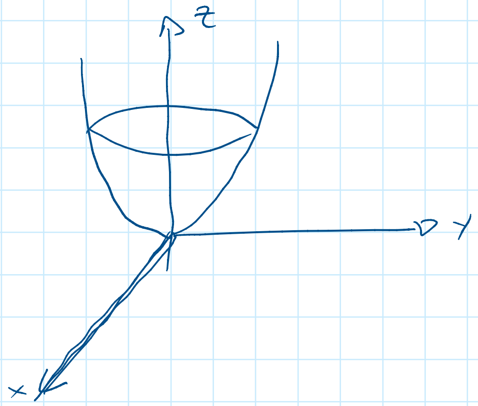
$$f:(x,y)\in A\subseteq\mathbb{R}^2 \longmapsto f(x,y)\in\mathbb{R}$$

$$Gr(f)=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (x,y)\in A ;\ z=f(x,y)\}$$

$c\in\mathbb{R}$ $\quad L_c=\{(x,y)\in A : f(x,y)=c\}$

ESEMPIO $\quad f(x,y)=x^2+y^2$

$A=\mathbb{R}^2$



$f(x,0)=x^2$

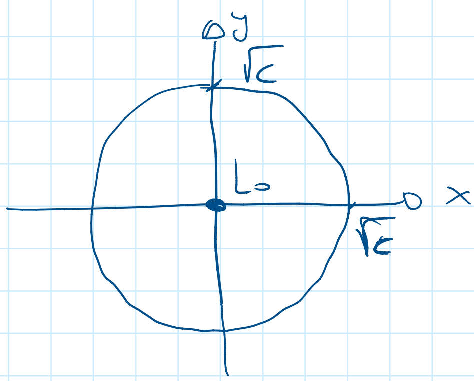
$f(0,y)=y^2$

$c\in\mathbb{R}$ $\quad (x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=c$

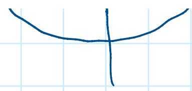
$c<0$ $\quad L_c=\emptyset$

$c=0$ $\quad L_0=\{(0,0)\}$

$c>0$ $\quad L_c$ = circonferenza centrata in $(0,0)$



$c>0$ $\quad L_c$ = circonferenza centrata in $(0,0)$ e raggio $\sqrt{c}$



$x_0\in\mathbb{R}$ e $\delta>0$ $\quad (x_0-\delta, x_0+\delta)=\{x\in\mathbb{R} : x_0-\delta<x<x_0+\delta\}$

$$=\{x\in\mathbb{R} : -\delta<x-x_0<\delta\}$$
$$=\{x\in\mathbb{R} : |x-x_0|<\delta\}$$
$$=\{x\in\mathbb{R} : \sqrt{(x-x_0)^2}<\delta\}$$

$(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ $\delta>0$ $\quad U_\delta(x_0,y_0):=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}$

$$=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\delta^2\}$$

Cerchio di centro (x_0,y_0) e raggio δ

DEF Sia $A\subseteq\mathbb{R}^2$ e sia $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$.
Dico che (x_0,y_0) è interno ad A se $\exists\,\delta>0$ t.c. $U_\delta(x_0,y_0)\subset A$.
L'insieme dei pti interni ad A si chiama INTERNO DI A
$\mathrm{int}(A)$ o $\mathring{A}$. Ovviamente $\mathrm{int}(A)\subseteq A$

Dico che (x_0,y_0) è esterno ad A se (x_0,y_0) è interno a $\mathbb{R}^2\setminus A$. L'insieme dei pti esterni si dice ESTERNO DI A e si indica $\mathrm{ext}(A)$.

Dico che (x_0,y_0) è un pto di frontiera di A se $\forall \delta>0$ l'intorno $U_\delta(x_0,y_0)$ contiene sia pti di A che pti di $\mathbb{R}^2 \setminus A$.

L'insieme dei pti di frontiera di A si chiama FRONTIERA DI A e si indica ∂A

L'unione di A e ∂A si dice CHIUSURA DI A e si indica $\overline{A}$.

$$\text{int}(A) \subseteq A \subseteq \overline{A}$$

$\text{int}(A)$, $\text{ext}(A)$ e ∂A sono a due a due disgiunti

$$\text{int}(A) \cup \text{ext}(A) \cup \partial A = \mathbb{R}^2$$

Def INSIEME APERTO

$A \subseteq \mathbb{R}^2$ si dice aperto se $\forall (x_0,y_0) \in A$ $\exists \delta>0$ t.c. $U_\delta(x_0,y_0) \subseteq A$

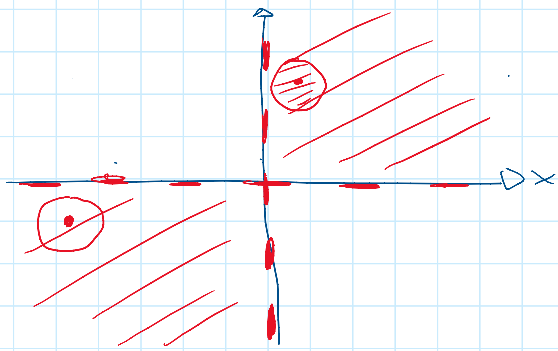
ovvero A è aperto SSE $A = \text{int}(A)$

Def INSIEME CHIUSO

$A \subseteq \mathbb{R}^2$ si dice chiuso se $\mathbb{R}^2 \setminus A$ è aperto

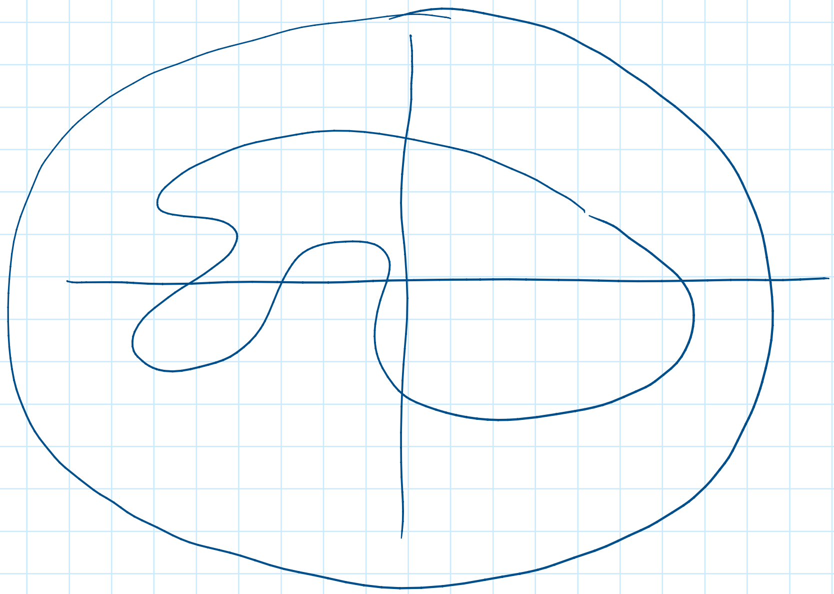
Si può dimostrare che A è chiuso SSE $A = \overline{A}$

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 0\}$$



Def INSIEME LIMITATO

$A \subseteq \mathbb{R}^2$ si dice LIMITATO se $\exists R>0$ t.c. $A \subseteq U_R(0,0)$



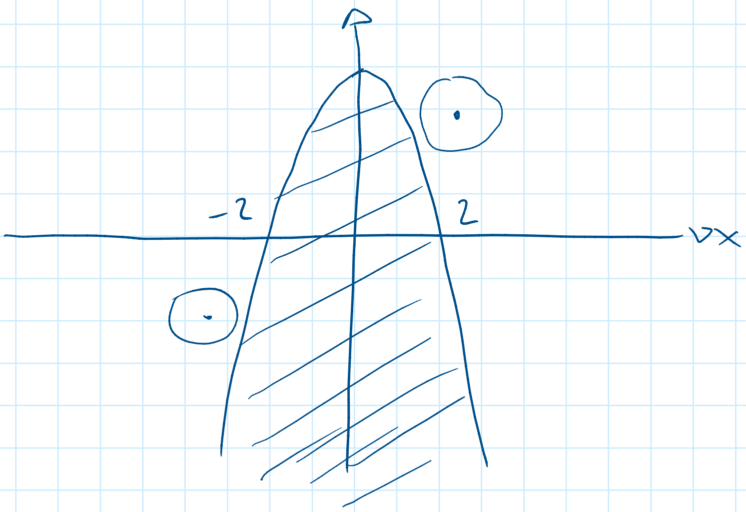
Se A non è limitato, dico che A è illimitato.

— o —

$f : (x,y) \in A \subseteq \mathbb{R}^2 \longmapsto f(x,y) \in \mathbb{R}$

$f(x,y) = \sqrt{4-y-x^2}$

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4-y-x^2 \geq 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 4-x^2\}$



$y = 4-x^2$

V $x=0$ $y=4$

$y=0 \Leftrightarrow x=2 \vee x=-2$

$\mathbb{R}^2 \setminus D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 4-x^2\}$ è aperto

$\Rightarrow D$ è chiuso

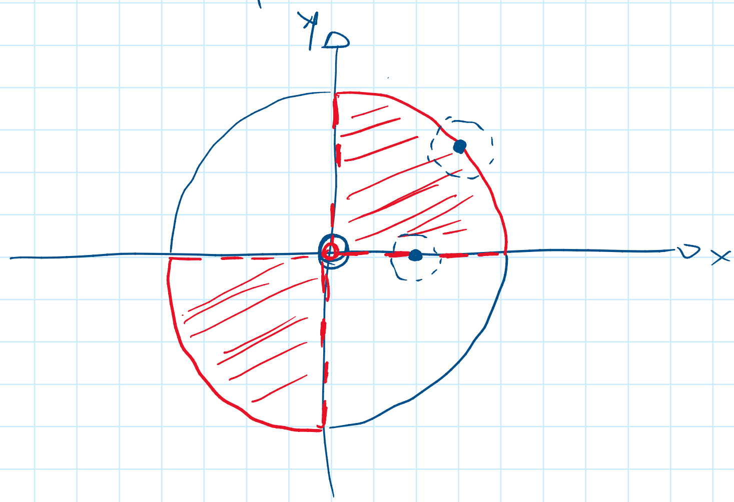
$$f(x,y) = \frac{\log(xy)}{\arcsin\left(\frac{x^2+y^2}{4}\right)}$$

vero $\forall (x,y)$

$$\begin{cases} xy > 0 \\ -1 \le \frac{x^2+y^2}{4} \le 1 \\ \arcsin\left(\frac{x^2+y^2}{4}\right) \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy > 0 \\ x^2+y^2 \le 4 \\ \frac{x^2+y^2}{4} \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy > 0 \\ x^2+y^2 \le 4 \\ x^2+y^2 \neq 0 \\ (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$



$$f(x,y) = \frac{\sqrt{x+y}}{\log(1-x^2+y)}$$

$$\begin{cases} x+y \ge 0 \\ 1-x^2+y > 0 \\ \log(1-x^2+y) \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \ge -x \\ y > x^2-1 \\ 1-x^2+y \neq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \ge -x \\ y > x^2-1 \\ y \neq x^2 \end{cases}$$