LIMITE, LIMITE DESTRO E LIMITE SINISTRO.

$x \to c \quad c \in \mathbb{R}$

$\lim_{x \to c} f(x) = L$ se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ T.c. $\forall x \in I \cap (c-\delta, c+\delta), \ x \neq c$

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

$\lim_{\substack{x \to c^+ \\ x \to c^-}} f(x) = L$ se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ T.c. $\forall x \in I \cap \underbrace{(c, c+\delta)}_{(c-\delta, c)}$

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

TEOREMA Sia $f : I \to \mathbb{R}$, sia $c \in I$ o un suo estremo

Allora $\lim_{x \to c} f(x)$ esiste se e solo se esistono $\lim_{x \to c^+} f(x)$ e $\lim_{x \to c^-} f(x)$ e questi sono uguali

In tal caso il valore del limite è uguale al comune valore dei due limiti unilaterali.

REGOLE ALGEBRICHE

Sia $f, g : I \to \mathbb{R}$, sia $c \in I$ o un estremo di I

e supponiamo che esistano finiti

$$\lim_{x \to c} f(x) = L \in \mathbb{R} \qquad \lim_{x \to c} g(x) = M \in \mathbb{R}$$

Allora $\lim_{x \to c} (f+g)(x) = L + M$

$\lim_{x \to c} (f-g)(x) = L - M$

$\lim_{x \to c} (fg)(x) = LM$

$\lim_{x \to c} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{L}{M}$ purché $M \neq 0$

($x \to +\infty$
$x \to -\infty$
analoghi risultati)

Supponiamo che $\lim_{x\to c} f(x) = +\infty$ $\lim_{x\to c} g(x) = M \in \mathbb{R}$

Allora $\lim_{x\to c} (f+g)(x) = +\infty$

$\lim_{x\to c} (f-g)(x) = +\infty$

$$\lim_{x\to c} (fg)(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } M>0 \\ -\infty & \text{se } M<0 \\ \text{forma indeterminata} & \text{se } M=0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to c} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } M>0 \\ -\infty & \text{se } M<0 \\ +\infty & \text{se } M=0 \text{ e } g(x)>0 \\ -\infty & \text{se } M=0 \text{ e } g(x)<0 \end{cases}$$

$c=0$ $f(x) = \frac{1}{x^2}$ $g(x) = x^2$

$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ $\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} x^2 = 0$

$(fg)(x) = \frac{1}{x^2} \cdot x^2 = 1 \quad \forall x \neq 0$

$\lim_{x\to 0} (fg)(x) = \lim_{x\to 0} 1 = 1$

$c=0$ $f(x) = \frac{1}{x^2}$ $g(x) = x^4$

$\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$ $\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} x^4 = 0$

$(fg)(x) = \frac{1}{x^2} \cdot x^4 = x^2 \quad \forall x \neq 0$

$\lim_{x\to 0} (fg)(x) = \lim_{x\to 0} x^2 = 0$

TEOREMA DEL CONFRONTO (o dei due carabinieri)

Sia $I \subset \mathbb{R}$, siano $f, g, h : I \to \mathbb{R}$ t.c.

Sia $I \subset \mathbb{R}$, siano $f, g, h : I \to \mathbb{R}$ t.c.

1) $f(x) \le g(x) \le h(x) \quad \forall x \in I$

2) esistono e sono uguali il $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} h(x)$

Sia L il loro comune valore.

<u>Allora</u> $\exists \lim_{x \to c} g(x) = L$

Dim (nel caso L finito)

So che $\lim_{x \to c} f(x) = L$

cioè so che $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_1 > 0$ t.c. $\forall x \in I \cap (c - \delta_1, c + \delta_1) \quad x \ne c$

$$L - \varepsilon \le f(x) \le L + \varepsilon$$

So che $\lim_{x \to c} h(x) = L$

so che $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_2 > 0$ t.c. $\forall x \in I \cap (c - \delta_2, c + \delta_2), \ x \ne c$

$$L - \varepsilon \le h(x) \le L + \varepsilon$$

Fisso $\varepsilon > 0$ e sia $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$

$\forall x \in I \cap (c - \delta, c + \delta) \quad x \ne c$ so che

$$L - \varepsilon \le f(x) \le g(x) \le h(x) \le L + \varepsilon$$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ t.c. $\forall x \in I \cap (c - \delta, c + \delta), \ x \ne c$

$$L - \varepsilon \le g(x) \le L + \varepsilon$$

Cioè $\lim_{x \to c} g(x) = L \qquad \boxtimes$

Corollario Sia $I \subseteq \mathbb{R}$, siano $g, h : I \to \mathbb{R}$ t.c.

1) $\lim_{x \to c} g(x) = 0$

2) $|h(x)| \leq g(x) \quad \forall x \in I$

Allora $\lim_{x \to c} h(x) = 0$

TEOREMA Sia $I \subseteq \mathbb{R}$, siano $f, g : I \to \mathbb{R}$ t.c.

1) $\lim_{x \to c} f(x) = 0$

2) $\exists M \in \mathbb{R}$ t.c. $|g(x)| \leq M \quad \forall x \in I$

Allora
$$\lim_{x \to c} (fg)(x) = 0$$

1° TEOREMA DI PERMANENZA DEL SEGNO

Sia $f : I \to \mathbb{R}$, $c \in I$ o un estremo di I.

Se $\lim_{x \to c} f(x) = L > 0$ o vale $+\infty$, allora

$\exists \delta > 0$ t.c. $f(x) > 0 \quad \forall x \in (c-\delta, c+\delta) \cap I, \ x \neq c$

DIM (nel caso $L > 0$)

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ t.c. $\forall x \in I \cap (c-\delta, c+\delta), \ x \neq c$

$$L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$$

Scelgo $\varepsilon = \frac{L}{2}$: $\exists \delta > 0$ t.c. $\forall x \in I \cap (c-\delta, c+\delta), \ x \neq c$

$$f(x) > L - \frac{L}{2} = \frac{L}{2} > 0 .$$

2° TEOREMA DI PERMANENZA DEL SEGNO

Sia $I \subset \mathbb{R}$, sia $f : I \to \mathbb{R}$, sia $c \in I$ o un suo estremo

Supponiamo che esista il $\lim_{x \to c} f(x)$ e che

$\exists \delta > 0$ t.c. $f(x) > 0 \quad \forall x \in I \cap (c-\delta, c+\delta), \ x \neq c$

Supponiamo che esiste il $\lim_{x \to c} f(x)$ e che

$\exists \delta > 0$ t.c. $f(x) \geq 0$ $\forall x \in I \cap (c-\delta, c+\delta)$, $x \neq c$

Allora il valore del limite è un reale non negativo oppure $+\infty$.

(DIMOSTRAZIONE PER ESERCIZIO)

—— o ——

CONTINUITÀ

I intervallo, $c \in I$ e sia $f: I \to \mathbb{R}$.

Dico che f è continua in c se $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$.

Se f è continua in ogni p.to $c \in I$, dico che f è una funzione continua.

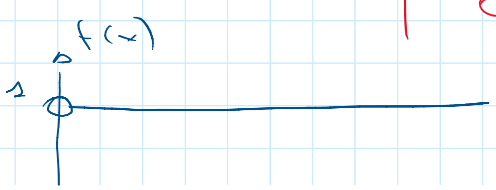
Se f non è continua nel p.to c, dico che f è discontinua nel p.to c.

DISCONTINUITÀ A SALTO

Dico che c è un p.to di discontinuità a salto per $f(x)$ se $\lim_{x \to c^-} f(x)$ e $\lim_{x \to c^+} f(x)$ esistono entrambi e sono entrambi finiti, ma sono diversi.

La differenza $\left(\lim_{x \to c^+} f(x)\right) - \left(\lim_{x \to c^-} f(x)\right)$ si dice SALTO DELLA FUNZIONE f NEL PUNTO c.

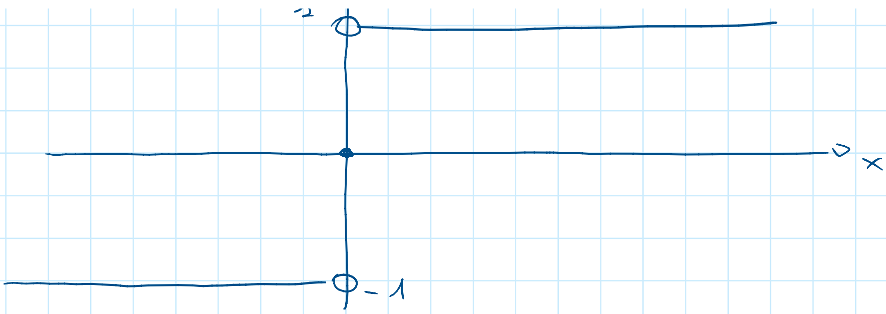
ESEMPIO $\quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{|x|} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$



$f(0) = 0$

$\lim f(x) = 1$

$f(0)=0$



$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$$

$\Rightarrow$ SALTO DI f IN 0 è $1-(-1)=2$

— o —

Se f è discontinua in c ma $\lim_{x \to c^+} f(x) = f(c)$ dico che f è continua da destra in c

Se f è discontinua in c ma $\lim_{x \to c^-} f(x) = f(c)$, dico che f è continua da sinistra in c.

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$ è continua da destra in $c=0$

$$f_2(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} & x \neq 0 \\ -1 & x = 0 \end{cases}$$ è continua da sinistra in $c=0$

TEOREMA (Algebra delle funzioni continue)

Siano $f, g : I \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in I$.

Supponiamo che f e g siano entrambe continue in x_0

Allora

1) le funzioni $(f+g)(x)$ e $(f-g)(x)$ sono continue in x_0

2) la funzione $(fg)(x)$ è continua in x_0

3) Se $g(x_0) \neq 0$, allora la funzione $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ è continua in x_0

3) Se $g(x_0) \neq 0$, allora la funzione

$\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ è continua in x_0

$(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

TEOREMA Sono continue nel proprio dominio

1) le funzioni potenza
2) le funzioni esponenziali e le funzioni logaritmiche
3) le funzioni trigonometriche

TEOREMA DI CONTINUITÀ DI FUNZIONI COMPOSTE

Siano I, J intervalli di $\mathbb{R}$

Sia $f: I \to J$ e sia $g: J \to \mathbb{R}$.

Sia $x_0 \in I$ e sia $y_0 = f(x_0) \in J$.

Se f è continua in x_0 e g è continua in y_0,

allora la funzione composta $g \circ f : x \in I \to g(f(x)) \in \mathbb{R}$

è continua nel pto x_0.

— o —

LIMITI NOTEVOLI

Polinomio di grado n

$a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ con $a_n \neq 0$

un'espressione del tipo $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

si dice polinomio di grado n

Lo posso scrivere in forma compatta $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = P_n(x)$

$$\lim_{x \to +\infty} P_n(x) = \lim_{x \to +\infty} a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 =$$

$$P_n(x) = x^n \left(\underset{\downarrow\, a_n}{a_n} + \underset{\downarrow\, 0}{\frac{a_{n-1}}{x}} + \dots + \underset{\downarrow\, 0}{\frac{a_1}{x^{n-1}}} + \underset{\downarrow\, 0}{\frac{a_0}{x^n}} \right)$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x} \right) = a_n \qquad a_n \neq 0 \text{ per ipotesi}$$

$$\lim_{x \to +\infty} P_n(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } a_n > 0 \\ -\infty & \text{se } a_n < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -\infty} P_n(x) = \lim_{x \to -\infty} x^n \underbrace{\left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} \right)}_{\to\, a_n \neq 0}$$

$$= \begin{cases} +\infty & n \text{ pari} \quad a_n > 0 \\ -\infty & n \text{ pari} \quad a_n < 0 \\ -\infty & n \text{ dispari} \quad a_n > 0 \\ +\infty & n \text{ dispari} \quad a_n < 0 \end{cases}$$

$f(x)$ funzione razionale $\qquad f(x) = \dfrac{P_n(x)}{q_m(x)}$

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \qquad a_n \neq 0$$

$$q_m(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0 \qquad b_m \neq 0$$

$$f(x) = \frac{x^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} \right)}{x^m \left(b_m + \frac{b_{m-1}}{x} + \dots + \frac{b_1}{x^{m-1}} + \frac{b_0}{x^m} \right)}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x} \right) = a_n \neq 0$$

$$\lim \left(b_m + \frac{b_{m-1}}{x} + \dots + \frac{b_1}{x^{m-1}} + \frac{b_0}{x^m} \right) = b_m \neq 0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(b_m + \frac{b_{m-1}}{x} + \dots + \frac{b_1}{x^{m-1}} + \frac{b_0}{x^m}\right) = b_m \neq 0$$

$$f(x) = x^{n-m}\,\frac{\left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_0}{x^n}\right)}{\left(b_m + \frac{b_{m-1}}{x} + \dots + \frac{b_0}{x^m}\right)} \to \frac{a_n}{b_m}$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^{n-m} = \begin{cases} +\infty & n>m \\ 1 & n=m \\ 0 & n<m \end{cases}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty & n>m \text{ e } \frac{a_n}{b_m}>0 \\ -\infty & n>m \text{ e } \frac{a_n}{b_m}<0 \\ \frac{a_n}{b_m} & n=m \\ 0 & n<m \end{cases}$$

Per esercizio $\quad \displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{p_n(x)}{q_m(x)}$

— o —

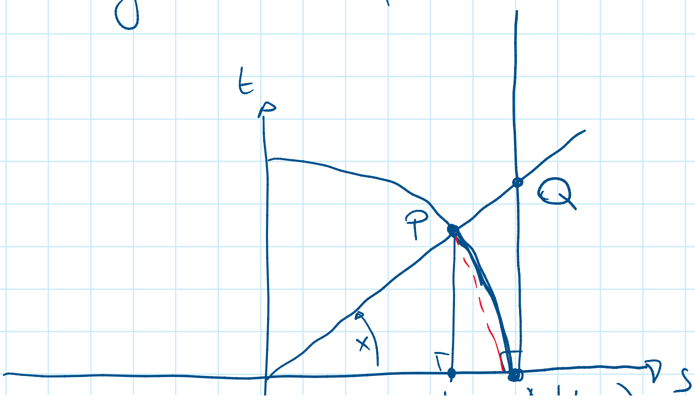
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

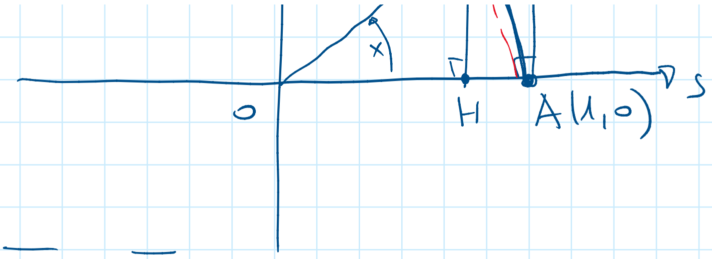
$f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ $\qquad I = \mathbb{R}\setminus\{0\} = (-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

$$f(-x) = \frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{-\sin(x)}{-x} = f(x)$$

cioè f è una funzione pari.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)}{x}$$





$$\overline{PH} : \overline{OH} = \overline{QA} : \overline{OA}$$

$$\sin(x) : \cos(x) = \overline{QA} : 1 \qquad \overline{QA} = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = tg(x)$$

$$\overline{PH} \leq \overset{\frown}{PA} \leq \overline{QA}$$

$$\sin(x) \leq x \leq \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \qquad 0 < x < \delta < \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\cos(x)}{\sin(x)} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{\sin(x)} \qquad 0 < x < \delta < \frac{\pi}{2}$$

$$\cos(x) \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq 1 \qquad 0 < x < \delta < \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \cos(x) = \cos(0) = 1 \qquad \lim_{x \to 0^+} 1 = 1$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \qquad \Rightarrow \exists \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1-\cos(x)}{x^2} \cdot \frac{1+\cos(x)}{1+\cos(x)} = \frac{1-\cos^2(x)}{x^2(1+\cos(x))}$$

$$= \frac{\sin^2(x)}{x^2(1+\cos(x))} = \underbrace{\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2}_{\to 1 \text{ quando } x \to 0} \cdot \frac{1}{1+\underbrace{\cos(x)}_{\to 1 \text{ quando } x \to 0}} \to 1^2 \cdot \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$