DERIVATA

$I \subset \mathbb{R}$ intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$

$x_0, x_1 \in I$ $\quad P_0(x_0, f(x_0))$ $P_1(x_1, f(x_1)) \in$ Grafico (f)

$$\frac{y - f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \qquad y = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

$$m = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \qquad q = f(x_0) - x_0 \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Il coefficiente angolare è il rapporto tra l'incremento della funzione e l'incremento della variabile indipendente.

Questo rapporto si chiama RAPPORTO INCREMENTALE

Se esiste finito, il $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$, il coefficiente angolare delle rette secanti si avvicina a questo limite

DEFINIZIONE Sia $I \subset \mathbb{R}$ intervallo. Sia $f : I \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in I$. Dico che f è derivabile in x_0 se esiste finito

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Il valore del limite si indica $f'(x_0)$ o $\frac{df}{dx}(x_0)$

Se f è derivabile in ogni pto $x \in I$, dico che la funzione f è una funzione derivabile e la funzione

$f' : x \in I \longrightarrow f'(x) \in \mathbb{R}$ si dice funzione derivata di f.

OSSERVAZIONE $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ $\qquad x = x_0 + h$

$x \to x_0$ SSE $h \to 0$ $\qquad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

$x \to x_0$ SSE $h \to 0$ $\qquad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

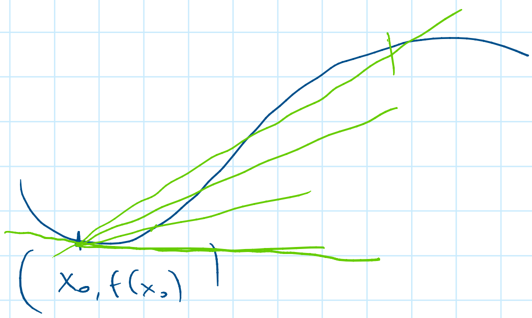
Le rette secanti

$$y = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}(x-x_0)+f(x_0)$$

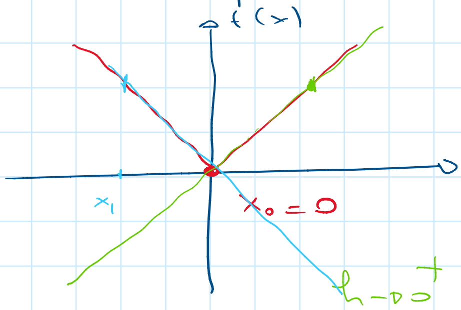
Convergono alla retta $\quad y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

che è detta RETTA TANGENTE AL GRAFICO DI f NEL PUNTO $(x_0, f(x_0))$

Se esiste finito il $\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = L$,
dico che L è la derivata destra di f in x_0
e se esiste finito il $\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = l$,
dico che l è la derivata sinistra di f in x_0.



$f(x) = |x|$



$$h \neq 0 \quad \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{|h|-0}{h} = \frac{|h|}{h} = \begin{cases} 1 \xrightarrow{h \to 0^+} 1 & h>0 \\ -1 \xrightarrow{h \to 0^-} -1 & h<0 \end{cases}$$

PROP Sia $I \subset \mathbb{R}$ intervallo e sia $f: I \to \mathbb{R}$.
Sia $x_0 \in I$ t.c. f è derivabile in x_0.
Allora f è continua in x_0

DIM. Devo dimostrare che $\lim_{h \to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$

o equivalentemente che $\lim (f(x_0+h)-f(x_0)) = 0$

DIM. Devo dimostrare che $\lim_{h \to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$

o, equivalentemente che $\lim_{h\to 0} \left(f(x_0+h) - f(x_0) \right) = 0$

$$f(x_0+h) - f(x_0) = \underbrace{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}_{\to f'(x_0)} \cdot h^{\to 0} \quad \forall h \neq 0$$

Quando $h \to 0$ ho che $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \to f'(x_0) \in \mathbb{R}$

Quindi: $\lim_{h\to 0} \left(f(x_0+h) - f(x_0) \right) = f'(x_0) \cdot 0 = 0$

FUNZIONI COSTANTI

$f : x \in I \mapsto c \in \mathbb{R}$ Fisso $x \in I$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{c-c}{h} = \frac{0}{h} = 0 \quad \forall h \neq 0$$

$\Rightarrow \exists f'(x) = 0 \quad \forall x \in I$.

TEO (NO DIM) Se I è un intervallo e $f : I \to \mathbb{R}$ è una funzione derivabile t.c. $f'(x) = 0 \ \forall x \in I$, allora f è costante.

FUNZIONI AFFINI

$f : x \in \mathbb{R} \mapsto mx + q \in \mathbb{R}$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{m(\cancel{x}+h)+\cancel{q} - (\cancel{mx}+\cancel{q})}{h} = \frac{mh}{h} = m \quad \forall h \neq 0$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} m = m$$

SOMMA E DIFFERENZA DI FUNZIONI DERIVABILI

Siano $f, g : I \to \mathbb{R}$, I intervallo. Sia $x_0 \in I$ t.c. f e g sono entrambe derivabili in x_0.

Allora le funzioni $f+g$ e $f-g$ sono derivabili in x_0

Allora le funzioni $f+g$ e $f-g$ sono derivabili in x_0

e $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

$(f-g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0)$

DIM $\dfrac{(f+g)(x_0+h) - (f+g)(x_0)}{h} = \dfrac{f(x_0+h) + g(x_0+h) - f(x_0) - g(x_0)}{h}$

$= \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} + \dfrac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} f'(x_0) + g'(x_0)$

Analogo per $f-g$.

TEO Siano $f, g : I \to \mathbb{R}$, con I intervallo e supponiamo che $f'(x) = g'(x)$ $\forall x \in I$.

Allora $\exists c \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x) = g(x) + c$ $\forall x \in I$.

DIM Consideriamo $h(x) = f(x) - g(x)$.

Per le proprietà precedenti $\forall x \in I$ $h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$

Quindi $\exists c \in \mathbb{R}$ T.c. $h(x) = c$ $\forall x \in I$

Cioè $f(x) - g(x) = c$ $\forall x \in I$ ovvero $f(x) = g(x) + c$ $\forall x \in I$.

DERIVATA DI $c \cdot f(x)$ con f derivabile

$\dfrac{(cf)(x+h) - (cf)(x)}{h} = \dfrac{cf(x+h) - cf(x)}{h} = c\,\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$\Rightarrow \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(cf)(x+h) - cf(x)}{h} = c \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = cf'(x)$

$f(x) = x^2$

$\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \dfrac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \dfrac{\cancel{x^2} + 2hx + h^2 - \cancel{x^2}}{h} = 2x + h$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}(2x+h) = 2x$$

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$f'(x) = a(x^2)' + (bx+c)' = a\cdot 2x + b = 2ax + b$$

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

$$f(x) = x^k \qquad k\in\mathbb{N}$$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^k - x^k}{h}$$

$$\forall k\in\mathbb{N} \quad \forall a,b\in\mathbb{R} \qquad (a+b)^k = \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}a^j b^{k-j} \longleftarrow$$

$$j,k\in\mathbb{N} \quad 0\le j\le k \qquad \binom{k}{j} := \frac{k!}{j!(k-j)!}$$

$$j\in\mathbb{N} \quad j! := j\cdot(j-1)\cdot(j-2)\dots 2\cdot 1$$

$$0! := 1$$

$$1! = 1 \qquad 2! = 2\cdot 1 = 2 \qquad 3! = 3\cdot 2\cdot 1 = 6$$

$$4! = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 24 \qquad 5! = 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 5\cdot 4! = 120$$

$$(x+h)^k = \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}h^j x^{k-j} =$$

$$= \binom{k}{0}h^0 x^k + \binom{k}{1}h^1 x^{k-1} + \sum_{j=2}^{k}\binom{k}{j}h^j x^{k-j}$$

$$\binom{k}{0} = \frac{k!}{0!(k-0)!} = \frac{k!}{1\,k!} = 1$$

$$\binom{k}{1} = \frac{k!}{1!(k-1)!} = \frac{k\cdot\cancel{(k-1)!}}{1\,\cancel{(k-1)!}} = k$$

$\binom{}{1} \quad 1!(k-1)! \quad 1 \ \cancel{(k-1)!}$

$$(x+h)^k = x^k + k h x^{k-1} + h^2 \sum_{j=2}^{k} \binom{k}{j} \underbrace{h^{j-2}}_{\geq 0} x^{k-j}$$

$$\frac{(x+h)^k - x^k}{h} = \frac{1}{h}\left(\cancel{x^k} + k h x^{k-1} + h^2 \sum_{j=2}^{k} \binom{k}{j} h^{j-2} x^{k-j} - \cancel{x^k}\right)$$

$$= k x^{k-1} + h \underbrace{\sum_{j=2}^{k} \binom{k}{j} h^{j-2} x^{k-j}}_{\text{converge}} \xrightarrow[h \to 0]{} k x^{k-1}$$

$$\Rightarrow (x^k)' = k x^{k-1} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$$

$$f'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_1 = \sum_{j=1}^{n} j a_j x^{j-1}$$

DERIVATA DEL PRODOTTO (Formula di Leibniz)

$f, g : I \to \mathbb{R}$, I intervallo. Entrambe derivabili in un pto $x \in I$

$$\frac{(fg)(x+h) - (fg)(x)}{h} = \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \underset{\substack{\downarrow \\ g(x)}}{g(x+h)} \underbrace{\frac{f(x+h) - f(x)}{h}}_{\substack{\downarrow \\ f'(x)}} + f(x) \underbrace{\frac{g(x+h) - g(x)}{h}}_{\substack{\downarrow \\ g'(x)}} \xrightarrow[h \to 0]{} f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$$

DERIVATA DEL RECIPROCO

$f : I \to \mathbb{R}$ derivabile in un pto $x_0 \in I$. Supponiamo che $f(x_0) \neq 0$. Considero $g := \frac{1}{f}$

Allora $\exists g'(x_0) = \frac{-f'(x_0)}{f^2(x_0)}$

DIM $\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h} = \frac{\frac{1}{f(x_0+h)} - \frac{1}{f(x_0)}}{h} =$

$= \frac{1}{h} \frac{f(x_0)-f(x_0+h)}{f(x_0+h)f(x_0)} = \frac{-(f(x_0+h)-f(x_0))}{h \cdot f(x_0+h) \cdot f(x_0)}$

$= -1 \cdot \underbrace{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}_{\to f'(x_0)} \frac{1}{\underbrace{f(x_0+h)}_{\to f(x_0) \neq 0} f(x_0) \neq 0} \to \frac{-f(x_0)}{f^2(x_0)}$

DERIVATA DEL RAPPORTO

Siano $f, g : I \to \mathbb{R}$. Sia $x_0 \in I$ e supponiamo che f e g siano derivabili in x_0 e che $g(x_0) \neq 0$

Allora $\frac{f}{g}$ è derivabile in x_0 e

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'(x_0)g(x_0) - g'(x_0)f(x_0)}{g^2(x_0)}$$

DIM $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = f'(x_0)\left(\frac{1}{g}\right)(x_0) + f(x_0)\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0)$$

$$= \frac{f'(x_0)}{g(x_0)} + f(x_0) \cdot \frac{-g'(x_0)}{g^2(x_0)} = \frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

$f(x) = x^{-n}$ $\quad n \in \mathbb{N}$

$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ $\qquad (x^{-n})' = \frac{-(x^n)'}{(x^n)^2} = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = -n\, x^{n-1-2n}$

$$\ldots = \frac{\ldots}{x^n} \qquad (\ldots)' = \frac{\ldots}{(x^n)^2} = \frac{\ldots}{x^{2n}} = \ldots$$

$$(x^{-n})' = -n\, x^{-n-1}$$

COMPOSIZIONE DI FUNZIONI DERIVABILI

Sia $f: I \to \mathbb{R}$, I intervallo derivabile in un pto $x_0 \in I$.

Sia $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile nel pto $y_0 := f(x_0)$.

Allora la funzione $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ è derivabile in x_0

e $(g \circ f)'(x_0) = g'(y_0) \cdot f'(x_0) = g'(f(x_0))\, f'(x_0)$

DIM
$$\frac{(g\circ f)(x_0+h) - (g \circ f)(x_0)}{h} =$$

$$= \frac{g(f(x_0+h)) - g(f(x_0))}{f(x_0+h) - f(x_0)} \cdot \underbrace{\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}_{\to f'(x_0)}$$

Quando $h \to 0$

$f(x_0+h) \to f(x_0)$ $\qquad$ $f(x_0+h) = \underbrace{f(x_0)}_{=y_0} + k$ con $k \to 0$

$$\frac{g(f(x_0+h)) - g(f(x_0))}{f(x_0+h) - f(x_0)} = \frac{g(y_0+k) - g(y_0)}{k} \to g'(y_0) = g'(f(x_0))$$

$$\Rightarrow (g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))\, f'(x_0)$$

DERIVATA DELLA FUNZIONE INVERSA

$f: x \in I \to f(x) \in J$ $\qquad$ funzione invertibile

$g = f^{-1} : y \in J \to g(y) \in I$.

Sia $x_0 \in I$ t.c. f è derivabile in x_0 e sia $y_0 = f(x_0)$

Allora g è derivabile in y_0 e $g'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$ cioè

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(g(y_0))}$$

$$g'(y_0) = \frac{}{f'(g(y_0))}$$

$y_0, y_1 \in J$ $\qquad \dfrac{g(y_1)-g(y_0)}{y_1-y_0}$ $\qquad y_0 = f(x_0)$

$\exists!\, x_1 \in I$ t.c. $y_1 = f(x_1)$

$g(y_1) = g(f(x_1)) = x_1 \qquad g(y_0) = g(f(x_0)) = x_0$

$$\frac{g(y_1)-g(y_0)}{y_1-y_0} = \frac{x_1-x_0}{f(x_1)-f(x_0)} = \frac{1}{\dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}} \to \frac{1}{f'(x_0)}$$

$y_1 \to y_0$ sse $x_1 \to x_0$

DERIVATA DELLA RADICE n-ESIMA

$n \in \mathbb{N} \qquad g(x) = x^{\frac{1}{n}} \qquad x \in [0,+\infty)$

g è la funzione inversa di $f: x \in [0,+\infty) \mapsto x^n \in [0,+\infty)$

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)}\Big|_{x=g(y)} = \frac{1}{n x^{n-1}}\Big|_{x=g(y)=y^{\frac{1}{n}}}$$

$$= \frac{1}{n\, y^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{n} y^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{n} y^{\frac{1}{n}-1}$$

$f(x) = x^3$

$f(5) = x^3\Big|_{x=5}$

$f(g(x)) = f(y)\Big|_{y=g(x)}$

$$\left(y^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{n} y^{\frac{1}{n}-1}$$

DERIVATA DI UNA POTENZA RAZIONALE

$f: x \in [0,+\infty) \to x^{\frac{p}{q}} \in [0,+\infty) \qquad p \in \mathbb{Z} \quad q \in \mathbb{N}, q>0$

$$x^{\frac{p}{q}} = \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p = (h \circ g)(x)$$

$g(x) = x^{\frac{1}{q}} \qquad g'(x) = \frac{1}{q} x^{\frac{1}{q}-1}$

$h(x) = x^p \qquad h'(x) = p\, x^{p-1}$

$$f'(x) = \left(x^{\frac{p}{q}}\right)' = h'(g(x))\, g'(x)$$

$$\left(\quad\right)^{p-1} \quad \frac{1}{} \quad \frac{1}{q}-1$$

$$f'(x) = \left(x^{\frac{p}{q}}\right)' = h'(g(x))\, g'(x)$$

$$= p\left(g(x)\right)^{p-1} \cdot \frac{1}{q} x^{\frac{1}{q}-1}$$

$$= p\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^{p-1} \cdot \frac{1}{q} x^{\frac{1}{q}-1} =$$

$$= \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-\frac{1}{q}} \cdot x^{\frac{1}{q}-1} = \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q} - \cancel{\frac{1}{q}} + \cancel{\frac{1}{q}} - 1}$$

$$\left(x^{\frac{p}{q}}\right)' = \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-1}$$

LOGARITMO NATURALE

$$f(x) = \ln(x) \qquad x \in (0, +\infty)$$

$$\frac{\ln(x+h) - \ln(x)}{h} = \frac{1}{h} \ln\left(\frac{x+h}{x}\right) = \ln\left[\left(\frac{x+h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}\right] =$$

$$= \ln\left[\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}\right] \qquad h \to 0 \quad \frac{h}{x} \to 0 \qquad y = \frac{h}{x} \to 0$$

$$\frac{1}{h} = \frac{x}{h} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y}$$

$$= \ln\left[\left(1+y\right)^{\frac{1}{y} \cdot \frac{1}{x}}\right] =$$

$$= \frac{1}{x} \ln\Big[\underbrace{(1+y)^{1/y}}_{\to e}\Big] \longrightarrow \frac{1}{x} \ln e = \frac{1}{x} \cdot 1 = \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \left(\ln(x)\right)' = \frac{1}{x}$$

LOGARITMO IN BASE QUALSIASI

$$f(x) = \log_p(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(p)} = \frac{1}{\ln(p)} \ln(x) \qquad p > 0, \; p \neq 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{\ln(p)} \left(\ln(x)\right)' = \frac{1}{\ln(p)} \frac{1}{x}$$

FUNZIONE ESPONENZIALE

$f(x) = e^x$ $\quad$ f è l'inversa di $g(x) = \ln(x)$

$f: \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ $\quad$ $g: (0,+\infty) \to \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{1}{g'(y)\big|_{y=f(x)=e^x}} = \frac{1}{\frac{1}{y}\big|_{y=e^x}} = \frac{1}{\frac{1}{e^x}} = e^x$$

FUNZIONE ESPONENZIALE IN BASE a

$f(x) = a^x$ $\quad a > 0 \quad a \neq 1$

$$a = e^{\ln(a)} \qquad a^x = \left(e^{\ln(a)}\right)^x = e^{x \cdot \ln(a)}$$

$f(x) = h(g(x))$ $\quad$ $g(x) = x \cdot \ln(a)$

$f'(x) = h'(g(x))\, g'(x)$ $\quad$ $h(x) = e^x$

$= e^{g(x)} \cdot \ln(a) = e^{x\ln(a)} \ln(a) = a^x \ln(a)$

POTENZE A ESPONENTE REALE

$f(x) = x^\alpha$ $\quad$ $f: (0,+\infty) \to (0,+\infty)$

$$x = e^{\ln(x)} \qquad x^\alpha = \left(e^{\ln(x)}\right)^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$$

$x^\alpha = h(g(x))$ $\quad$ $g(x) = \alpha \ln(x)$

$h(x) = e^x$

$(x^\alpha)' = h'(g(x))\, g'(x) =$

$= e^{g(x)} \alpha \frac{1}{x} = e^{\alpha \ln(x)} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = x^\alpha \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x}$

$= \alpha x^{\alpha - 1}$