giovedì 12 marzo 2020 17:24

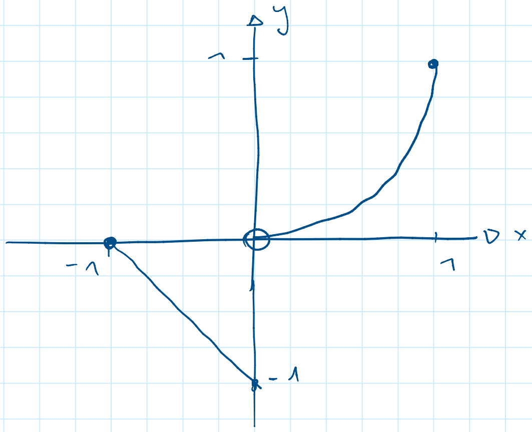
**Teorema** Sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ funzione monotona.

Allora: $\forall c\in(a,b)$ esistono finiti

$$\lim_{x\to c^-} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x\to c^+} f(x)$$

Inoltre esistono $\lim_{x\to a^+} f(x)$ e $\lim_{x\to b^-} f(x)$

ESEMPIO




$$f(x)=\begin{cases} -1-x & x\in[-1,0] \\ x^2 & x\in(0,1] \end{cases}$$

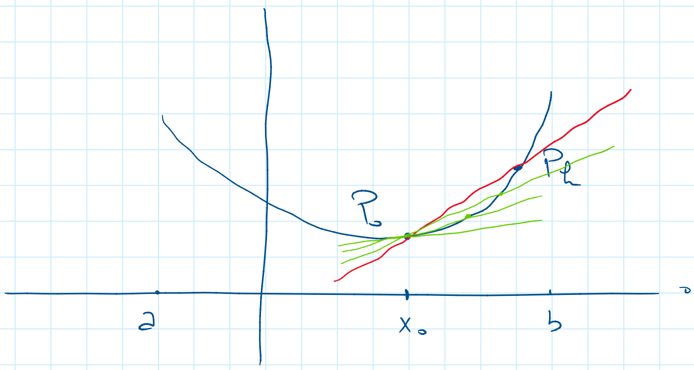
**Teorema** Sia $I\subset\mathbb{R}$ intervallo e sia $f:I\to\mathbb{R}$ una funzione continua. Allora

$f$ è invertibile SSE è strettamente monotona.

In tal caso la funzione inversa $g:f(I)\to I$ è anch'essa continua e strettamente monotona.

---

Sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ e sia $x_0\in(a,b)$




$P_0\equiv(x_0, f(x_0))$

$h\neq 0$

$x_0+h\in(a,b)$

$P_h\equiv(x_0+h, f(x_0+h))$

$$\frac{y-f(x_0)}{f(x_0+h)-f(x_0)}=\frac{x-x_0}{\cancel{x_0}+h-\cancel{x_0}}$$

$$y = f(x_0) + \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}(x - x_0)$$

$P_0(x_0, f(x_0))$ $\qquad m = \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ RAPPORTO INCREMENTALE

$\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ se questo limite esiste

DEFINIZIONE Sia $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in (a,b)$

Dico che la funzione $f$ è derivabile in $x_0$ se $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ esiste ed è finito.

In tal caso il valore del limite si dice DERIVATA DI $f$ in $x_0$.

Lo si indica $f'(x_0)$ $\quad \left.\dfrac{df}{dx}\right|_{x=x_0}$ $\quad Df(x_0)$ $\quad \dot{f}(x_0)$

La retta di equazione $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ si dice RETTA TANGENTE AL GRAFICO DI $f$ NEL PTO $(x_0, f(x_0))$.

Se $f$ è derivabile in ogni pto $x_0 \in (a,b)$ dico che $f$ è una funzione derivabile. È ben definita la funzione

$$f' : x \in (a,b) \mapsto f'(x) \in \mathbb{R}.$$

Preso $x_0 \in (a,b)$ posso guardare se $f'$ è derivabile in $x_0$ cioè se esiste $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f'(x_0+h) - f'(x_0)}{h}$

Se questo limite esiste ed è finito lo chiamo derivata seconda di $f$ nel pto $x_0$.

Lo indichiamo $f''(x_0)$ $\quad \left.\dfrac{d^2f}{dx^2}\right|_{x=x_0}$ $\quad D^2f(x_0)$ $\quad \ddot{f}(x_0)$

$$f'' : x \in (a,b) \mapsto f''(x) \in \mathbb{R}$$

$n \in \mathbb{N}$ $\qquad f^{(n)}(x_0)$ $\qquad \left.\dfrac{d^nf}{dx^n}\right|_{x=x_0}$ $\qquad D^nf(x_0)$

---

$f$ funzione costante $\qquad f : x \in \mathbb{R} \mapsto c \in \mathbb{R}$

$f(x+h) - f(x)$ $\qquad c - c$

f funzione costante $\quad f: x \in \mathbb{R} \mapsto c \in \mathbb{R}$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{c-c}{h} = 0 \qquad \forall h \neq 0 \qquad f'(x) = 0$$

f funzione identità $\quad f: x \in \mathbb{R} \mapsto x \in \mathbb{R}$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)-x}{h} = 1 \qquad \forall h \neq 0 \qquad f'(x) = 1$$

$f(x) = x^2$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{\cancel{x^2} + 2hx + h^2 - \cancel{x^2}}{h} = \frac{h(2x+h)}{h} =$$

$$= 2x + h \qquad \forall h \neq 0 \qquad\qquad f'(x) = 2x$$

$f(x) = x^\alpha \qquad \alpha \neq 0 \qquad x \in (0, +\infty)$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^\alpha - x^\alpha}{h} = \frac{\left(x\left(1+\frac{h}{x}\right)\right)^\alpha - x^\alpha}{h} =$$

$$= \frac{x^\alpha \left(1+\frac{h}{x}\right)^\alpha - x^\alpha}{h} = x^\alpha \frac{\left(1+\frac{h}{x}\right)^\alpha - 1}{h} \qquad s = \frac{h}{x}$$

$h \to 0 \quad sse \quad s \to 0$

$$= \frac{x^\alpha (1+s)^\alpha - 1}{sx} = x^{\alpha-1} \underbrace{\frac{(1+s)^\alpha - 1}{s}}_{\to\, \alpha \text{ quando } s \to 0}$$

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha - 1}$$

$f(x) = \sin(x) \qquad\qquad f'(x) = \cos(x) \quad \leftarrow$

$g(x) = \cos(x) \qquad\qquad g'(x) = -\sin(x)$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = \frac{\sin(x)\cos(h) + \cos(x)\sin(h) - \sin(x)}{h}$$

$$= \frac{\sin(x)\left(\cos(h) - 1\right)}{h} + \cos(x)\frac{\sin(h)}{h}$$

$$= -\sin(x) \underbrace{\frac{1-\cos(h)}{h^2}}_{\to\, \frac{1}{2}} \underbrace{h}_{\downarrow\, 0} + \cos(x) \underbrace{\frac{\sin(h)}{h}}_{\to\, 1} \xrightarrow{h \to 0} \cos(x)$$

$f(x) = e^x \qquad f'(x) = e^x$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{e^{x+h}-e^x}{h} = \frac{e^x \cdot e^h - e^x}{h} = \frac{e^x(e^h-1)}{h} =$$

$$= e^x \cdot \underbrace{\frac{e^h-1}{h}}_{\to 1 \text{ quando } h \to 0} \longrightarrow e^x$$

$f(x) = \log(x) \qquad f'(x) = \frac{1}{x}$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\log(x+h)-\log(x)}{h} = \frac{\log\left(x\left(1+\frac{h}{x}\right)\right)-\log(x)}{h}$$

$$= \frac{\cancel{\log(x)} + \log\left(1+\frac{h}{x}\right) - \cancel{\log(x)}}{h} \qquad s = \frac{h}{x} \qquad h \to 0 \text{ sse } s \to 0$$

$$= \frac{\log(1+s)}{sx} = \frac{1}{x} \underbrace{\frac{\log(1+s)}{s}}_{\to 1 \text{ quando } s \to 0} \longrightarrow \frac{1}{x}$$

ESEMPIO Sia $f(x) = \log(x)$ $x > 0$

Calcolare la retta tangente al grafico nel punto $(2, f(2))$

$f(2) = \log(2)$

$f'(x) = \frac{1}{x} \qquad f'(2) = \frac{1}{2}$

$$y = f(2) + f'(2)(x-2) \qquad y = \log(2) + \frac{1}{2}(x-2)$$

OSSERVAZIONE $f(x) = |x|$ $x_0 = 0$

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{f(h)}{h} = \frac{|h|}{h} = \begin{cases} 1 & h > 0 \\ -1 & h < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = 1 \qquad \lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = -1$$

DEFINIZIONE Sia $f: (a,b) \to \mathbb{R}$. Sia $x_0 \in (a,b)$.

Se $\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ e $\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

esistono e sono finiti, dico che $x_0$ è un pto angoloso.
Il limite destro si dice derivata destra e si indica

$$f'_+(x_0) \quad o \quad f'(x_0^+)$$

Il limite sinistro si dice derivata sinistra e si indica

$$f'_-(x_0) \quad o \quad f'(x_0^-)$$

— o —

DEFINIZIONE Se $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ esiste ma vale $+\infty$ o $-\infty$, dico che $x_0$ è un flesso a tangente verticale

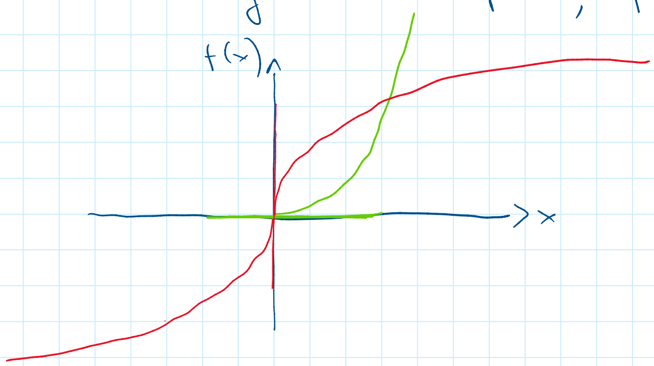
ESEMPIO Definiamo $sgn(x) = \begin{cases} 1 & x>0 \\ 0 & x=0 \\ -1 & x<0 \end{cases}$

$$f(x) = sgn(x)\sqrt{|x|} \qquad x_0 = 0$$

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{f(h)}{h} = \frac{sgn(h)\sqrt{|h|}}{h} = \frac{\sqrt{|h|}}{|h|} =$$

$$= |h|^{-1/2} \longrightarrow +\infty \quad \text{quando } h \to 0$$

$f$ è una funzione dispari, per $x \geq 0$ $f(x) = \sqrt{x}$




DEFINIZIONE Se $\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ e $\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

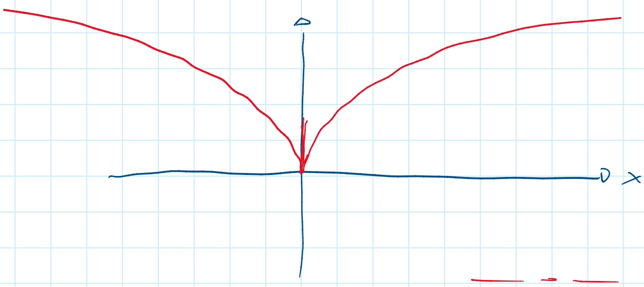
esistono entrambi e sono infiniti di segno opposto, dico che in $x_0$ si ha una cuspide

ESEMPIO $f(x) = \sqrt{|x|}$ $\qquad x_0 = 0$

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{f(h)}{h} = \frac{\sqrt{|h|}}{h} = \frac{\sqrt{|h|}}{sgn(h)\cdot|h|} =$$

$$= sgn(h)\,|h|^{-1/2} \longrightarrow \begin{cases} +\infty & h \to 0^+ \\ \dots & \dots - \end{cases}$$

$$= \mathrm{sgn}(h)\,|h|^{-1/2} \longrightarrow \begin{cases} +\infty & h \to 0^+ \\ -\infty & h \to 0^- \end{cases}$$



— o —

Se $f : [a,b) \to \mathbb{R}$

$x_0 = a$ $\qquad \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ è ben definito solo per $h>0$

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Se esiste infinito dico anche che il grafico di $f$ ha tangente verticale in $a$.

— o —

$f(x) = \sqrt{|x|}$ $\quad x \in \mathbb{R}$, è continua ma in $x_0 = 0$ non è derivabile

**Teorema** Sia $f : (a,b) \to \mathbb{R}$. Sia $x_0 \in (a,b)$ e supponiamo che $f$ sia derivabile in $x_0$. Allora $f$ è continua in $x_0$

**DIM** $f$ è continua in $x_0$ SSE

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0 \qquad h := x - x_0$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad x = x_0 + h$$

$$\lim_{h \to 0} (f(x_0+h) - f(x_0)) = 0 \qquad x \to x_0 \text{ SSE } h \to 0$$

$$h \neq 0 \quad f(x_0+h) - f(x_0) = \underbrace{\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}_{\to f'(x_0)} \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{h} \longrightarrow 0$$

quando $h \to 0$

— o —

**Proprietà** Siano $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$, derivabili in un pto $x_0 \in (a,b)$

Allora 1) $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

2) $(f-g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0)$

3) $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$

In particolare se $g(x) \equiv c$

$$(cf)'(x_0) = cf'(x_0) \quad \left(\text{dato che } g'(x_0)=0\right)$$

Inoltre, se $g(x_0) \neq 0$ allora

4) $$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = \frac{-g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

5) $$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - g'(x_0)f(x_0)}{g^2(x_0)}$$

DIM 1) $$\frac{(f+g)(x_0+h)-(f+g)(x_0)}{h} = \underbrace{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}_{\downarrow \ f'(x_0) \text{ per } h\to 0} + \underbrace{\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}}_{\downarrow \ g'(x_0) \text{ per } h\to 0}$$

2) Analogo

3) $$\frac{(fg)(x_0+h)-(fg)(x_0)}{h} =$$

$$= \frac{f(x_0+h)g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0+h) + f(x_0)g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0)}{h}$$

$$= \underbrace{g(x_0+h)}_{\downarrow \ g(x_0)} \underbrace{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}_{\to f'(x_0)} + f(x_0)\underbrace{\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}}_{\to g'(x_0)} \qquad h\to 0$$

$$\longrightarrow f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

4) $g(x_0) \neq 0 \qquad g(x) \neq 0 \quad \forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta), \ \delta > 0$

$$\frac{\left(\frac{1}{g}\right)(x_0+h) - \left(\frac{1}{g}\right)(x_0)}{h} = \frac{g(x_0)-g(x_0+h)}{h\, g(x_0)\, g(x_0+h)} =$$

$$= \underbrace{\frac{-1}{g(x_0)g(x_0+h)}}_{\to \frac{-1}{g^2(x_0)}} \underbrace{\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}}_{\to g'(x_0)} \longrightarrow \frac{-g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

$g^2(x_0)$

5) $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = f(x)\left(\frac{1}{g}\right)(x)$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = f'(x_0)\left(\frac{1}{g}\right)(x_0) + f(x_0)\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0)$$

$$= \frac{f'(x_0)}{g(x_0)} + f(x_0)\frac{-g'(x_0)}{g^2(x_0)} = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

## REGOLA DELLA CATENA

Sia $f:(a,b) \to (c,d)$ e sia $g:(c,d) \to \mathbb{R}$

Sia $x_0 \in (a,b)$ e sia $y_0 = f(x_0)$

Se $f$ è derivabile in $x_0$ e $g$ è derivabile in $y_0$, allora la funzione composta

$$g \circ f : x \in (a,b) \longmapsto g(f(x)) \in \mathbb{R}$$

è derivabile in $x_0$ e $(g\circ f)'(x_0) = g'(y_0) f'(x_0)$

cioè $(g\circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))\, f'(x_0)$.

DIM $\dfrac{(g\circ f)(x_0+h) - (g\circ f)(x_0)}{h}$

$k := f(x_0+h) - f(x_0)$

$k \to 0$ quando $h \to 0$

$$g'(y_0) = \lim_{k\to 0} \frac{g(y_0+k) - g(y_0)}{k}$$

$$\lim_{k\to 0}\Bigg(\underbrace{\frac{g(y_0+k)-g(y_0)}{k} - g'(y_0)}_{:=\varepsilon(k)}\Bigg) = 0$$

cioè posto $\varepsilon(k) := \dfrac{g(y_0+k)-g(y_0)}{k} - g'(y_0)$

$\lim_{k\to 0} \varepsilon(k) = 0$

$$\frac{g(y_0+k) - g(y_0)}{k} = g'(y_0) + \varepsilon(k)$$

$\longrightarrow g(y_0+k) - g(y_0) = k\, g'(y_0) + k\,\varepsilon(k) \quad \leftarrow$ vale anche se $k=0$

$(g\circ f)(x_0+h) - (g\circ f)(x_0) = g(f(x_0+h)) - g(f(x_0)) =$ $\quad k := f(x_0+h)$ $f(\ldots)$

$$(g\circ f)(x_0+h)-(g\circ f)(x_0) = g(f(x_0+h)) - g(f(x_0)) =$$ $k := f(x_0+h) - f(x_0)$

$$= g(f(x_0)+k) - g(f(x_0)) =$$

$$= g(y_0+k) - g(y_0) = k\, g'(y_0) + k\,\varepsilon(k)$$

$$\frac{(g\circ f)(x_0+h) - (g\circ f)(x_0)}{h} = \frac{k}{h}\left(g'(y_0)+\varepsilon(k)\right) =$$

$$= \underbrace{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}_{\to f'(x_0) \text{ per } h\to 0}\Big(g'(y_0)+\underbrace{\varepsilon(k)}_{\to 0 \text{ per } h\to 0}\Big) \longrightarrow f'(x_0)\,g'(y_0)$$

$h(x) = a^x \qquad a>0 \quad a\neq 1$

$$a = e^{\log(a)} \qquad a^x = \left(e^{\log(a)}\right)^x = e^{x\log(a)}$$

$$f(x) = x\cdot \log(a) \qquad g(y) = e^y \qquad h(x) = g(f(x))$$

$$h'(x) = g'(f(x))\,f'(x) = e^{f(x)}\cdot \log(a)\cdot 1 = e^{x\cdot\log(a)}\cdot\log(a)$$

$$= \log(a)\cdot a^x$$

$h(x) = \log_a(x) \qquad a>0 \quad a\neq 1$

$$\log_a(x) = \frac{\log(x)}{\log(a)} = \underbrace{\frac{1}{\log(a)}}\cdot\underbrace{\log(x)}$$

$$\left(\log_a(x)\right)' = \frac{1}{\log(a)}\cdot\frac{1}{x}$$

**Teorema** Sia $f:(a,b)\to(c,d)$ continua e invertibile e sia $g:(c,d)\to(a,b)$ la funzione inversa di $f$.
Sia $x_0\in(a,b)$ t.c. $f$ è derivabile in $x_0$ e $f'(x_0)\neq 0$.
Allora $g$ è derivabile nel pto $y_0 := f(x_0)$ e

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \left.\frac{1}{f'(x)}\right|_{x=g(y_0)}$$

**DIM** $\dfrac{g(y_0+k)-g(y_0)}{k}$ $\qquad h := g(y_0+k) - g(y_0)$, DIM $\dfrac{g(y_0+k)-g(y_0)}{k}$  $\qquad h := g(y_0+k)-g(y_0)$

$$g(y_0+k) = g(y_0)+h = x_0+h$$

$$y_0+k = f(g(y_0+k)) = f(x_0+h)$$

$$k = f(x_0+h)-y_0 = f(x_0+h)-f(x_0)$$

$$\frac{\cancel{x_0}+h-\cancel{x_0}}{f(x_0+h)-f(x_0)} = \frac{1}{\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}} \longrightarrow \frac{1}{f'(x_0)}$$

$\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \longrightarrow f'(x_0)$

quando $k \to 0$ anche $h \to 0$

ESEMPIO $\quad \sin : x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \longmapsto \sin(x) \in [-1,1]$

$(\sin)'(x) = \cos(x)$

$\operatorname{asin} : [-1,1] \longrightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$$\frac{d}{dy}\arcsin(y) = \frac{1}{(\sin)'(x)}\Big|_{x=\arcsin(y)} = \frac{1}{\cos(x)}\Big|_{x=\arcsin(y)} \qquad x \in (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}) \quad y \in (-1,1)$$

$\cos^2(x)+\sin^2(x) = 1 \qquad \cos^2(x) = 1-\sin^2(x) = 1-y^2$

$\cos(x) = \sqrt{1-y^2}$

$\cancel{\cos(x) = -\sqrt{1-y^2}}$

$x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \cos(x) > 0$

$$\frac{d}{dy}\arcsin(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

$\cos : x \in [0,\pi] \longmapsto \cos(x) \in [-1,1]$

$\arccos : [-1,1] \longrightarrow [0,\pi]$

$$\frac{d}{dy}\arccos(y) = \frac{1}{(\cos)'(x)}\Big|_{x=\arccos(y)} = \frac{1}{-\sin(x)}\Big|_{x=\arccos(y)}$$

$\cos^2(x)+\sin^2(x) = 1 \qquad \sin^2(x) = 1-\cos^2(x) = 1-y^2$

$\sin(x) = \sqrt{1-y^2}$

$\cancel{\sin(x) = -\sqrt{1-y^2}}$

$x \in (0,\pi) \Rightarrow \sin(x) > 0$

$$\frac{d}{dy}\arccos(y) = \frac{1}{-\sqrt{1-y^2}} = \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}}$$

$f(x) = \tan(x) \qquad x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2} \quad k \in \mathbb{Z}$

$f(x) = \tan(x) \qquad x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \qquad f'(x) = \frac{(\sin)'(x)\cos(x) - (\cos)'(x)\sin(x)}{\cos^2(x)} =$$

$$= \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

$\tan : x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \mapsto \tan(x) \in \mathbb{R}$

$\arctan : \mathbb{R} \longrightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$$\frac{d}{dy}\arctan(y) = \frac{1}{(\tan)'(x)}\bigg|_{x=\arctan(y)} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2(x)}}\bigg|_{x=\arctan(y)}$$

$$= \cos^2(x)\Big|_{x=\arctan(y)}$$

$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$

$$1 + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} \qquad 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

$$\cos^2(x) = \frac{1}{1+\tan^2(x)} = \frac{1}{1+y^2}$$

$$\frac{d}{dy}\arctan(y) = \frac{1}{1+y^2}$$