

EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE (EDO)

$$y' = 0 \quad x \in (a, b) \quad y(x) \equiv C$$

$$y' = 0 \quad y(0) = 0 \quad x \in (-1, 1) \cup (2, 3) \quad y(x) = 0 \begin{cases} 0 & x \in (-1, 1) \\ C & x \in (2, 3) \end{cases}$$

① $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ EDO di ordine n

$|y'| = 1 \quad y(0) = 0$

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$
 EDO DI ORDINE n in forma normale -

$$y' = y^2$$
 EDO DEL 1° ORDINE IN FORMA NORMALE

$$y' = f(x, y) \quad f(x, y) = g(y) = y^2 \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

$$y(x) = \frac{-1}{x+1} \quad x \neq -1 \quad x \in (-\infty, -1) \quad x \in (-1, +\infty)$$

$$y(x) = -(x+1)^{-1}$$

$$y'(x) = -(-1)(x+1)^{-2} = (x+1)^{-2} = y^2(x)$$

$$y(x) \equiv 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad y' = y^2$$

$$y_1(x) = \frac{-1}{x+1} \quad y_2(x) = 0 \quad y_2(0) = -1 \quad y_2(0) = 0$$

TEOREMA DI CAUCHY - KOVALENSKAYA

Sia $t_0 \in \mathbb{R}$ e siano $y_0, y_1, \dots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$

Allora $\exists \varepsilon > 0$ t.c. il pb diff $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$

$$y(t_0) = y_0$$

$$y'(t_0) = y_1$$

$$y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}$$

ammette 1! soluzione $y(x)$ definita nell'intervallo $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$

— o —

$$\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

$$y(x) = \frac{-1}{x+1} \quad x \in (-1, +\infty)$$

$$\begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ -1 \quad t_0=0 \quad 1 \end{array}$$

$$\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

$$y(x) \equiv 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (-\varepsilon, \varepsilon) \quad \forall \varepsilon > 0$$

— o —

$$y' = ky$$

$$f(x, y) = ky \quad \leftarrow \text{omogenea lineare}$$

1) $C \in \mathbb{R} \quad y(x) = C e^{kx}$ è soluzione dell'eq.

$$y'(x) = C k e^{kx} = k (C e^{kx}) = k y(x)$$

2) Viceversa supponiamo che $y(x)$ sia soluzione dell'eq.

in un intervallo (a, b)

$$\forall x \in (a, b)$$

$$y'(x) = k y(x)$$

$$z(x) = e^{-kx}$$

$$e^{-kx} y'(x) - k e^{-kx} y(x) = 0$$

$$\forall x \in (a, b) \quad y'(x) - k e^{-kx} y(x) = 0$$

$$\Rightarrow \exists C \in \mathbb{R} \quad \text{T.c.} \quad e^{-kx} y(x) = C \quad \forall x \in (a, b)$$

$$\Rightarrow y(x) = C e^{kx}$$

$$\begin{cases} y' = ky \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Cerca una soluzione nella forma $y(x) = C e^{kx}$ $C \in \mathbb{R}$
 poiché le soluzioni dell'eq $y' = ky$ sono tutte di questa forma.

$$y(x) = C e^{kx} \quad y(x_0) = y_0$$

$$y_0 = C e^{kx_0} \quad C = y_0 e^{-kx_0} \quad \Rightarrow y(x) = y_0 e^{-kx_0} e^{kx}$$

$$\Rightarrow y(x) = y_0 e^{k(x-x_0)} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

— = —

EDO LINEARE DEL 1° ORDINE

Sono edo della forma $y' = \alpha(t)y + \beta(t)$

con α e β funzione continue su un intervallo (a, b)

① $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ sono costanti.

$$\begin{cases} y' = \alpha y + \beta \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \leftarrow$$

$$f(t, y) = g(y) = 2y + \beta = 2\left(y + \frac{\beta}{2}\right)$$

Suppongo che $y(t)$ sia soluzione - Considero la funzione $z(t) = y(t) + \frac{\beta}{2} \Rightarrow y(t) = z(t) - \frac{\beta}{2}$

$$\Rightarrow z'(t) = y'(t) = 2\left(y(t) + \frac{\beta}{2}\right) = 2z(t) \quad z' = 2z$$

$$\Rightarrow \exists C \in \mathbb{R} \quad \text{T.c.} \quad z(t) = C e^{2t}$$

$$\Rightarrow \exists C \in \mathbb{R} \quad \text{T.c.} \quad y(t) = C e^{2t} - \frac{\beta}{2} \quad \Leftarrow$$

Impongo la condizione $y(t_0) = y_0$

$$y_0 = C e^{2t_0} - \frac{\beta}{2} \Rightarrow C e^{2t_0} = y_0 + \frac{\beta}{2}$$

$$\Rightarrow C = e^{-2t_0} \left(y_0 + \frac{\beta}{2}\right)$$

$$y(t) = e^{-2t_0} \left(y_0 + \frac{\beta}{2}\right) e^{2t} - \frac{\beta}{2} = \left(y_0 + \frac{\beta}{2}\right) e^{2(t-t_0)} - \frac{\beta}{2}$$

EQ. A VARIABILI SEPARABILI

$$y' = f(t, y)$$

$$f(t, y) = \alpha(t) g(y)$$

$$\begin{cases} y' = \alpha(t) g(y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Se $g(y_0) = 0 \Rightarrow y(t) \equiv y_0$ è soluzione del pb.

$\Rightarrow$ per l'unicità è la soluzione del pb.

Infatti:

$$y(t) \equiv y_0 \Rightarrow y'(t) \equiv 0$$

$$f(t, y(t)) = \alpha(t) g(y(t)) = \alpha(t) g(y_0) = 0$$

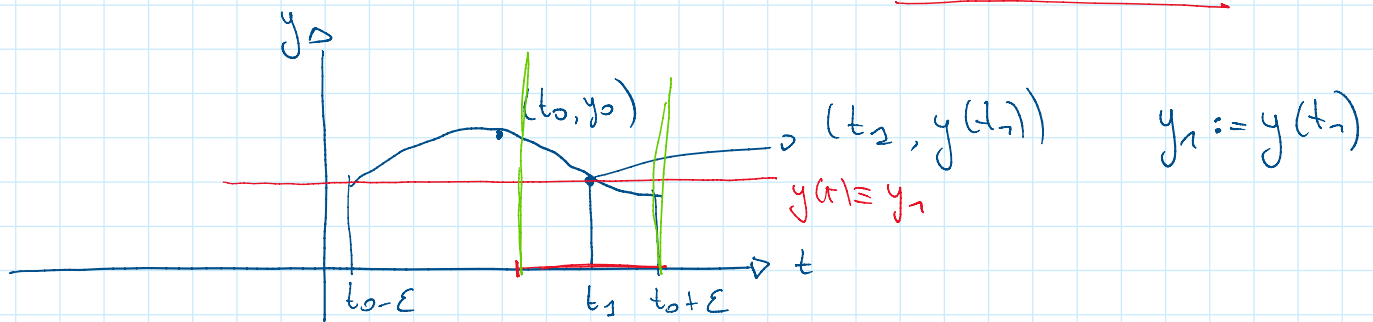
$$y(t) \equiv y_0 \Rightarrow y'(t) \equiv 0$$

$$\lambda(t)g(y(t)) = \lambda(t)g(y_0) = 0$$

Supponiamo $g(y_0) \neq 0$, p.es. $g(y_0) > 0$

Supponiamo di avere $y(t)$ soluzione del nostro pb. in un intervallo $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$

Può esistere $t_1 \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ T.c. $g(y(t_1)) = 0$?



Considero il pb:

$$\begin{cases} y' = \lambda(t)g(y) \\ \textcircled{\star} \quad y(t_1) = y_1 \end{cases}$$

Se $g(y_1) = 0 \Rightarrow y(t) \equiv y_1$ è soluzione $\textcircled{\star}$

$g(y_0) > 0$, $g(y(t))$ non si può annullare

Pero $g(y(t)) = g \circ y(t)$ è continua

↓ La funzione densità $= 0$ è continua
continua per ipotesi

$\Rightarrow g(y(t)) > 0$ su tutto l'intervallo $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ su cui la soluzione è definita.

Analogamente: se $g(y_0) < 0 \Rightarrow g(y(t)) < 0$ su tutto l'intervallo su cui la $y(t)$ è definita.

$$\int y' = \lambda(t)g(y)$$

$$\begin{cases} y' = \alpha(t)g(y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad g(y_0) \neq 0$$

Supponiamo che $y(t)$ sia soluzione in un intervallo (a,b) contenente t_0

$$\forall t \in (a,b) \quad y'(t) = \alpha(t)g(y(t)) \quad \Leftrightarrow g(y(t)) \neq 0$$

$$\Rightarrow \frac{y'(t)}{g(y(t))} = \alpha(t) \quad \forall t \in (a,b)$$

$$\int_{t_0}^t \frac{y'(s)}{g(y(s))} ds = \int_{t_0}^t \alpha(s) ds \quad \forall t \in (a,b)$$

$$y = y(s) \quad dy = y'(s) ds$$

$$s = t_0 \quad y = y(t_0) = y_0$$

$$s = t \quad y = y(t)$$

$$\int_{y_0}^{y(t)} \frac{1}{g(y)} dy = \int_{t_0}^t \alpha(s) ds \quad \leftarrow$$

$$G(z) = \int_{y_0}^z \frac{1}{g(y)} dy$$

$$G'(z) = \frac{1}{g(z)}$$

$$G(y(t)) = \int_{t_0}^t \alpha(s) ds$$

$$G'(z) \Big|_{z=y(t)}$$

$$\frac{d}{dt} G(y(t)) = G'(y(t)) \cdot y'(t)$$

ESEMPIO

$$\begin{cases} y' = ty^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y(0) = 1 \end{cases}$$

$$y' = \alpha(t)g(y)$$

$$\alpha(t) = t$$

$$g(y) = y^2$$

$$= 0$$

$$g(y) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$y = 0$$

$$\text{No } y_0 = 1 \neq 0$$

$$y' = ty^2$$

$$y'(t) = ty^2(t)$$

$$\frac{y'(t)}{y^2(t)} = t$$

$$\int_{t_0}^t \frac{y'(s)}{y^2(s)} ds = \int_{t_0}^t s ds = \frac{s^2}{2} \Big|_{s=t_0}^{s=t} = \frac{1}{2} (t^2 - t_0^2) = \frac{1}{2} t^2$$

$t_0 = 0 \quad y_0 = 1$

$$y = y(s) \quad dy = y'(s) ds$$

$$s = t_0 \quad y = y(t_0) = y_0 = 1$$

$$s = t \quad y = y(t)$$

$$\int_1^{y(t)} \frac{dy}{y^2} = \frac{1}{2} t^2$$

$$\int_1^{y(t)} y^{-2} dy = \frac{1}{2} t^2$$

$$-y^{-1} \Big|_{y=1}^{y=y(t)} = \frac{1}{2} t^2$$

$$\boxed{\frac{-1}{y(t)} + \frac{1}{1}} = \frac{1}{2} t^2$$

$$\frac{1}{y(t)} = 1 - \frac{1}{2} t^2 = \frac{2-t^2}{2}$$

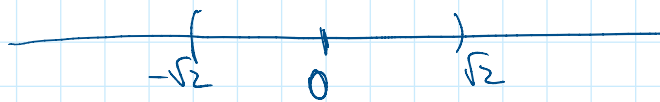
$$y(t) = \frac{2}{2-t^2}$$

$$t_0 = 0$$

$$2-t^2 = 0$$

$$(\sqrt{2}-t)(\sqrt{2}+t) = 0$$

$$t = -\sqrt{2}, \quad t = \sqrt{2}$$



$$y(t) = \frac{2}{2-t^2} \quad t \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$$

EDO LINEARE OMOGENE

$$\begin{cases} y' = \alpha(t)y \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

$$g(y) = y$$

$$\Rightarrow y(t) \equiv 0$$

$$g(y) = 0 \text{ sse } y = 0$$

è soluzione
triviale.

Di conseguenza: se $y_0 = 0 \Rightarrow y(t) \equiv 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

Supponiamo $y_0 \neq 0$

Se $y_0 > 0 \Rightarrow y(t) > 0$ poiché $g(y) = y$

Se $y_0 < 0 \Rightarrow y(t) < 0$

Se $y(t)$ soluzione $y'(t) = \alpha(t)y(t)$

$$\Rightarrow \frac{y'(t)}{y(t)} = \alpha(t)$$

$$\int_{t_0}^t \frac{y'(s)}{y(s)} dy = \int_{t_0}^t \alpha(s) ds$$

$$y = y(s) \quad dy = y'(s) ds$$

$$s = t_0 \quad y = y(t_0) = y_0$$

$$s = t \quad y = y(t)$$

$$\int_{y_0}^{y(t)} \frac{dy}{y} = \int_{t_0}^t \alpha(s) ds$$

$u = u(t) \quad n^t$

$$\ln |y| \Big|_{y=y_0}^{y=y(t)} = \int_{t_0}^t \alpha(s) ds$$

$$\ln |y(t)| - \ln |y_0| = \int_{t_0}^t \alpha(s) ds$$

$$\ln \left| \frac{y(t)}{y_0} \right| = \int_{t_0}^t \alpha(s) ds$$

$$\ln \frac{y(t)}{y_0} = \int_{t_0}^t \alpha(s) ds$$

$$\frac{y(t)}{y_0} = \exp \left(\int_{t_0}^t \alpha(s) ds \right)$$

$$y(t) = y_0 \exp \left(\int_{t_0}^t \alpha(s) ds \right)$$

se α è continue
in $(t_0 - \varepsilon_1, t_0 + \varepsilon_2)$

$\Rightarrow y$ è definita
sullo stesso intervallo

EDO LINEARE NON OMOGENEA

$$\begin{cases} y' = \alpha(t)y + \beta(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

con α e β funzioni continue
su un intervallo (a, b)
 $t_0 \in (a, b)$

$$\underline{y' = \alpha y + \beta} \quad y = \left(y_0 + \frac{\beta}{\alpha} \right) e^{\int_{t_0}^t \alpha(s) ds} - \frac{\beta}{\alpha}$$

Supponiamo che $y(t)$ sia una soluzione su un intervallo I

$$\forall t \in I \quad y'(t) = \alpha(t)y(t) + \beta(t)$$

Moltiplico per $\exp \left(- \int_{t_0}^t \alpha(s) ds \right)$

Moltiplico per $\exp\left(-\int_{t_0}^t \alpha(s) ds\right)$

$$y'(t) \exp\left(-\int_{t_0}^t \alpha(s) ds\right) = \alpha(t) y(t) \exp\left(-\int_{t_0}^t \alpha(s) ds\right) + \beta(t) \exp\left(-\int_{t_0}^t \alpha(s) ds\right)$$

$$y'(t) \exp\left(-\int_{t_0}^t \alpha(s) ds\right) - y(t) \alpha(t) \exp\left(-\int_{t_0}^t \alpha(s) ds\right) = \beta(t) \exp\left(-\int_{t_0}^t \alpha(s) ds\right)$$

$$\frac{d}{dt} \left(y(t) \exp\left(-\int_{t_0}^t \alpha(s) ds\right) \right) = \beta(t) \exp\left(-\int_{t_0}^t \alpha(s) ds\right) \quad \forall t \in I$$

$$t \in I \quad \int_{t_0}^t \frac{d}{dz} \left(y(z) \exp\left(-\int_{t_0}^z \alpha(s) ds\right) \right) dz = \int_{t_0}^t \beta(z) \exp\left(-\int_{t_0}^z \alpha(s) ds\right) dz$$

$$y(z) \exp\left(-\int_{t_0}^z \alpha(s) ds\right) \Big|_{z=t_0}^{z=t} = \int_{t_0}^t \beta(z) \exp\left(-\int_{t_0}^z \alpha(s) ds\right) dz$$

$$y(t) \exp\left(-\int_{t_0}^t \alpha(s) ds\right) - y_0 = \int_{t_0}^t \beta(z) \exp\left(-\int_{t_0}^z \alpha(s) ds\right) dz$$

$$y(t) = \exp\left(+\int_{t_0}^t \alpha(s) ds\right) \left[y_0 + \int_{t_0}^t \beta(z) \exp\left(-\int_{t_0}^z \alpha(s) ds\right) dz \right]$$

ESEMPLO

$$y' = y + t^2$$

$$\cancel{y(t_0) = y_0}$$

① $0 < \alpha \in \mathbb{R}$

$$y' = y$$

$$y(t) = C e^t$$

$$y(t) = C(t) e^t$$

$$y'(t) = C'(t) e^t + C(t) e^t$$

$y(t)$ è soluzione sse $C'(t)e^t + \cancel{C(t)e^t} = \cancel{C(t)e^t} + t^2$

SSE

$$C'(t) = t^2 e^{-t}$$

$$C(t) = \int t^2 e^{-t} dt = (\text{per parti}) = e^{-t}(-t^2 - 2t - 2) + C \quad C \in \mathbb{R}$$

$$y(t) = \left(e^{-t}(-t^2 - 2t - 2) + C \right) e^t = Ce^t - t^2 - 2t - 2 \quad C \in \mathbb{R}$$

$$y(t_0) = y_0$$

$$y_0 = Ce^{t_0} - t_0^2 - 2t_0 - 2$$

Ricavo C