http://www.dma.unifi.it/~poggiolini/didattica/2019-20-Istituzioni.php

POTENZE

Se $a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}^+$, $n \geq 1$ $\quad a^n := \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ fattori}} \qquad a^1 = a$

$a \in \mathbb{R}$, $n, k \in \mathbb{N}^+$ $\quad a^n \cdot a^k = \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ fattori}} \cdot \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{k \text{ fattori}} =$

$= \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{n+k \text{ fattori}} = a^{n+k}$

$a \in \mathbb{R}$ $a \neq 0$ $\quad n, k \in \mathbb{N}^+$

$$\frac{a^n}{a^k} = \frac{\overbrace{a \cdot \dots \cdot a}^{n \text{ fattori}}}{\underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{k \text{ fattori}}}$$

1) $n > k \qquad \dfrac{a^k \cdot a^{n-k}}{a^k} = a^{n-k}$

2) $n < k \qquad \dfrac{a^n}{a^n \cdot a^{k-n}} = \dfrac{1}{a^{k-n}} = \left(a^{-1}\right)^{k-n} = \cancel{a^{n-k}}$

Pongo $\quad a^{-n} := \dfrac{1}{a^n} \qquad \Rightarrow \quad \dfrac{a^n}{a^k} = a^{n-k}$

3) $\dfrac{a^n}{a^n} = 1 \qquad$ Pongo $\quad a^0 := 1$

PROPRIETÀ $\quad (a^n)^2 = a^n \cdot a^n = a^{2n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^+$

$(a^n)^k = \underbrace{a^n \cdot a^n \cdot \dots \cdot a^n}_{k \text{ fattori}} = a^{\overbrace{n+n+\dots+n}_{k \text{ addendi}}} =$

$= a^{kn} \qquad \forall k, n \in \mathbb{N}^+$

$a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ $\quad \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$

1° CASO $\quad p = 1 \qquad a^{1/q}$

Col metodo degli intervalli dimezzati si dimostra che

$\exists !\, b \in \mathbb{R}$ $\;b > 0\;$ t.c. $\;b^q = a$

$\exists!\, b \in \mathbb{R}$ $\quad b>0 \quad$ t.c. $\quad b^q = a$

Pongo $\quad b := a^{1/q} = \sqrt[q]{a} \qquad$ (se $q=2$ $\quad \sqrt{a}$)

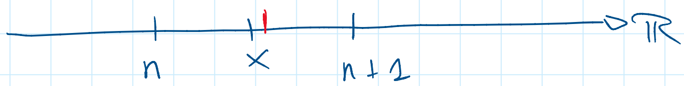
b si dice RADICE ALGEBRICA q-ESIMA DI a.

<u>2° caso</u> $\quad \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$

Pongo $\quad a^{\frac{p}{q}} := \left(\sqrt[q]{a}\right)^p$

Osservazione $\quad a^{-\frac{p}{q}} = \left(\sqrt[q]{a}\right)^{-p} = \dfrac{1}{\left(\sqrt[q]{a}\right)^p} = \dfrac{1}{a^{p/q}}$

$a \in \mathbb{R} \quad a>0 \quad x \in \mathbb{R} \quad a^x = ?$



$x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

$\exists!\, n \in \mathbb{Z}$ $\quad$ t.c. $\quad n < x < n+1$

$a_1 = n \qquad b_1 = n+1$

$c = \dfrac{a_1+b_1}{2} = \dfrac{n+n+1}{2} \in \mathbb{Q}$

Se $\quad x<c \qquad a_2 = a_1 = n \qquad b_2 = c = \dfrac{2n+1}{2}$

Se $\quad x>c \qquad a_2 = c \qquad b_2 = b_1$

Procedendo in questo modo costruisco una famiglia di intervalli dimezzati t.c. $\quad a_n \leq x \leq b_n \quad$ cioè $x \in [a_n, b_n]$

$\Rightarrow \quad x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n]$

$\Rightarrow \quad \{x\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n]$

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ so calcolare $\quad a^{a_n}$

Se $\quad a=1 \quad \Rightarrow \quad a^{a_n} = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad$ pongo $\quad 1^x = 1$

Se $a=1 \Rightarrow a^{a_n}=1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$ pongo $1^x = 1$

Se $a \in (0,1)$ $\qquad b_1 \geq a_{n+1} \geq a_n$

$$a^{a_n} \geq a^{a_{n+1}} \geq a^{b_1}$$

$E := \{ a^{a_n} : n \in \mathbb{N} \}$ è limitato inferiormente da a^{b_1}

Definisco $a^x := \inf E$

Se $a > 1$ $\qquad b_1 \geq a_{n+1} \geq a_n$

$$a^{b_1} \geq a^{a_{n+1}} \geq a^{a_n}$$

$E := \{ a^{a_n} : n \in \mathbb{N} \}$ è limitato superiormente da a^{b_1}

Definisco $a^x := \sup E$

Si può dimostrare che valgono le solite proprietà:

$a^{x+y} = a^x \cdot a^y \qquad \forall a>0 \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$

$(a^x)^y = a^{xy} \qquad \forall a>0 \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$

$a^{-x} = (a^{-1})^x \qquad \forall a>0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$(ab)^x = a^x \cdot b^x \qquad \forall a,b>0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$a^x > 0 \qquad \forall a>0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Se $x>0$, allora $a^x \gtreqless 1$ sse $a \gtreqless 1$

Se $a>1$, allora $a^x < a^y$ sse $x<y$

Se $a \in (0,1)$, allora $a^x < a^y$ sse $x>y$

Se $0<a\leq b$ e $x>0$ allora $a^x \leq b^x$

LOGARITMI

Fisso $a>0$, $b\in\mathbb{R}$ e considero l'equazione $a^x=b$

(1) $a=1 \Rightarrow a^x=1 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

l'insieme delle soluzioni è $\begin{cases}\mathbb{R} & \text{se } b=1\\ \emptyset & \text{se } b\neq 1\end{cases}$

(2) Se $a>0$ $a\neq 1$, $a^x>0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

Se $b\leq 0$ l'insieme delle soluzioni è $\emptyset$

TEOREMA (NO DIM) Sia $a>0$, $a\neq 1$ e sia $b>0$.
Allora $\exists!\, x\in\mathbb{R}$ t.c. $a^x=b$.

Questo valore x si chiama LOGARITMO DI b IN BASE a
e si indica col simbolo $\log_a b$.

PROPRIETÀ Sia $a>0$, $a\neq 1$ e siano $x,y>0$

- $\log_a(xy)=\log_a x+\log_a y$

$t:=\log_a x \qquad s:=\log_a y$

$a^t=x \qquad a^s=y$

$xy=a^t\cdot a^s=a^{t+s}$

$t+s=\log_a(xy)$

cioè $\log_a x+\log_a y=\log_a(xy)$

- $\log_a\left(\frac{x}{y}\right)=\log_a x-\log_a y$
- $\forall \alpha\in\mathbb{R} \quad \log_a x^\alpha=\alpha\cdot\log_a x$
- $\log_a x=-\log_{\frac{1}{a}} x$
- Se $x\neq 1 \quad \log_a x=\frac{1}{\log_x a}$
- Se $b>0$, $b\neq 1 \Rightarrow \log_b x=\frac{\log_a x}{\cdots}$

$\log_x a$

- Se $b>0,\ b\neq 1 \Rightarrow \log_b x = \dfrac{\log_a x}{\log_a b}$

$t := \log_b x \qquad b^t = x$

$s := \log_a x \qquad a^s = x \qquad \Rightarrow \quad b^t = a^s \quad \Rightarrow$

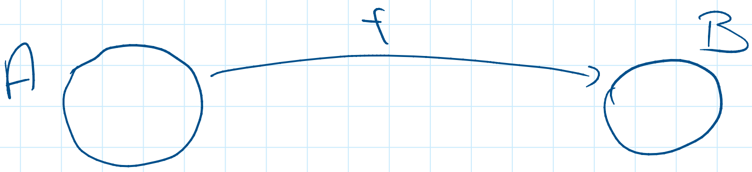
$$t = \log_b a^s = s \cdot \log_b a$$

$$\log_b x = \log_a x \cdot \log_b a = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

FUNZIONI

Dati due insiemi A e B non vuoti, chiamo FUNZIONE DI DOMINIO A E CODOMINIO B una legge che ogni elemento $a \in A$ associa uno ed un solo elemento $b \in B$.

Si indica $b = f(a)$



$f: A \to B \qquad\qquad f: x \in A \mapsto f(x) \in B$

$f: x \mapsto f(x)$

Esempio $\qquad f: n \in \mathbb{N} \mapsto 2n \in \mathbb{N}$

$\qquad\qquad\quad f: n \in \mathbb{N} \mapsto \frac{n}{2} \in \mathbb{Q}$

Se B è il codominio di f si dice anche che f è una funzione a valori in B.

L'insieme $\{y \in B : \exists x \in A \text{ t.c. } f(x) = y\}$ si

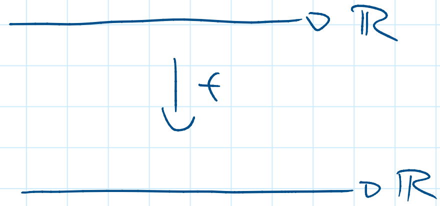
Chiamo Immagine di f

Immagine di A tramite f

$\mathrm{Im}(f)$ $\quad f(A)$

Se $f(A)=B$ la funzione f si dice <u>suriettiva</u>.

→ $f: x \in \mathbb{R} \longmapsto x^2 \in \mathbb{R}$



→ $f: x \in \mathbb{R} \longmapsto x^2 \in [0,+\infty)$

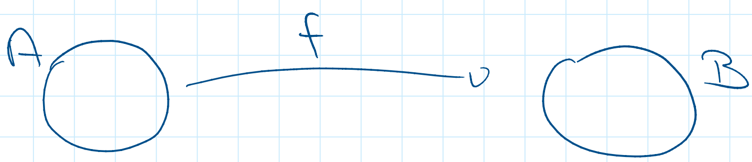
Sia $f: A \to B$ una funzione.

Se $\forall x_1, x_2 \in A$ t.c. $x_1 \neq x_2$ si ha che $f(x_1) \neq f(x_2)$, la funzione f si dice INIETTIVA.

$g: x \in [0,+\infty) \longmapsto x^2 \in \mathbb{R}$ è INIETTIVA, non è SURIETTIVA

$h: x \in [0,+\infty) \longmapsto x^2 \in [0,+\infty)$ è INIETTIVA, è SURIETTIVA

Se $f: A \to B$ è sia suriettiva che iniettiva, allora f si dice BIUNIVOCA o INVERTIBILE.



Poiché f è suriettiva so che $\forall y \in B \ \exists x \in A$ t.c. $f(x)=y$

Questo x è unico. Infatti se esistessero $x_1, x_2 \in A$, con $x_1 \neq x_2$ t.c. $\begin{cases} f(x_1)=y \\ f(x_2)=y \end{cases}$ avrei $f(x_1)=f(x_2)$

cioè f non sarebbe iniettiva.

Quindi abbiamo che $\forall y \in B \ \exists! x \in A$ t.c. $f(x)=y$

Chiamo INVERSA DI f (f^{-1}) la funzione che a $y \in B$ associa l'unico $x \in A$ t.c. $f(x) = y$.

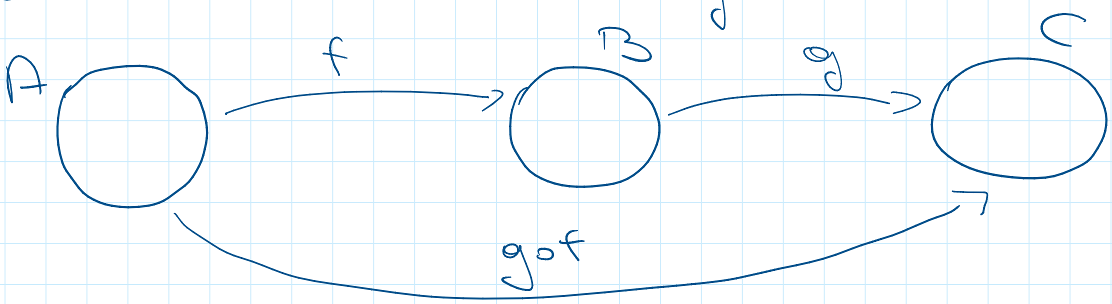
Osservazione $f^{-1}(f(x)) = x \qquad \forall x \in A$

$f(f^{-1}(y)) = y \qquad \forall y \in B$.

— ∘ —

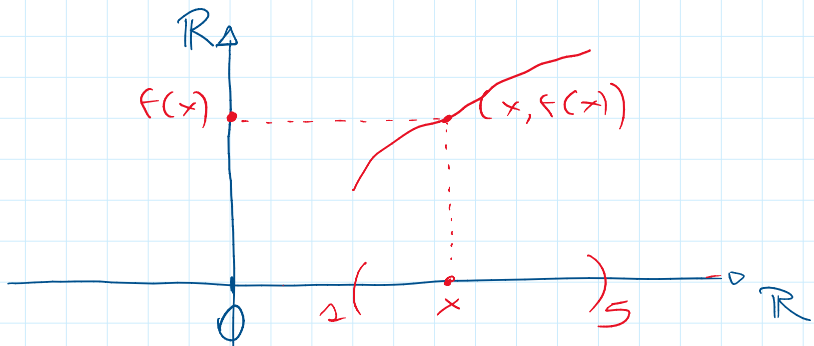
Siano A, B, C tre insiemi non vuoti e siano $f: A \to B$ e $g: B \to C$ due funzioni.

La legge che ad ogni $x \in A$ associa il pto $g(f(x)) \in C$ si dice COMPOSIZIONE DI f E g



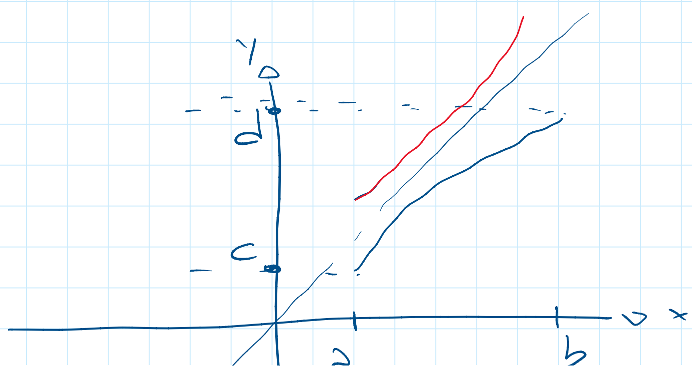
— ∘ —

$D \subseteq \mathbb{R}$ $\qquad f: D \to \mathbb{R}$



$D = (1, 5)$

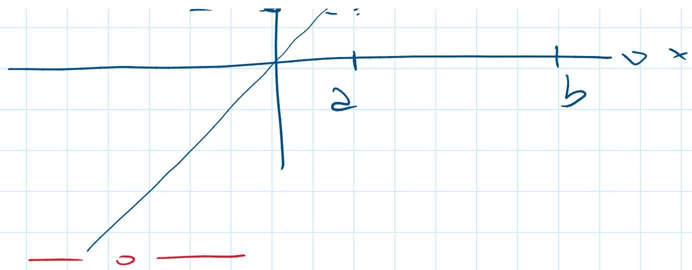
$Graf(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \in D, \ y = f(x)\}$ GRAFICO DI f



$f: (a,b) \to (c,d)$

$g: (c,d) \to (a,b)$

$y = f(x)$



$y = f(x)$
SSE
$x = g(y)$

Sia $D \subseteq \mathbb{R}$ e sia $f: D \to \mathbb{R}$

1) Dico che la funzione f è limitata superiormente se $f(D)$ è limitato superiormente

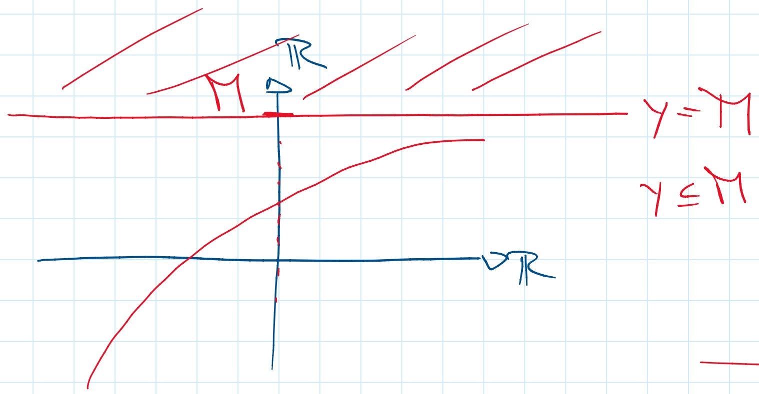
cioè se $\exists M \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x) \leq M \quad \forall x \in D$

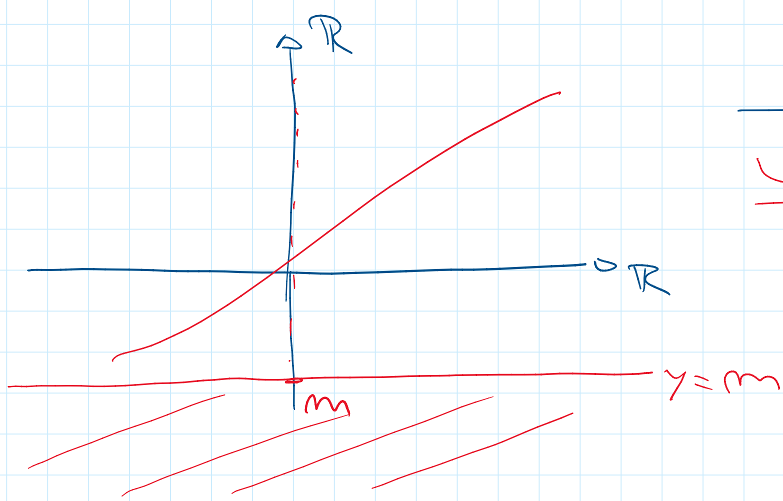
2) Dico che la funzione f è limitata inferiormente se $f(D)$ è limitato inferiormente

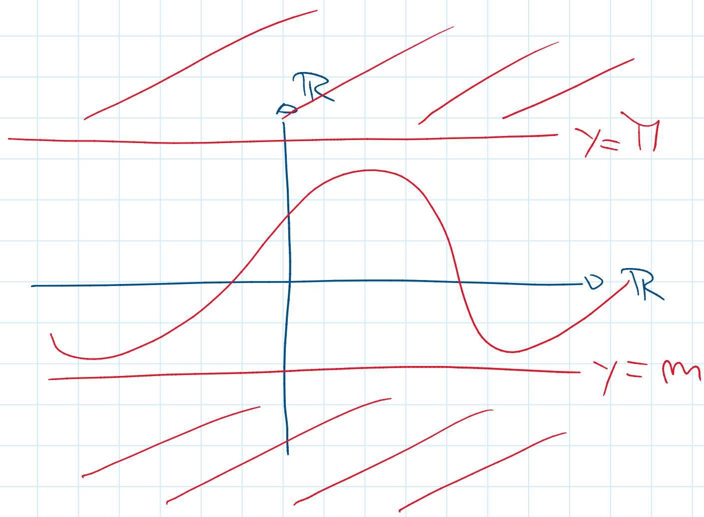
cioè se $\exists m \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x) \geq m \quad \forall x \in D$

3) Dico che la funzione f è limitata se è sia limitata superiormente che limitata inferiormente

cioè se $\exists m, M \in \mathbb{R}$ t.c. $m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in D$



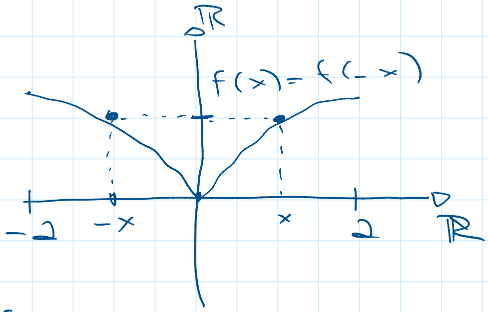




Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o $f:(-a,a)\to\mathbb{R}$ ($[-a,a]$) t.c.

$f(-x)=f(x)$ $\forall x\in$ Dominio

Allora f si dice una funzione pari



Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o $f:(-a,a)\to\mathbb{R}$ ($[-a,a]$) t.c.

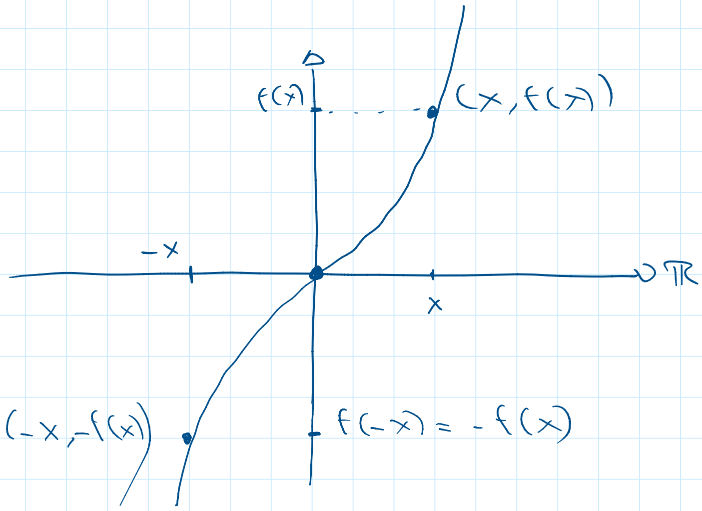
$f(-x)=-f(x)$ $\forall x\in$ dominio,

allora f si dice una funzione dispari

$x=0 \Rightarrow -x=0$ $\quad f(-x)=-f(x)$ $\quad 2f(0)=0$

$f(0)=-f(0)$ $\quad \Downarrow$

$f(0)=0$



FUNZIONI MONOTONE

FUNZIONI STRETTAMENTE MONOTONE

Sia $D\subseteq\mathbb{R}$ e sia $f:D\to\mathbb{R}$

Se $\forall x_1,x_2\in D$ $\quad x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)\leq f(x_2)$,

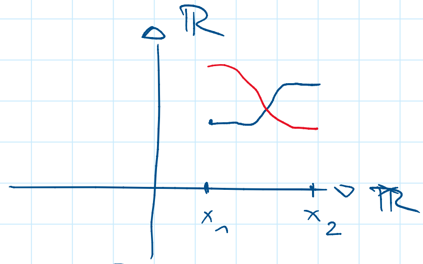
allora f si dice monotone crescente

Se $\forall x_1,x_2\in D$ $\quad x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)< f(x_2)$,

allora f si dice strettamente monotone crescente.

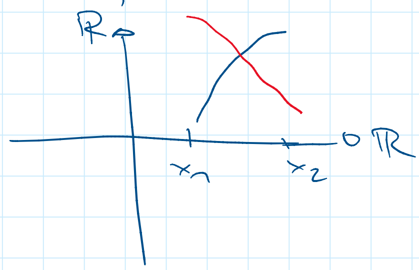
Se $\forall x_1, x_2 \in D \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$,
allora f si dice monotone decrescente

Se $\forall x_1, x_2 \in D \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$,
allora f si dice strettamente monotone decrescente



1) $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

$f(x_1) \geq f(x_2)$



2) $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

$f(x_1) > f(x_2)$

TEOREMA Sia $D \subset \mathbb{R}$ e sia $f : D \to \mathbb{R}$ una funzione strettamente monotone. Allora
$\tilde{f} : x \in D \mapsto f(x) \in f(D)$ è invertibile

DIM $\tilde{f}$ è sicuramente suriettiva.

Supponiamo che non sia iniettiva:

Esistono $x_1, x_2 \in D \quad x_1 \neq x_2$ t.c. $f(x_1) = f(x_2)$

Ma $x_1 \neq x_2 \Rightarrow$ AUT $x_1 < x_2$ AUT $x_2 < x_1$

Se $x_1 < x_2$ e f è strettamente monotone crescente
allora $f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Se $x_1 < x_2$ e f è strettamente monotone decrescente
allora $f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Dimostrazione analoga per il caso $x_2 < x_1$:

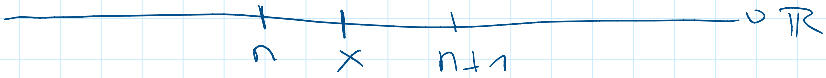
Trovo sempre $f(x_2) \neq f(x_1) \Rightarrow f$ è iniettiva.

$\Rightarrow \tilde{f}$ è iniettiva.

FUNZIONI PERIODICHE

Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Se $\exists T > 0$ t.c. $f(x+T) = f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$, allora la funzione f si dice PERIODICA di PERIODO T

$f: x \in \mathbb{R} \mapsto \{x\} \in \mathbb{R}$



$\exists! \, n \in \mathbb{Z}$ t.c.

$n \leq x < n+1$

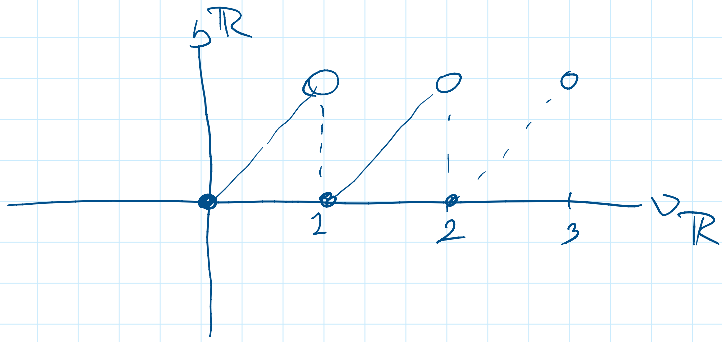
Pongo $\{x\} = x - n$

$\{\sqrt{2}\} = \{1.4142\ldots\} = 0.4142\ldots$

$\{1+\sqrt{2}\} = \{1 + 1.4142\ldots\} = \{2.4142\ldots\} = 0.4142\ldots$

$\{x+1\} = \{x\}$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$x \in [0,1)$ $\{x\} = x$



$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodica di periodo T