LAURA POGGIOLINI

laura.poggiolini@unifi.it

Ufficio a Santa Marta - 1° PIANO, sopra l'atrio della Presidenza.

Dott.ssa Nelle Rotundo

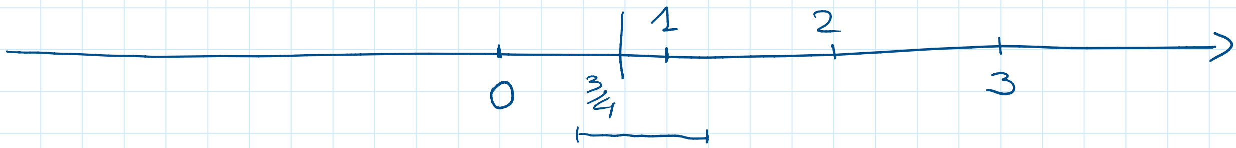
— o —

$\mathbb{N}$ $\quad 0, 1, 2, 3, \_\_\_$

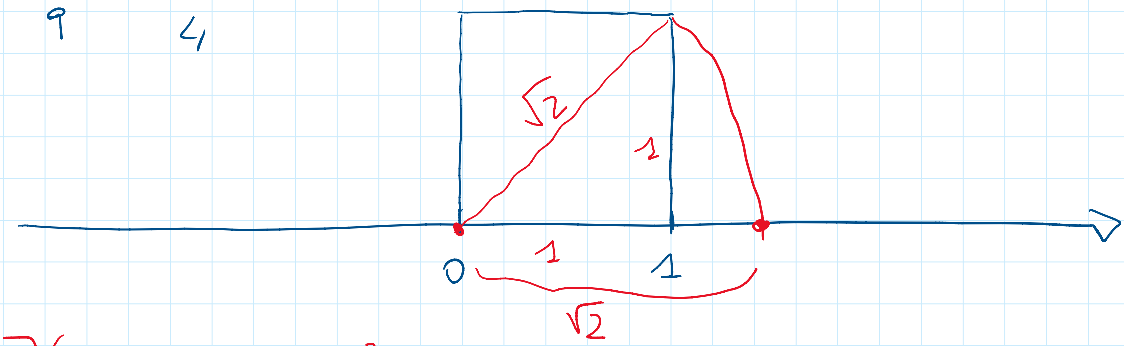
$\mathbb{Z}$ $\quad 0, +1, -1, +2, -2, \ldots$

$\mathbb{Q}$ insieme dei numeri razionali.

$$= \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, \; q \neq 0 \right\}$$



$$\frac{p}{q} = \frac{3}{4}$$



$\nexists \; x \in \mathbb{Q} \quad x^2 = 2$

Supponiamo $\exists \; x \in \mathbb{Q}$ t.c. $x^2 = 2$

Posso scrivere $x = \frac{p}{q}$ $\quad \underline{M.C.D.(p,q) = 1}$, $p, q \in \mathbb{N}$

$x^2 = 2 \qquad \frac{p^2}{q^2} = 2 \qquad p^2 = 2q^2$

$\Rightarrow p^2$ è pari $\qquad\qquad p = 2k+1$

$\Rightarrow \boxed{p \text{ è pari}} \qquad\qquad p^2 = 4k^2 + 4k + 1$

$\qquad\qquad\qquad\qquad = 2(2k^2+2k)+1$

$\Rightarrow$ $\boxed{p \text{ è pari}}$

$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}$ t.c. $p = 2k$

$p^2 = 4k^2 + 4k + 1$
$= \underbrace{2(2k^2+2k)}\uparrow + 1 \uparrow$

$\Rightarrow$ $p^2 = 4k^2$

$4k^2 = 2q^2$

$q^2 = 2k^2 \Rightarrow q^2$ è pari

$\Rightarrow$ $\boxed{q \text{ è pari}}$

$\Rightarrow$ MCD (p,q) non può essere 1, deve essere un multiplo di 2

$\Rightarrow$ Ho trovato un ASSURDO

$\Rightarrow \nexists\, x \in \mathbb{Q}$ t.c. $x^2 = 2$

$\mathbb{R}$ insieme dei numeri reali

È un insieme su cui sono definite due operazioni $+$ $\cdot$, somma e prodotto e una relazione binaria $\leq$ che godono delle seguenti proprietà

S_1 $\quad a+b = b+a \quad \forall a,b \in \mathbb{R}$ (PROPRIETÀ COMMUTATIVA)

S_2 $\quad (a+b)+c = a+(b+c) \quad \forall a,b,c \in \mathbb{R}$ (PROPRIETÀ ASSOCIATIVA)

S_3 $\quad \exists!\, 0 \in \mathbb{R} \quad a+0 = 0+a = a \quad \forall a \in \mathbb{R}$

(ESISTENZA DELL'ELEMENTO NEUTRO)

S_4 $\quad \forall a \in \mathbb{R} \quad \exists!\, b \in \mathbb{R}$ t.c. $a+b = b+a = 0$

b si indica col simbolo $-a$ (ESISTENZA DELL'OPPOSTO)

P_1 $\quad a \cdot b = b \cdot a \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$ (PROP. COMMUTATIVA)

P_2 $\quad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}$ (PROP. ASSOCIATIVA)

P_3 $\quad \exists!\, 1 \neq 0 \in \mathbb{R}$ t.c. $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a \quad \forall a \in \mathbb{R}$

(ESISTENZA ELEMENTO NEUTRO)

P_4 $\quad \forall a \in \mathbb{R},\ a \neq 0 \quad \exists!\, b \in \mathbb{R}$ t.c.

$$a \cdot b = b \cdot a = 1$$

(ESISTENZA DELL'INVERSO)

b si indica col simbolo b^{-1}.

O_1 $\quad \forall a, b \in \mathbb{R} \quad$ o $\ a \leq b\ $ o $\ b \leq a$ (ORDINAMENTO TOTALE)

VEL VEL

O_2 $\quad \forall a \in \mathbb{R} \quad a \leq a$ (PROPRIETÀ RIFLESSIVA)

O_3 $\quad$ Se $a \leq b$ e $b \leq a \Rightarrow a = b$ (PROPRIETÀ ANTISIMMETRICA)

O_4 $\quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}$ t.c. $a \leq b$ e $b \leq c$ si ha $a \leq c$ (PROPRIETÀ TRANSITIVA)

SP $\quad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}$ (PROPRIETÀ DISTRIBUTIVA)

SO $\quad$ Se $a \leq c \Rightarrow a + b \leq c + b \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}$

PO $\quad$ Se $a, b \in \mathbb{R}$ $\quad 0 \leq a,\ 0 \leq b \Rightarrow 0 \leq a \cdot b$.

T T

Dico che $a \geq b$ se $b \leq a$.

Se $b \leq a$ e $b \neq a$ scrivo $b < a$.

Se $b \geq a$ e $b \neq a$ scrivo $b > a$.

— o —

$a \in \mathbb{R} \qquad a \cdot 0 = 0$

DIM $\qquad (1 + 0) a = 1 \cdot a = a$

$$\begin{aligned} &\parallel \\ &1 \cdot a + 0 \cdot a = a + 0 \cdot a \end{aligned}$$

$$a + 0\cdot a = a$$

$$\underbrace{a+(-a)}+0\cdot a = a+(-a)$$

$$0\cdot a = 0 + \underbrace{0\cdot a} = 0$$

— o —

$$a \geq 0 \Rightarrow -a \leq 0$$

$$a \geq 0$$

$$a+(-a) \geq 0+(-a)$$

$$0 \geq -a$$

1) Se $a+b=a+c \Rightarrow b=c$
2) $(-1)\cdot a = -a \quad \forall a\in\mathbb{R}$
3) $a\le b$ e $s\ge 0 \Rightarrow a\cdot s \le b\cdot s$
4) $0\le a\le b \Rightarrow a^2\le b^2$

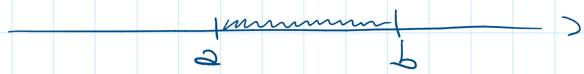
— o —

INTERVALLO

Siano $a,b\in\mathbb{R}$ t.c. $a\le b$

Chiamo INTERVALLO CHIUSO DI ESTREMI a e b e indico $[a,b]$ l'insieme

$$\{x\in\mathbb{R} : a\le x\le b\}$$



Chiamo lunghezza dell'intervallo $[a,b]$ la differenza $b-a$ $(:= b+(-a))$

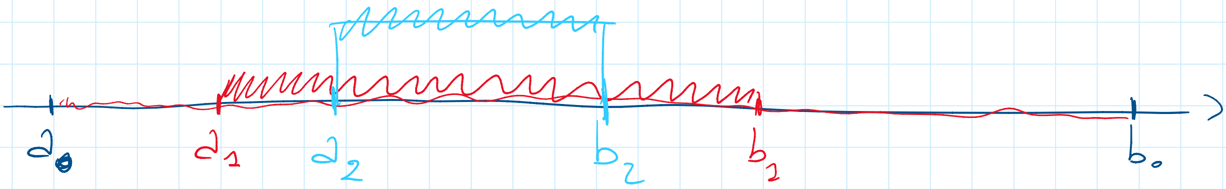
Per ogni $n\in\mathbb{N}$ supponiamo di avere un intervallo chiuso $[a_n, b_n]$

Dico che ho una famiglia di intervalli dimezzati

Dico che ho una famiglia di intervalli dimezzati

se $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad [a_n, b_n] \subset [a_{n-1}, b_{n-1}]$

e se la lunghezza di $[a_n, b_n]$ è la metà della lunghezza di $[a_{n-1}, b_{n-1}]$.



$L := b_0 - a_0$ lunghezza di $[a_0, b_0]$

lunghezza di $[a_1, b_1] = \frac{1}{2} L$

lunghezza di $[a_2, b_2] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} L = \frac{1}{2^2} L$

lunghezza di $[a_3, b_3] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^2} L = \frac{1}{2^3} L$

lunghezza di $[a_n, b_n] = \frac{1}{2^n} L$

ASSIOMA DI COMPLETEZZA

Per ogni famiglia di intervalli dimezzati $[a_n, b_n]$,

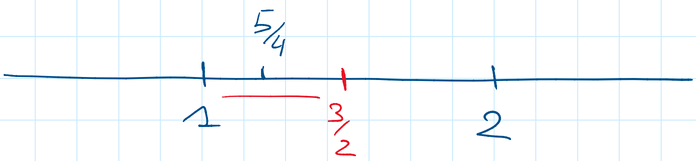
$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n]$ è dato da un solo numero reale.

ovvero per ogni famiglia di intervalli dimezzati $[a_n, b_n]$

$\exists! \lambda \in \mathbb{R}$ t.c. $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] = \{\lambda\}$

$1^2 = 1 < 2 \qquad 2^2 = 4 > 2$

$[a_0, b_0] = [1, 2]$



$c_0 = \frac{a_0 + b_0}{2} = \frac{3}{2}$

$$c_0^2 = \frac{9}{4} = 2 + \frac{1}{4} > 2 \qquad a_1 = a_0 = 1$$

$$b_1 = \frac{3}{2}$$

$$[a_1, b_1] = \left[1, \frac{3}{2}\right]$$

$$c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} = \frac{1 + 3/2}{2} = \frac{5}{4}$$

$$c_1^2 = \frac{25}{16} < 2 \qquad a_2 = c_1 = \frac{5}{4} \qquad b_2 = b_1 = \frac{3}{2}$$

$$[a_2, b_2] = \left[\frac{5}{4}, \frac{3}{2}\right]$$

$\vdots$

$$a_n^2 < 2 \qquad b_n^2 > 2 \qquad b_n - a_n = \frac{1}{2^n}$$

$$\exists!\ \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{t.c.} \quad \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] = \{\lambda\}$$

$$\lambda \in [1, 2] \implies \lambda \geq 0$$

Affermo che $\lambda^2 = 2$.

Per assurdo supponiamo $\lambda^2 \neq 2$.

$$\lambda^2 \leq 2 \quad \text{o} \quad \lambda^2 \geq 2$$

Ma $\lambda^2 \neq 2 \implies$ o $\underline{\lambda^2 < 2}$ o $\lambda^2 > 2$

Supponiamo $\lambda^2 < 2$

Per costruzione $0 < a_n < \lambda < b_n$

$$\implies 0 < a_n^2 < \lambda^2 < b_n^2 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

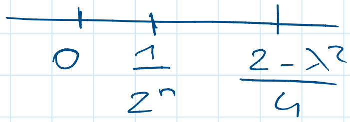
Ma anche $0 < a_n^2 < \lambda^2 < 2 < b_n^2$

$$b_n^2 - a_n^2 > 2 - \lambda^2 > 0$$

$$b_n^2 - a_n^2 = (b_n - a_n)(b_n + a_n) = \frac{1}{2^n}(b_n + a_n) < \frac{1}{2^n}(2+2)$$

$$\underbrace{b_n^2 - a_n^2} = (b_n - a_n)(b_n + a_n) = \frac{1}{2^n}(b_n + a_n) < \underbrace{\frac{1}{2^n}(2+2)}$$

$$\frac{4}{2^n} > 2 - x^2 \qquad \frac{1}{2^n} > \frac{2-x^2}{4} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$



ASSURDO

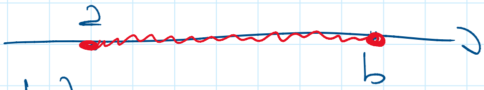
Nello stesso modo si dimostra che non può essere $x^2 > 2$.

$\Rightarrow x^2 = 2$.

Dati $a, b \in \mathbb{R}$ $\quad a \le b$

INTERVALLO CHIUSO DI ESTREMI a E b

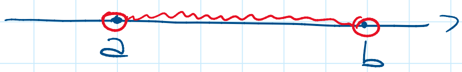
$[a,b] := \{ x \in \mathbb{R} : a \le x \le b \}$



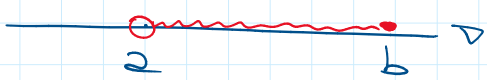
N.B. se $a = b \Rightarrow [a,b] = [a,a] = \{a\}$

INTERVALLO APERTO DI ESTREMI a E b

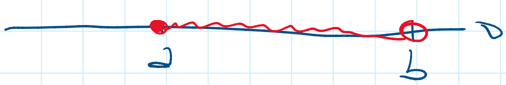
$(a,b) := \{ x \in \mathbb{R} : a < x < b \}$



$(a,b] := \{ x \in \mathbb{R} : a < x \le b \}$

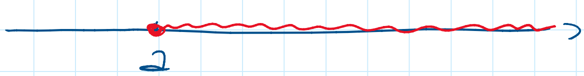


$[a,b) := \{ x \in \mathbb{R} : a \le x < b \}$



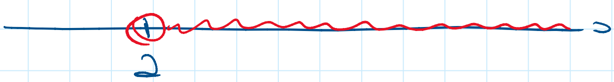
$a \in \mathbb{R}$ chiamo SEMIRETTA DESTRA CHIUSA

$[a, +\infty) := \{ x \in \mathbb{R} : x \geq a \}$



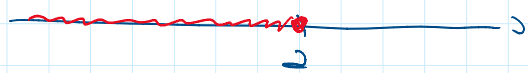
SEMIRETTA DESTRA APERTA

$(a, +\infty) := \{ x \in \mathbb{R} : x > a \}$



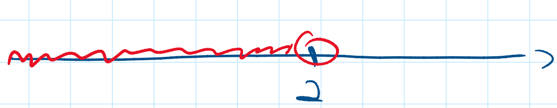
SEMIRETTA SINISTRA CHIUSA

$(-\infty, a] := \{x\in\mathbb{R} : x\le a\}$



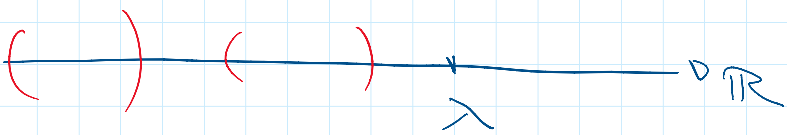
SEMIRETTA SINISTRA APERTA

$(-\infty, a) := \{x\in\mathbb{R} : x< a\}$



— ∘ —

Sia $E\subset\mathbb{R}$. Dico che l'insieme E è limitato superiormente se $\exists\,\lambda\in\mathbb{R}$ t.c. $x\le\lambda \quad \forall x\in E$



$E\subseteq(-\infty,\lambda]$

Sia $E\subset\mathbb{R}$ e sia $\lambda\in\mathbb{R}$. Dico che λ è un <u>maggiorante</u> di E se $\forall x\in E$ si ha $x\le\lambda$.

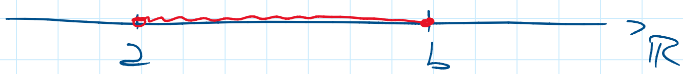
PROPRIETÀ Un sottoinsieme $E\subset\mathbb{R}$ è limitato superiormente se e solo se (SSE) esiste un maggiorante di E.

— ∘ —

Sia $E\subset\mathbb{R}$ e sia $\lambda\in\mathbb{R}$. Dico che λ è il <u>MASSIMO</u> DI E se $\lambda\in E$ e λ è un maggiorante di E.

— ∘ —

$E=[a,b]$



Se $\lambda\ge b$, allora λ è un maggiorante di $[a,b]$

Se $\lambda<b$, allora λ non è un maggiorante di $[a,b]$.

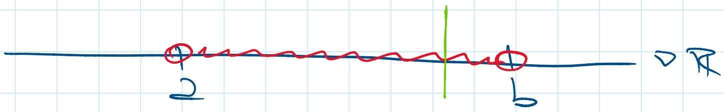
Se $\lambda < b$, allora λ non è un maggiorante di $[a,b]$.

$\mathcal{M}(E) :=$ insieme dei maggioranti di E

$\mathcal{M}([a,b]) = [b, +\infty)$

b è il massimo di $[a,b]$

$E = (a,b)$



Se $\lambda \geq b$, allora λ è un maggiorante di (a,b)

Se $\lambda < b$, allora λ non è un maggiorante di (a,b)

$\Rightarrow \mathcal{M}(E) = [b, +\infty)$

$\nexists$ il massimo di (a,b)

— o —

DEF Sia $E \subseteq \mathbb{R}$ e sia $\lambda \in \mathbb{R}$.

Dico che λ è ESTREMO SUPERIORE DI E se

1) $\forall x \in E \quad x \leq \lambda$ (cioè λ è un maggiorante)

2) Se $\mu \in \mathbb{R}$ e $\mu < \lambda$, allora μ non è un maggiorante

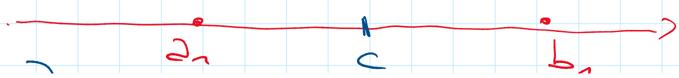
TEOREMA Se $E \subseteq \mathbb{R}$, $E \neq \emptyset$ ed E è limitato superiormente, allora esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ estremo superiore di E.

DIM. Per ipotesi E è limitato superiormente quindi $\mathcal{M}(E) \neq \emptyset$

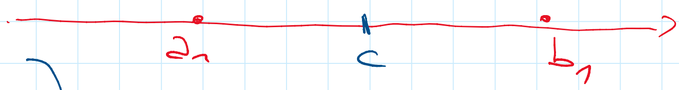
Sia $b_1 \in \mathcal{M}(E)$

Per ipotesi $E \neq \emptyset \Rightarrow \exists x \in E \Rightarrow x - 1$ non può essere maggiorante di $E \Rightarrow \mathcal{M}(E) \neq \mathbb{R}$

Sia $a_1 \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{M}(E)$



Sia $a_1 \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{M}(E)$



Considero l'intervallo $[a_1, b_1]$

Sia c il suo punto medio $c := \dfrac{a_1 + b_1}{2}$

Se $c \in \mathcal{M}(E)$

$a_2 = a_1 \qquad b_2 = c$

$[a_2, b_2]$

Se $c \notin \mathcal{M}(E)$

$a_2 = c \qquad b_2 = b_1$

$[a_2, b_2]$

⋮

Costruisco una famiglia di intervalli dimezzati $[a_n, b_n]$

t.c. $a_n \notin \mathcal{M}(E)$ e $b_n \in \mathcal{M}(E)$.

Per l'assioma di completezza $\exists! \, \lambda \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] = \{\lambda\}$$

Voglio dimostrare che λ è estremo superiore di E.

1) Mostro che $\lambda \in \mathcal{M}(E)$

Per assurdo, se $\lambda \notin \mathcal{M}(E)$: $\exists x \in E$ t.c. $\lambda < x$

$\forall n \in \mathbb{N} \qquad a_n \le \lambda < x \le b_n$ cioè $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n]$

$\Rightarrow x = \lambda$ ASSURDO

2) Mostro che λ è il più piccolo dei maggioranti.

Per assurdo: sia $\mu \in \mathcal{M}(E)$ t.c. $\mu < \lambda$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \le \mu < \lambda \le b_n \Rightarrow \mu \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n]$

$\Rightarrow \mu = \lambda$ per l'assioma di completezza.

ASSURDO.

Sia $E \subseteq \mathbb{R}$. Dico che E è limitato inferiormente se $\mu \in \mathbb{R}$ t.c. $\mu \leq x \quad \forall x \in E$.

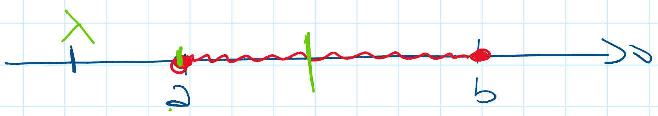
Sia $E \subseteq \mathbb{R}$ e sia $\mu \in \mathbb{R}$. Dico che μ è un minorante di E se $\mu \leq x \quad \forall x \in E$

OSSERVAZIONE Se $E \subseteq \mathbb{R}$, allora E è limitato inferiormente SSE esiste almeno un minorante di E.

Sia $E \subset \mathbb{R}$. Dico che μ è minimo di E se

1) μ è minorante di E
2) $\mu \in E$

$E = [a,b]$

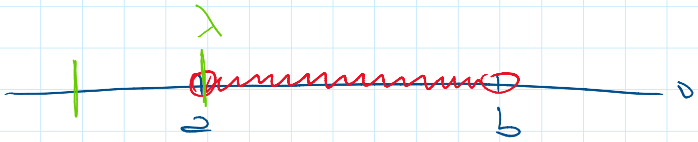


$m(E) :=$ insieme dei minoranti di E

$\Rightarrow m([a,b]) = (-\infty, a]$

$\Rightarrow a$ è il minimo di $[a,b]$

$E = (a,b)$



$m((a,b)) = (-\infty, a]$

$\nexists$ il minimo di (a,b).

— o —

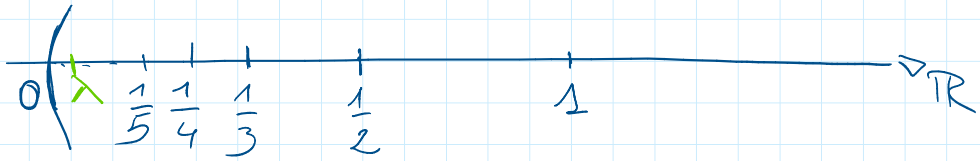
Sia $E \subseteq \mathbb{R}$ e sia $\mu \in \mathbb{R}$. Dico che μ è estremo inferiore di E se:

1) μ è un minorante di E
2) Se $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\lambda > \mu$, allora λ non è minorante di E

2) Se $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\lambda > \mu$, allora λ non è minorante di E

TEOREMA (no dim) Sia $E \subseteq \mathbb{R}$, $E \neq \emptyset$ e limitato inferiormente. Allora E ammette estremo inferiore.

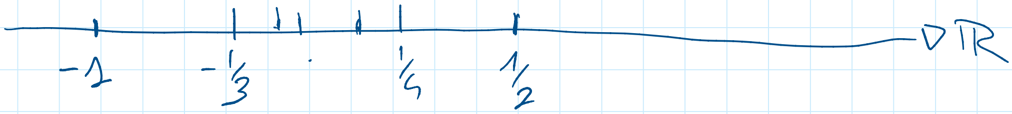
ESEMPIO $E := \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \right\}$



$\mathcal{M}(E) = [1, +\infty)$ $\qquad$ $\max E = 1 = \sup E$

$m(E) = (-\infty, 0]$ $\qquad$ $\nexists \min E$ $\qquad$ $\inf E = 0$

$$E = \left\{ \frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \right\}$$



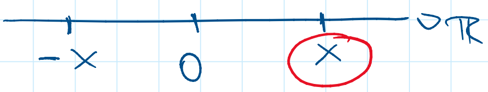
$\mathcal{M}(E) = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$ $\qquad$ $\max E = \frac{1}{2} = \sup E$

$m(E) = (-\infty, -1]$ $\qquad$ $\min E = -1 = \inf E$

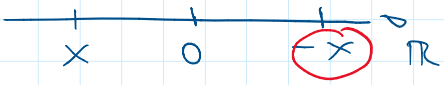
VALORE ASSOLUTO DI UN NUMERO REALE

$x \in \mathbb{R}$ $\qquad$ $|x| := \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$

se $x > 0$



se $x < 0$



$$|x| = \max\{x, -x\}$$

— ∘ —

$x \in \mathbb{R}$ $x^2 \geq 0$ $\sqrt{x^2} = |x|$

— ∘ —

DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE

$\forall a, b \in \mathbb{R}$ si ha $|a+b| \leq |a| + |b|$

e $\big||a| - |b|\big| \leq |a+b|$

Dim (a) $|a| = \max\{a, -a\}$ $|b| = \max\{b, -b\}$ (b)

$\Rightarrow \begin{cases} a \leq |a| \\ b \leq |b| \end{cases}$ $\Leftarrow$ $\begin{cases} a+b \leq |a| + b \\ b + |a| \leq |a| + |b| \end{cases}$

$\Rightarrow \boxed{a+b \leq |a| + |b|}$

(a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ $\begin{cases} -a \leq |a| \\ -b \leq |b| \end{cases}$ $\Leftarrow$ $\begin{cases} -a-b \leq |a| - b \\ |a| - b \leq |a| + |b| \end{cases}$

$\Rightarrow \boxed{-a-b \leq |a| + |b|}$ $-(a+b) \leq |a| + |b|$

$\Rightarrow |a+b| \leq |a| + |b|$

— ∘ —

$|a| = |a+0| = |a+b-b| = |(a+b)-b| =$
$= |(a+b)+(-b)| \leq |a+b| + |-b| = |a+b| + |b|$ $\Leftarrow$

$|b| = |b+0| = |b+a-a| = |(a+b)+(-a)| \leq$
$\leq |a+b| + |-a| = |a+b| + |a|$ $\Leftarrow$

$$|a| \le |a+b| + |b| \qquad |a|-|b| \le |a+b| + |b| - |b|$$

$$|a|-|b| \le |a+b|$$

$$|b| \le |a+b| + |a| \qquad |b|-|a| \le |a+b| + |a| - |a|$$

$$|b|-|a| \le |a+b|$$

$$-\left(|a|-|b|\right) \le |a+b|$$

$$\Rightarrow \Big| \, |a|-|b| \, \Big| \le |a+b|$$

— o —

ESERCIZIO Trovare gli $x \in \mathbb{R}$ t.c. $|x+2| \le 2x-3$

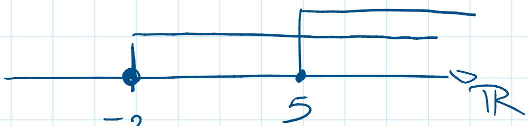
$$|x+2| = \begin{cases} x+2 & \text{se } x+2 \ge 0 \\ -(x+2) & \text{se } x+2 < 0 \end{cases}$$

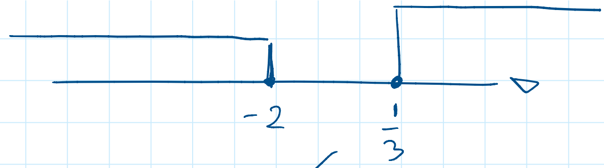
$$\begin{cases} x+2 \ge 0 \\ x+2 \le 2x-3 \end{cases} \vee \begin{cases} x+2 < 0 \\ -(x+2) \le 2x-3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \ge -2 \\ x \ge 5 \end{cases} \vee \begin{cases} x < -2 \\ -x-2 \le 2x-3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \ge -2 \\ x \ge 5 \end{cases} \vee \begin{cases} x \le -2 \\ 3x \ge 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \ge -2 \\ x \ge 5 \end{cases} \vee \begin{cases} x \le -2 \\ x \ge \frac{1}{3} \end{cases}$$





$\emptyset$

$[5, +\infty)$

$E = [5, +\infty)$

$|x+2| \leq |3-x|$

$(|x+2|)^2 \leq (|3-x|)^2$

$(x+2)^2 \leq (3-x)^2$

$\cancel{x^2} + 4x + 4 \leq 9 + \cancel{x^2} - 6x$

$10x \leq 5 \qquad x \leq \frac{1}{2}$

$E = \left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$

Se $a \geq 0$ $b \geq 0$

$a \leq b \underset{?}{\Rightarrow} a^2 \leq b^2$

$a^2 \leq b^2 \underset{?}{\Rightarrow} a \leq b$