Cognome e Nome ____

Matricola ____

Primo compitino di Matematica e Statistica – SFA-CQ
22 novembre 2019

Esercizio 1. Determinare, se esiste, l'asintoto per $x \to -\infty$ della funzione

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^3 - 27}{x}}.$$

Esistono anche altri asintoti? Quali?

Esercizio 2. Tracciare il grafico della funzione $f(x) = x^{-3} \ln(x)$ indicando esplicitamente: dominio, asintoti, eventuali estremi relativi, gli intervalli di monotonia, e di convessità. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ indicare il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = k$.

Esercizio 3. Calcolare, se esiste, il seguente limite indicando chiaramente il procedimento usato:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(3x)}{\sin^2(2x)}$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^3-27}{x}}$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \sqrt{\frac{x^3\left(1-\frac{27}{x^3}\right)}{x}} = \lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2\left(1-\frac{27}{x^3}\right)} = +\infty$$

$$\frac{f(x)}{x} = -\sqrt{\frac{x^3-27}{x^3}} = -\sqrt{1-\frac{27}{x^3}} \to -1$$

$$f(x)+x = \sqrt{\frac{x^3-27}{x}} + x = \frac{\frac{x^3-27}{x} - x^2}{\sqrt{\frac{x^3-27}{x}} - x} =$$

$$= \frac{\cancel{x^3} - 27 - \cancel{x^3}}{x\left(\sqrt{x^2 - \frac{27}{x}} - x\right)} \to 0 \qquad \boxed{y = -x}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x^3-27}{x}} = \sqrt{\frac{x^3-27}{x^3}} = \sqrt{1-\frac{27}{x^3}} \to 1$$

$$f(x) - x = \sqrt{\frac{x^3-27}{x}} - x = \frac{\frac{x^3-27}{x} - x^2}{\sqrt{\frac{x^3-27}{x}} + x}$$

$$\frac{\cancel{x^3} - 27 - \cancel{x^3}}{x\left(\sqrt{\frac{x^3-27}{x}} + x\right)} = 0 \qquad \boxed{y = x}$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = +\infty \qquad \boxed{x = 0}$$ AS. VERTICALE

$f(x) = x^{-3} \ln(x)$

$D = (0, +\infty)$

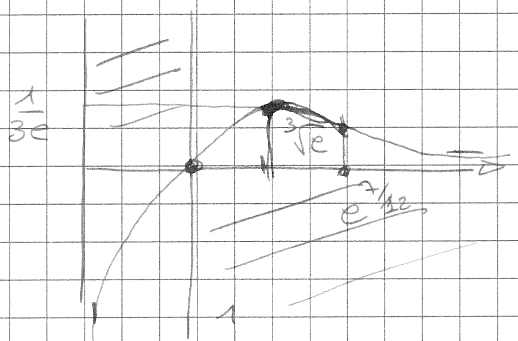
$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$ $\qquad x = 0$ AS VERT.

$\lim_{x \to +\infty} f(x) \qquad \frac{\infty}{\infty}$

$\frac{\ln(x)}{x^3} \overset{H}{=} \frac{x^{-1}}{3x^{+2}} = \frac{1}{3x^3} \to 0$

AS ORIZZ $\boxed{y=0}$

$f(x) \geq 0$ sse $\ln(x) \geq 0$ sse $x \geq 1$



$f'(x) = -3x^{-4} \ln(x) + x^{-3} \cdot x^{-1} =$

$= x^{-4}(1 - 3\ln(x)) \geq 0$

$\ln(x) \leq \frac{1}{3} \qquad x \leq \sqrt[3]{e}$

$f(\sqrt[3]{e}) = e^{-1} \ln(\sqrt[3]{e}) = \frac{1}{3e}$

$f''(x) = -4x^{-5}(1 - 3\ln(x)) - 3x^{-5} =$

$= x^{-5}(-4 + 12\ln(x) - 3) =$

$= x^{-5}(12\ln(x) - 7) \geq 0$

$x \geq e^{7/12}$ F

monotone crescente $(~~0~~, \sqrt[3]{e}]$

monotone decrescente $[\sqrt[3]{e}, +\infty)$

concave $(0, e^{7/12})$

convesse $(e^{7/12}, +\infty)$

Soluzioni di $f(x) = k$

$k \leq 0$ $\exists!$ solut.

$k \in (0, \frac{1}{3e})$ 2 soluzioni

$k = \frac{1}{3e}$ $\exists!$ soluzione

$k > \frac{1}{3e}$ $\nexists$ soluzione.

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos(3x)}{\sin^2(2x)}$$

$$\frac{\frac{1-\cos(3x)}{(3x)^2}\,(3x)^2}{\left(\frac{\sin(2x)}{2x}\right)^2 (2x)^2}$$

$$\frac{1-\cos(3x)}{(3x)^2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{\sin(2x)}{2x}\right)^2} \cdot \frac{9}{4} \to \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{9}{4} = \frac{9}{8}$$