lunedì 11 novembre 2019 09:31

Sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ e sia $x_0\in(a,b)$ t.c. $f'(x_0)$ esiste e $f'(x_0)\neq 0$. Supponiamo $f'(x_0)>0$.

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>0$$

Quindi $\exists\delta>0$ t.c. $\forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ con $x\neq x_0$ si ha

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>0$$

1) Se $x\in(x_0,x_0+\delta)$ abbiamo $f(x)-f(x_0)>0$

cioè $f(x)>f(x_0)$ $\forall x\in(x_0,x_0+\delta)$

2) Se $x\in(x_0-\delta,x_0)$ abbiamo $f(x)-f(x_0)<0$

cioè $f(x)<f(x_0)$ $\forall x\in(x_0-\delta,x_0)$

$f(x)<f(x)$ $\quad x_0 \quad$ $f(x)>f(x_0)$

Di conseguenza abbiamo $\exists\delta>0$ t.c.

$\forall x_1\in(x_0-\delta,x_0)$ e $\forall x_2\in(x_0,x_0+\delta)$ si ha $f(x_1)<f(x_0)<f(x_2)$

Si dice in questo caso che f è crescente nel p.to x_0.

Analogamente, dico che f è decrescente nel p.to x_0

se $\exists\delta>0$ t.c. $\forall x_1\in(x_0-\delta,x_0)$ e $\forall x_2\in(x_0,x_0+\delta)$ si ha

$$f(x_1)>f(x_0)>f(x_2)$$

Si dimostra che se $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ e $x_0\in(a,b)$ è t.c.

$\exists f'(x_0)<0$, allora f è decrescente in x_0.

È vero anche il viceversa?

Se $\exists\delta>0$ t.c. $\forall x_1,x_2$ $\quad x_0-\delta<x_1<x_0<x_2<x_0+\delta$,

è vero che $f'(x_0)>0$?

Se $\exists \delta > 0$ t.c. $\forall x_1, x_2$ $\quad x_0 - \delta < x_1 < x_0 < x_2 < x_0 + \delta$,

è vero che $f'(x_0) > 0$?

La risposta è no: prendo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = x^3$

Sappiamo che f è strettamente crescente su tutto $\mathbb{R}$,

quindi in particolare è crescente in $x_0 = 0$

Infatti se $x_1 < 0 < x_2 \Rightarrow x_1^3 < 0^3 < x_2^3$

D'altra parte $f'(x) = 3x^2$ e quindi $f'(0) = 0$

PROPOSIZIONE Sia $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in (a,b)$ t.c.

$f'(x_0)$ esiste. Allora:

1) Se $f'(x_0) > 0$ $(f'(x_0) < 0)$, allora f è crescente (decrescente) in x_0

2) Se f è crescente (decrescente) in x_0, allora $f'(x_0) \geq 0$ $(f'(x_0) \leq 0)$

DIM ① già vista

② f è crescente in $x_0 \Rightarrow \exists \delta > 0$ T.c. $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$

si ha $f(x) \geq f(x_0)$, quindi $f(x) - f(x_0) \geq 0$

e quindi $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \quad \forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

PROP Sia $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ derivabile in tutto l'intervallo.

Se $f'(x) > 0$ $\forall x \in (a,b)$ allora f è strettamente crescente in (a,b).

Se f è strettamente crescente, allora $f'(x) \geq 0$.

<u>NO DIM</u>

Ricordiamo le definizioni di massimo e minimo

per una funzione f a valori reali:

Sia $A \subset \mathbb{R}$ e sia $f : A \to \mathbb{R}$.

Sia $x_0 \in A$. Dico che x_0 è un pto di massimo (assoluto) per f se $f(x_0) \geq f(x)$ $\forall x \in A$. Il valore $f(x_0)$ si dice MASSIMO (assoluto) della funzione f.

Dico che x_0 è un pto di minimo (assoluto) per f se $f(x_0) \leq f(x)$ $\forall x \in A$. Il valore $f(x_0)$ si dice MINIMO (assoluto) della funzione f.

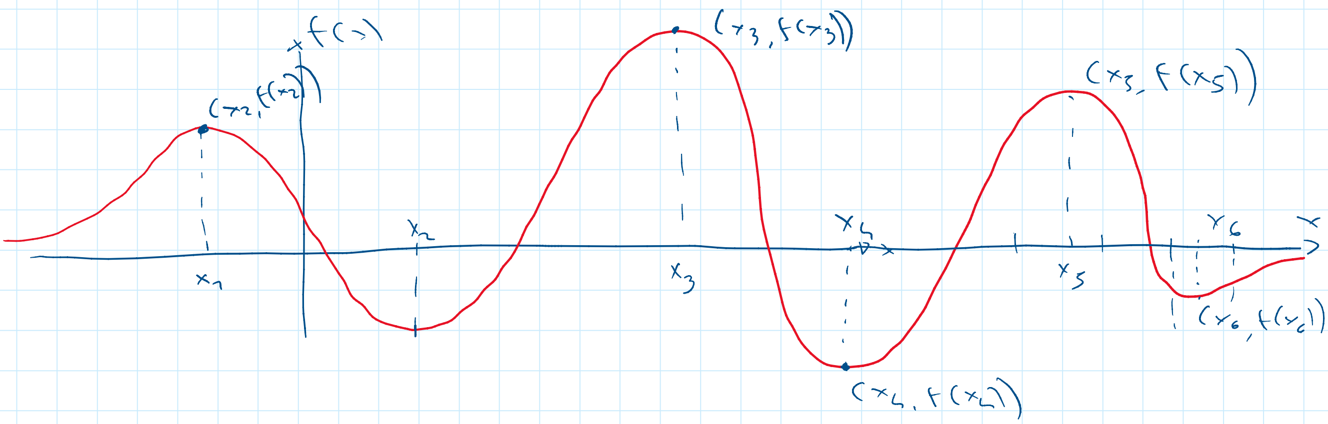
Diamo due nuove definizioni

DEF Sia $f: A \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in A$. Dico che x_0 è un pto di massimo relativo se $\exists \delta > 0$ t.c. $\forall x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ si ha $f(x) \leq f(x_0)$

Il valore $f(x_0)$ si dice un MASSIMO RELATIVO per f.

Dico che x_0 è un pto di minimo relativo se $\exists \delta > 0$ t.c. $\forall x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ si ha $f(x) \geq f(x_0)$

Il valore $f(x_0)$ si dice un MINIMO RELATIVO per f.

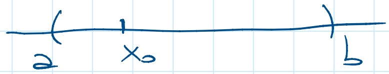


N.B. Ogni pto di massimo (minimo) assoluto è anche pto di massimo (minimo) relativo ma il viceversa non è vero

Teorema Sia $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in (a,b)$ t.c. f è derivabile in x_0 e x_0 è pto di massimo o di minimo relativo. Allora $f'(x_0) = 0$

Dim. Supponiamo che x_0 sia un pto di massimo o di minimo relativo. Allora $f'(x_0) = 0$

Dim. Supponiamo che x_0 sia un p.to di massimo relativo: allora $\exists \delta > 0 : f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in (a,b) \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

Poiché $x_0 \in (a,b)$ 

Eventualmente riducendo δ posso supporre $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (a,b)$

Prendo $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ Sicuramente $f(x) \leq f(x_0)$

cioè $f(x) - f(x_0) \leq 0$ e dunque $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$

Quindi, poiché f è derivabile nel p.to x_0

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

D'altra parte $f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$

cioè $f(x) - f(x_0) \leq 0 \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$

e dunque $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$

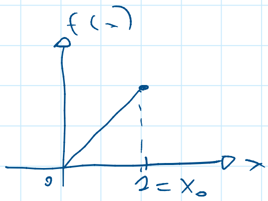
Però f è derivabile nel p.to x_0

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

Quindi deve essere sia $f'(x_0) \leq 0$ che $f'(x_0) \geq 0$

L'unica possibilità è che sia $f'(x_0) = 0$.

— o —

$f : [0,1] \to \mathbb{R} \qquad f(x) = x$ 

$f'(x) = 1$.

— o —

N.B. Il Teorema vale anche con $f : [a,b] \to \mathbb{R}$

perché $x_0 \in (a,b)$

. — . — . —

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Supponiamo che la funzione sia derivabile e di voler determinare il suo massimo assoluto e il suo minimo assoluto.

Supponiamo di voler ricercare il suo massimo assoluto.

Ci sono 3 casi:

1) Il massimo è raggiunto in a
2) Il massimo è raggiunto in b
3) Il massimo è raggiunto in un pto $x_0 \in (a,b)$

Calcolo i valori $f(a)$ e $f(b)$.

Cerco i pti $x_0 \in (a,b)$ t.c. $f'(x_0) = 0$

Diciamo che ne trovo N: $x_1 \dots x_N$.

Calcolo $f(x_1), f(x_2) \dots f(x_N)$

Sicuramente $\max\limits_{[a,b]} f = \max\{f(a), f(b), f(x_1) \dots f(x_N)\}$

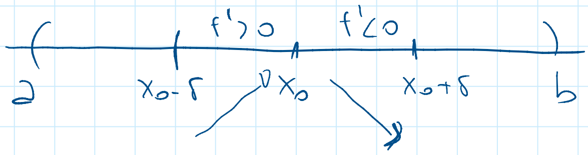
Analogamente $\min\limits_{[a,b]} f = \min\{f(a), f(b), f(x_1) \dots f(x_N)\}$

— . —

Sia $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ derivabile e supponiamo di aver trovato un pto $x_0 \in (a,b)$ t.c. $f'(x_0) = 0$

Supponiamo che $\exists\, (x_0 - \delta, x_0)$, $\delta > 0$ t.c. $f'(x) > 0$ $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$

e che $\exists\, (x_0, x_0 + \delta)$ t.c. $f'(x) < 0$ $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$

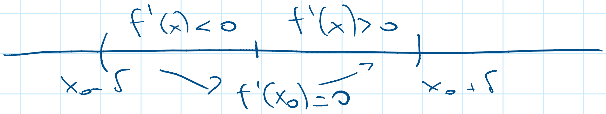


f strettamente crescente in $(x_0 - \delta, x_0) \Rightarrow f(x) \le f(x_0)$ $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$

f strettamente crescente in $(x_0-\delta, x_0) \Rightarrow f(x) \le f(x_0)$ $\forall x \in (x_0-\delta, x_0)$

f strettamente decrescente in $(x_0, x_0+\delta) \Rightarrow f(x) \le f(x_0)$ $\forall x \in (x_0, x_0+\delta)$

Di conseguenza posso dire $f(x) \le f(x_0)$ $\forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$



~~per~~ In $(x_0-\delta, x_0)$ f è strettamente decrescente $\Rightarrow$

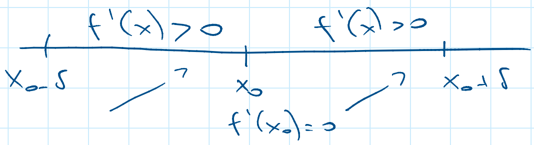
$f(x_0) \le f(x)$ $\forall x \in (x_0-\delta, x_0)$

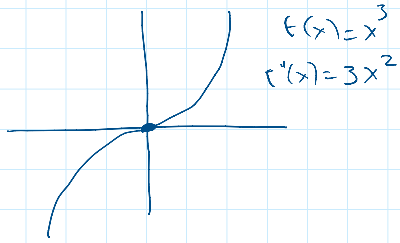
In $(x_0, x_0+\delta)$ f è strettamente crescente

$\Rightarrow f(x_0) \le f(x)$ $\forall x \in (x_0, x_0+\delta)$

Quindi $\forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ $f(x_0) \le f(x)$

cioè x_0 è un p.to di minimo relativo.

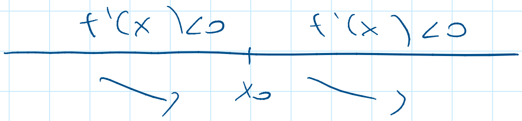




$f(x) < f(x_0)$ $\forall x \in (x_0-\delta, x_0)$

$f(x) > f(x_0)$ $\forall x \in (x_0, x_0+\delta)$

$\Rightarrow x_0$ non è né un p.to di max relativo né un p.to di min relativo



Sia $f: (a,b) \to \mathbb{R}$

Se $x_0 \in (a,b)$ e $f'(x_0) = 0$, x_0 si dice un p.to stazionario per f

Se x_0 è un p.to stazionario per f ma non è né un p.to di min relativo né un p.to di max relativo, un p.to di min relativo né un p.to di max relativo, si dice che x_0 è un p.to di flesso (a tangente orizzontale)

DEF Sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ funzione derivabile.

Considero $g: x\in(a,b)\longmapsto f'(x)\in\mathbb{R}$.

Se g è derivabile in un p.to $x_0\in(a,b)$, dico che f è derivabile due volte nel p.to x_0 e il valore

$$g'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

si dice derivata seconda di x in x_0 e si indica col simbolo $f''(x_0)$ o $\frac{d^2}{dx^2}f(x_0)$

TEO Sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ funzione derivabile.

Sia $x_0\in(a,b)$ p.to stazionario per f e supponiamo che f sia derivabile due volte in x_0 con $f''(x_0)>0$, $f''(x_0)<0$

Allora x_0 è un p.to di minimo relativo.
massimo

DIM. Dimostriamo nel caso $f''(x_0)>0$

$$f''(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}$$

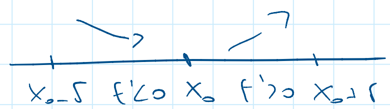
. Poiché $f''(x_0)>0$

$\exists\delta>0$ t.c. $\forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$, $x\neq x_0$ si ha

$$\frac{f'(x)-\cancel{f'(x_0)}^{=0}}{x-x_0}>0$$

$\forall x\in(x_0,x_0+\delta)$ $f'(x)>0$

$\forall x\in(x_0-\delta,x_0)$ $f'(x)<0$



Di conseguenza x_0 è un p.to di minimo relativo.

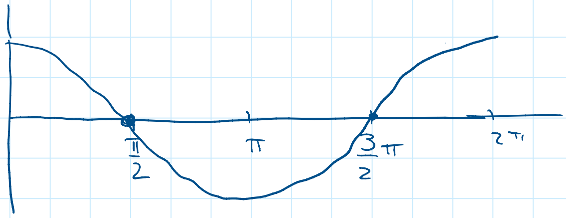
ESEMPIO $f(x)=\sin^2(x)-3\sin(x)+5$

Lo studio in $[a,b]=[0,2\pi]$

$f(0) = f(2\pi) = \sin^2(0) - 3\sin(0) + 5 = 5$

$f'(x) = 2\sin(x)\cos(x) - 3\cos(x) = \cos(x)\underbrace{\left(2\sin(x) - 3\right)}_{\le 2\cdot 1 - 3 = -1}$

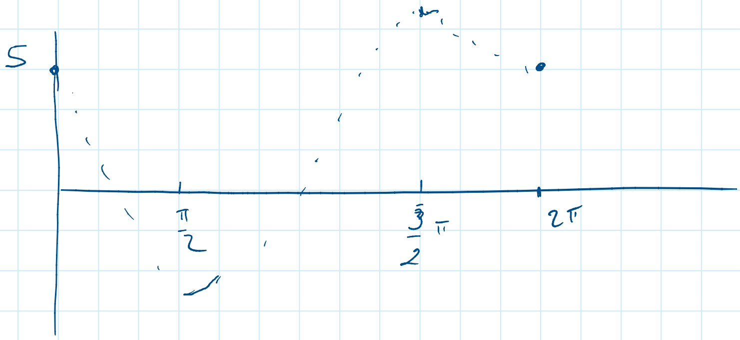
$f'(x) \gtreqless 0$ SSE $\cos(x) \lesseqgtr 0$



Pti stazionari:

$x_1 = \frac{\pi}{2}$

$x_2 = \frac{3}{2}\pi$



$\frac{\pi}{2}$ è pto di min assoluto

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin^2(x) - 3\sin(x) + 5 \Big|_{x=\frac{\pi}{2}} = 1 - 3 + 5 = 3$

$\frac{3}{2}\pi$ è pto di max assoluto

$f\left(\frac{3}{2}\pi\right) = 1 - 3(-1) + 5 = 1 + 3 + 5 = 9$

Per $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \sin^2(x) - 3\sin(x) + 5$ abbiamo

$\max_{\mathbb{R}} f = 9$ e i pti di max sono i pti $\frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$

$\min_{\mathbb{R}} f = 3$ e i pti di min sono i pti $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$

$f(x) = \frac{x^2+4}{x^2-4} = \frac{x^2+4}{(x-2)(x+2)}$ $\quad D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$

$(-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty)$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x^2}\left(1 + \frac{4}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\left(1 - \frac{4}{x^2}\right)} = 1$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$$

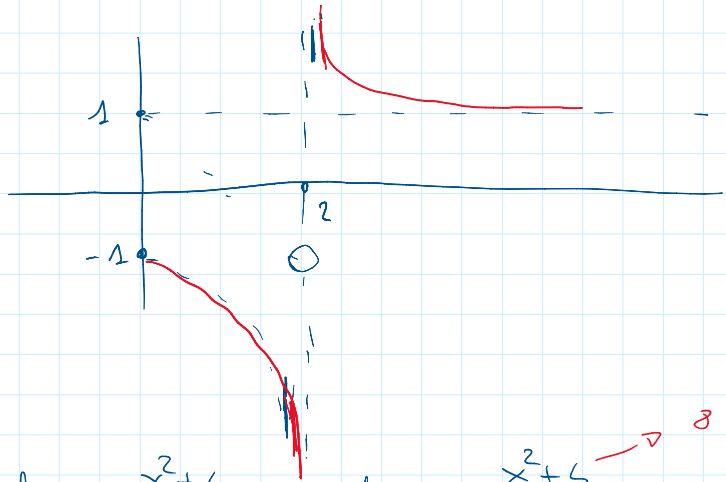
$$f(x) = \frac{x^2+4}{x^2-4} \qquad [0,2) \cup (2,+\infty) \qquad f(0) = -1$$

$$f'(x) = \frac{2x(\cancel{x^2}-4) - 2x(\cancel{x^2}+4)}{(x^2-4)^2} = \frac{-16x}{(x^2-4)^2} \gtrless 0 \text{ sse } -16x \gtrless 0$$

$$x \leq 0$$

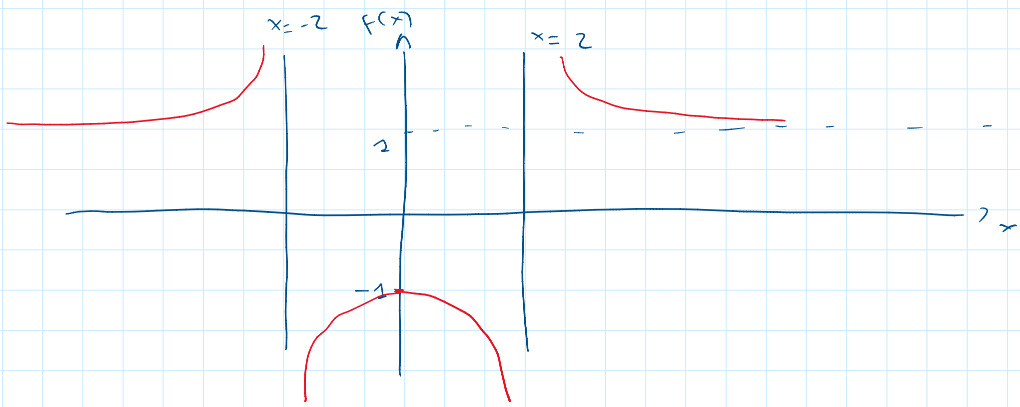
$$f' < 0 \quad 2 \quad f' < 0$$

$f(0) = -1$



$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{x^2+4}{x^2-4} = \lim_{x\to 2^-} \frac{x^2+4}{\underbrace{(x-2)}_{0^-}\underbrace{(x+2)}_{4}} \to 8 = -\infty$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{x^2+4}{\underbrace{(x-2)}_{0^+}\underbrace{(x+2)}_{4}} \to 8 = +\infty$$



∄ max e min assoluti

∄ min relativi

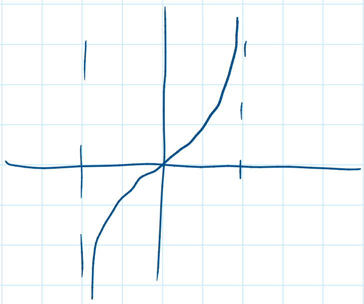
$x_0 = 0$ è pto di max relativo e -1 è max relativo

$$f(x) = \frac{x^2+4}{x^2-4} \qquad f'(x) = \frac{2x(x^2-4) - 2x(x^2+4)}{(x^2-4)^2} =$$

$$= \frac{\cancel{2x^3} - 8x - \cancel{2x^3} - 8x}{(x^2-4)^2}$$

$$2x\left(\cancel{x^2} - 4 - \cancel{x^2} - 4\right) = -16x$$

$$f(x) = \operatorname{arctg}(x) + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)$$



$$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$f(-x) = \operatorname{arctg}(-x) + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{-x}\right) = -\operatorname{arctg}(x) - \operatorname{arctg}\left(+\frac{1}{x}\right)$$
$$= -\left(\operatorname{arctg}(x) + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)\right) = -f(x)$$

$$(0, +\infty)$$

$$f(x) = \operatorname{arctg}(x) + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \left(-x^{-2}\right) =$$

$$= \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{\frac{x^2+1}{x^2}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{\frac{x^2+1}{x^2}} \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{\cancel{x^2}}{x^2+1} \cdot \frac{1}{\cancel{x^2}} = 0$$

$\Rightarrow$ f è costante in $(0, +\infty)$

$f(x) = f(1) \quad \forall x > 0$

$f(1) = \operatorname{arctg}(1) + \operatorname{arctg}(1) =$

$2 \operatorname{arctg}(1) = 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

$\operatorname{tg}(\varphi) = 1 \qquad \underbrace{\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)}$

$$\begin{cases} \sin(\varphi) = \cos(\varphi) \\ \cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi) = 1 \\ \cos(\varphi) > 0 \end{cases}$$

$2\cos^2(\varphi) = 1 \quad \cos^2(\varphi) = \frac{1}{2}$

$\cos(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\varphi = \frac{\pi}{4}$