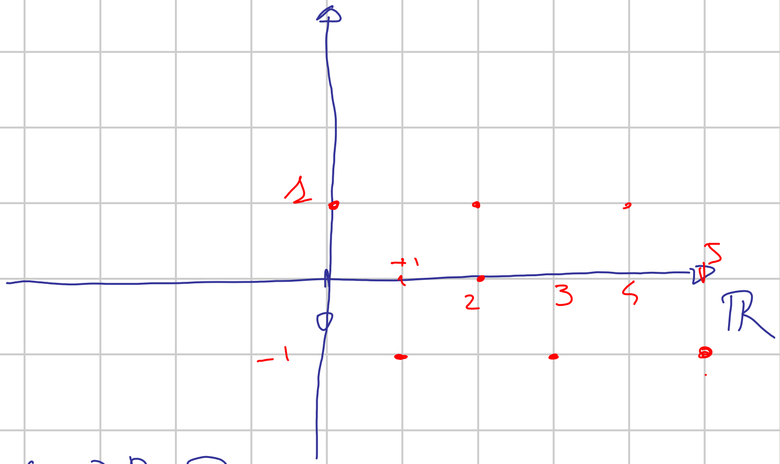
A, B insiemi $\qquad f: A \to B$

Γ (o $\Gamma(f)$) $\qquad \{(a,b) \in A \times B \ : \ b = f(a)\}$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



$f: n \in \mathbb{N} \mapsto (-1)^n \in \mathbb{R}$

Cerchiamo $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ t.c. $\forall x, x_0 \in \mathbb{R} \quad x \neq x_0$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \text{costante } C$$

vero sse $\quad f(x) - f(x_0) = C(x - x_0)$

sse $\quad f(x) = Cx + f(x_0) - Cx_0$

sse $\quad$ Il grafico di f è la retta di coefficiente angolare $m = C$
ordinata all'origine $q = f(x_0) - Cx_0$

$f: x \in \mathbb{R} \mapsto mx + q \in \mathbb{R}$

$m = 0 \Rightarrow f$ funzione costante $f(x) = q \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$m > 0$ e siano $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ t.c. $x_1 > x_2$

allora $\quad mx_1 > mx_2$

allora $\quad mx_1 + q > mx_2 + q$

cioè $\quad f(x_1) > f(x_2)$

Ex Se $m<0$ e $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ sono tali che $x_1 > x_2$ dimostrare che $f(x_1) < f(x_2)$

Sia $A \subset \mathbb{R}$ e sia $f: A \to \mathbb{R}$.

1) Se $\forall x_1, x_2 \in A$ t.c. $x_1 < x_2$ si ha $f(x_1) < f(x_2)$ dico che f è strettamente monotona crescente

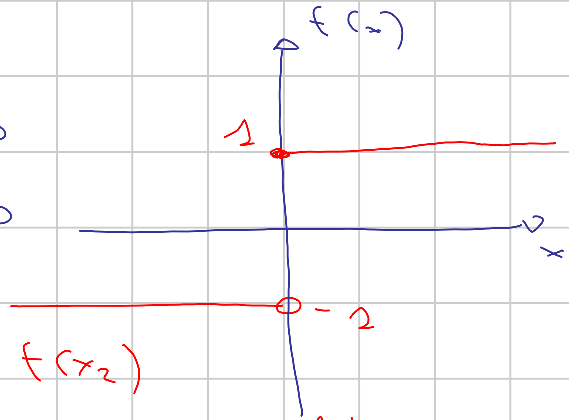
2) Se $\forall x_1, x_2 \in A$ t.c. $x_1 < x_2$ si ha $f(x_1) > f(x_2)$ dico che f è strettamente monotona decrescente

3) Se $\forall x_1, x_2 \in A$ t.c. $x_1 < x_2$ si ha $f(x_1) \leq f(x_2)$ dico che f è monotona crescente

4) Se $\forall x_1, x_2 \in A$ t.c. $x_1 < x_2$ si ha $f(x_1) \geq f(x_2)$, dico che f è monotona decrescente

ESE. $f : x \in \mathbb{R} \mapsto 3 \in \mathbb{R}$

$$f : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$



$x_1 = 1$ $x_2 = 2$ $x_1 < x_2$ ma $f(x_1) = f(x_2)$

$x_1 = -1$ $x_2 = 1$ $x_1 < x_2$ ma $f(x_1) \geq f(x_2)$ è falso

Se $x_1 < x_2 < 0 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$

Se $0 \leq x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$ $\Rightarrow$ in ogni caso $f(x_1) \leq f(x_2)$

Se $x_1 < 0 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

— o —

Se $f: [a,b] \to \mathbb{R}$

Sia $A \subset \mathbb{R}$ e sia $f: A \to \mathbb{R}$.

1) Se $x_0 \in A$ è t.c. $f(x_0) \geq f(x)$ $\forall x \in A$, dico che x_0 è un pto di massimo per f e il valore

$f(x_0)$ è detto massimo di f in A, $\max_A f$

2) Se $x_0 \in A$ è t.c. $f(x_0) \le f(x)$ $\forall x \in A$, dico che x_0 è un p.to di minimo per f e il valore $f(x_0)$ è detto minimo di f in A, $\min_A f$

PROPRIETÀ Se $A \subset \mathbb{R}$ e $f: A \to \mathbb{R}$ allora

$$\forall x \in A \quad \min_A f \le f(x) \le \max_A f$$

è una funzione per cui esistono massimo e minimo

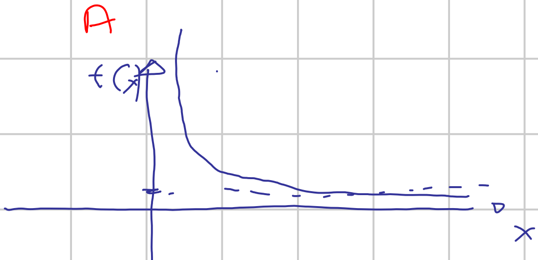
cioè $$\operatorname{Im} f \subseteq \left[\min_A f, \max_A f\right]$$

intervallo di variazione di f.

EX $x \in \mathbb{R}$ $\quad \lfloor x \rfloor \quad \{x\} = x - \lfloor x \rfloor \quad f: [0, +\infty) \to \mathbb{R}$

$$f : x \in \underbrace{[0, +\infty)}_{A} \longmapsto \{x\} \in \mathbb{R}$$

$\min_A f = 0$



$$f : x \in (0, +\infty) \longmapsto \frac{1}{x} \in \mathbb{R}$$

$x > 0 \Rightarrow \frac{1}{x} > 0$

$0 < x_1 < x_2 \Rightarrow 0 < \frac{1}{x_2} < \frac{1}{x_1}$

f è strettamente monotone decrescente

$\to$ o $\to$

PROP Sia $f: [a, b] \to \mathbb{R}$

1) Se f è monotone crescente, allora

a è p.to di minimo e $\min_{[a,b]} f = f(a)$

b è p.to di massimo e $\max_{[a,b]} f = f(b)$

2) Se f è monotone decrescente, allora

b è pto di minimo e $\min_{[a,b]} f = f(b)$)
a è pto di massimo e $\max_{[a,b]} f = f(a)$)

Dim 1) Per ipotesi f è monotona crescente
cioè $\forall x_1, x_2 \in [a,b]$ t.c. $x_1 < x_2$ $f(x_1) \le f(x_2)$)
Scelgo $x_1 = a$ e ottengo $\forall x_2 \in (a,b]$ si ha $f(a) \le f(x_2)$)
cioè a è pto di minimo e $f(a) = \min_{[a,b]} f$
Se invece scelgo $x_2 = b$ ottengo $\forall x_1 \in [a,b)$ si ha $f(x_1) \le f(b)$)
cioè b è pto di massimo e $f(b) = \max_{[a,b]} f$

Sia $A \subset \mathbb{R}$ e sia $f: A \to \mathbb{R}$
1) Se $\exists M \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x) \le M$ $\forall x \in A$, dico che f è limitata superiormente $Im(f) \subseteq (-\infty, M]$
2) Se $\exists m \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x) \ge m$ $\forall x \in A$, dico che f è limitata inferiormente $Im(f) \subseteq [m, +\infty)$

Es. $f: x \in (0,+\infty) \mapsto \frac{1}{x} \in \mathbb{R}$ è limitata inferiormente ma non superiormente
$f: x \in [0,+\infty) \mapsto \{x\} \in \mathbb{R}$ è sia limitata superiormente che limitata inferiormente.

Se f è sia limitata inferiormente che limitata superiormente, dico che f è limitata
$\exists m, M \in \mathbb{R}$ t.c. $Im(f) \subseteq [m, M]$.

$\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$

$A \subset \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$

$f: x \in \mathbb{R} \longmapsto mx+q \in \mathbb{R}$

$m>0$ Fissiamo $M \in \mathbb{R}$, cerco gli x t.c. $f(x) > M$ cioè t.c. $mx+q > M$ cioè $mx > M-q$ cioè
$$x > \frac{M-q}{m} \quad (= x_0)$$

$\rightarrow$ $\forall M \in \mathbb{R}$ $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ t.c. $\forall x > x_0$ si ha $f(x) > M$

Se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione t.c.
$\forall M \in \mathbb{R}$ $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ t.c. $\forall x > x_0$ si ha $f(x) > M$ si dice che f diverge a $+\infty$ quando x tende a $+\infty$ e si scrive $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Riconsidero $f(x) = mx+q$. Fisso $M \in \mathbb{R}$ e cerco gli $x \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x) < -M$
cioè $mx+q < -M$ cioè $x < \frac{-M-q}{m} = x_0$

$\forall M \in \mathbb{R}$ $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ t.c. $\forall x < x_0$ si ha $f(x) < -M$

— o —

Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e supponiamo che
$\forall M \in \mathbb{R}$ $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ t.c. $\forall x < x_0$ si ha $f(x) < -M$
Dico che f diverge a $-\infty$ quando x tende a $-\infty$ e scrivo $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

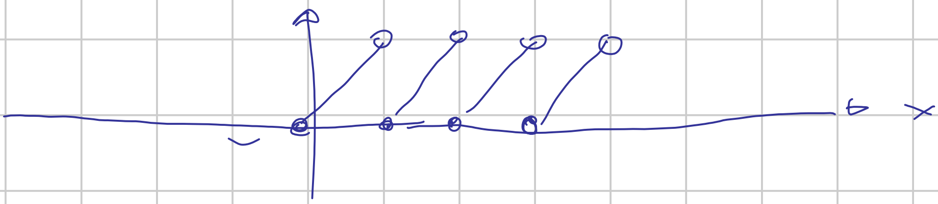
Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e supponiamo che
$\forall M \in \mathbb{R}$ $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ t.c. $\forall x > x_0$ si ha $f(x) < -M$
Dico che f diverge a $-\infty$ quando x tende a $+\infty$

e scrivo $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

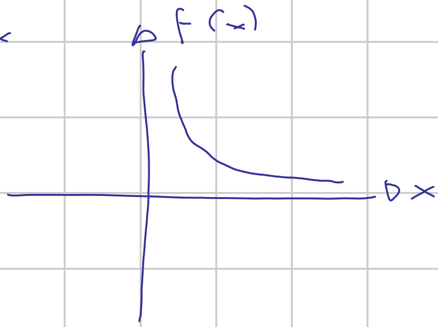
(Esempio $f(x) = mx + q$ con $m < 0$)

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e supponiamo che
$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists x_0 \in \mathbb{R}$ t.c. $\forall x < x_0$ si ha $f(x) > M$
Dico che f diverge a $+\infty$ quando x tende a $-\infty$
e scrivo $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

Se $Im(f) \subset [0,1]$ è corretto $Im(f) \subset [-2,3]$



$f : x \in (0, +\infty) \longrightarrow \frac{1}{x} \in \mathbb{R}$



$Im(f) \subset [0, +\infty)$
$Im(f) \subset [-20, +\infty)$
$Im(f) \subset [2, +\infty)$

Sia $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione limitata superiormente (cioè $\exists M \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x) \le M \ \forall x \in A$
$Im(f) \subset (-\infty, M]$)

Il più piccolo $M \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x) \le M \ \forall x \in A$ si dice estremo superiore di f

PROPRIETÀ Se f è limitata superiormente e ammette valore massimo, allora questo valore coincide con l'estremo superiore.

Sia $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione limitata inferiormente (cioè $\exists m \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x) \geq m \quad \forall x \in A$)

Il più grande $m \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x) \geq m \quad \forall x \in A$ si dice estremo inferiore di f.

PROPRIETÀ Se f è limitata inferiormente e ammette valore minimo, allora questo valore coincide con l'estremo inferiore.

— o —

$$f : x \in \mathbb{R} \longmapsto ax^2 + bx + c \in \mathbb{R} \qquad a, b, c \in \mathbb{R} \quad a \neq 0$$

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right)$$

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \cancel{a}\,\frac{b^2 - 4ac}{4a^{\cancel{2}}}$$

1° caso $a > 0$
$$f(x) \geq f\left(\frac{-b}{2a}\right) = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a}$$

f è limitata inferiormente

valore minimo è $\dfrac{-b^2 + 4ac}{4a}$

Ho un solo pto di minimo $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$

— o —

Fisso $M \in \mathbb{R}$. Cerco gli x t.c. $f(x) > M$

cioè gli x t.c.
$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} > M$$

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 > M + \frac{b^2 - 4ac}{4a} = \frac{4aM + b^2 - 4ac}{4a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 > \frac{4aM + b^2 - 4ac}{4a^2}$$

(1) $$x + \frac{b}{2a} > \sqrt{\frac{4aM + b^2 - 4ac}{4a^2}} \qquad x > \frac{-b}{2a} + \sqrt{\frac{4aM + b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

VEL

(2) $$x + \frac{b}{2a} < -\sqrt{\frac{4aM + b^2 - 4ac}{4a^2}} \qquad x < \frac{-b}{2a} - \sqrt{\frac{4aM + b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

(1) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ (2) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

PER ESERCIZIO: Se $a < 0$ dimostrare che f è limitata superiormente e che $x_0 = \frac{-b}{2a}$ è l'unico pto di max e che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

FUNZIONI POTENZA

$f(x) = ax^p \qquad a \in \mathbb{R},\ a \neq 0 \qquad p \in \mathbb{Q}$

1° CASO $p \in \mathbb{N}$

$p = 0$ $f(x) = a$ $x \in \mathbb{R}$ funzione costante

$p = 1$ $f(x) = ax$ $x \in \mathbb{R}$ retta con ordinata all'origine uguale a 0

$p = 2$ $f(x) = ax^2$ $x \in \mathbb{R}$ parabola

¿ f è monotona?

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

1° caso p dispari e $a > 0$ strett. monotona crescente

2° caso $\quad p$ dispari e $a<0$ $\quad$ strett. monotona decrescente

3° caso $\quad p$ pari e $a>0$

$0<x_1<x_2 \Rightarrow 0<x_1^p < x_2^p \qquad f(x_1)<f(x_2)$

$x_1<x_2<0 \Rightarrow 0<x_2^p<x_1^p \qquad f(x_2)<f(x_1)$

$0<x_1<x_2$

$0<x_1<x_2 \qquad 0<x_1\cdot x_1 < x_2\cdot x_1$

$0<x_1^2<x_2 x_1<x_2^2 \qquad 0<x_1\cdot x_2<x_2^2$

$0<x_1^2<x_2^2$

$x_1<x_2<0$

$\underline{0<x_2x_1<x_1^2} \qquad \underline{0<x_2^2<x_2x_1}$

$0<x_2^2<x_2x_1<x_1^2$

$f|_{[0,+\infty)}$ è strettamente monotona crescente

$f|_{(-\infty,0]}$ è strettamente monotona decrescente

Calcolare $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$