Note Title 04/10/2019

$\Longrightarrow$ "implica" "$a \Rightarrow b$"

$\Longleftrightarrow$ "se e solo se" "$a \Leftrightarrow b$"

"$a \Rightarrow b$" "a è condizione sufficiente per b"
"b è condizione necessaria per a"

a) "x è divisibile per 4"
b) "x è divisibile per 2"

$A = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ è divisibile per } 4\}$ $A \subseteq B$

$B = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ è divisibile per } 2\}$

$\forall$ "per ogni" $\forall x \in A, \ x \in B$

$\exists$ "esiste" $\exists x \in B$ t.c. $x \notin A$

$\exists!$ "esiste ed è unico" $\exists! \, x \in \mathbb{R} : x > 0$ e $x^2 = 2$

$\wedge$

Come negare:

"Ogni $\forall$ persona nell'aula ha gli occhi neri"

"Esiste $\exists$ almeno una persona nell'aula che non ha gli occhi neri".

"Esiste $\exists$ almeno una persona che ha gli occhi neri"

"Ogni $\forall$ persona ha gli occhi non neri"

"Sono vere due proprietà"

"Almeno una delle due proprietà è falsa"

$\nexists$

FUNZIONI

1) A e B insiemi assegnati
2) Una legge che ad ogni elemento $a \in A$ associa uno ed un solo elemento $b \in B$.

$$f: A \to B \qquad f: a \in A \mapsto f(a) \in B$$

A si dice dominio della funzione
B si dice codominio
Se $b \in B$, $a \in A$ e $f(a) = b$, dico che b è l'immagine di a tramite f.
Si chiama IMMAGINE DI A TRAMITE f o IMMAGINE DI f l'insieme

$$Im(f) = f(A) = \{ b \in B : \exists\, a \in A \text{ t.c. } f(a) = b \}$$

$$f: x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 \in \mathbb{R} \qquad Im(f) = [0, +\infty) \subset \mathbb{R}$$

$a \in A$ variabile indipendente
$b \in Im(f)$ variabile dipendente.

$$A = \{ n \in \mathbb{N} : n \leq 10 \} \qquad B = \mathbb{N}$$

$$f: n \in \mathbb{N} \mapsto \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \in \mathbb{N}$$

$f(0) = 0$ $\quad f(1) = 0$ $\quad f(2) = 1$ $\quad f(3) = 1$
$f(4) = 2$ $\quad f(5) = 2$ $\quad f(6) = 3$ $\quad f(7) = 3$
$f(8) = 4$ $\quad f(9) = 4$ $\quad f(10) = 5$

$$Im(f) = \{ n \in \mathbb{N} : n \leq 5 \}$$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Dati $m, q \in \mathbb{R}$

$f: x \in \mathbb{R} \mapsto mx+q \in \mathbb{R}$ funzioni affini

Dati $a, b, c \in \mathbb{R}$ $a \neq 0$

$f: x \in \mathbb{R} \mapsto ax^2+bx+c$ funzioni quadratiche

$f: A \to B$ Grafico di f $\{(x,y) \in A \times B : y = f(x)\}$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Grafico di f $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y = f(x)\}$

$f: x \in \mathbb{R} \mapsto mx+q \in \mathbb{R}$

Grafico di f $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = mx+q\}$

$f: x \in \mathbb{R} \mapsto ax^2+bx+c \in \mathbb{R}$

$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = ax^2+bx+c\}$

— o —

$f: A \to B$ $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A$

Se $x \in A_1 \Rightarrow x \in A_2$. Quindi

Se $b \in B$ ed $\exists x \in A_1$ t.c. $f(x) = b$, allora

$x \in A_2$ e quindi $\exists x \in A_2$ t.c. $f(x) = b$

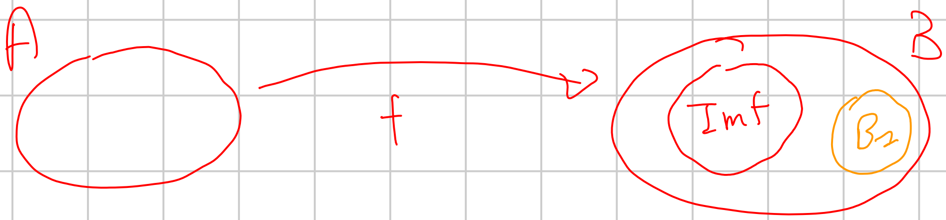
Cioè $f(A_1) \subseteq f(A_2) \subseteq f(A) \subseteq B$

$B_1 \subseteq B$

Chiamo immagine inversa o retroimmagine di B_1

$\{x \in A : f(x) \in B_1\} = f^{-1}(B_1)$

N.B. $B_1 \cap \mathrm{Im}(f) = \emptyset \Rightarrow f^{-1}(B_1) = \emptyset$



$\to f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$

$B_1 = [0, 4]$ cerco gli $x \in \mathbb{R}$ t.c. $0 \leq x^2 \leq 4$

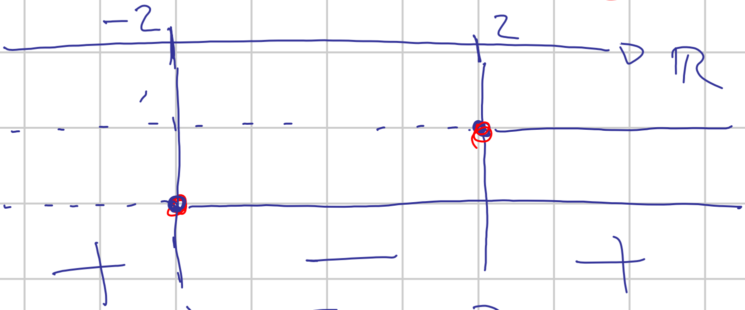
Sono gli $x \in [-2, 2]$

$f^{-1}(B_1) = [-2, 2]$

$B_1 = [-3, 4]$ cerco gli $x \in \mathbb{R}$ t.c. $-3 \leq x^2 \leq 4$

$$\begin{cases} x^2 \geq -3 & \text{vera } \forall x \in \mathbb{R} \\ x^2 \leq 4 & x^2 - 4 \leq 0 \end{cases}$$

$(x-2)(x+2) \leq 0$



$x - 2 = 0$ sse $x = 2$

$x + 2 = 0$ sse $x = -2$

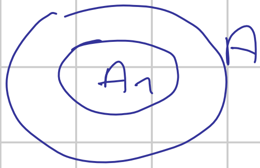
$x \in [-2, 2]$ $f^{-1}([-3, 4]) = [-2, 2]$

$B_1 = [-10, -2]$ $x \in \mathbb{R} : -10 \leq x^2 \leq -2$

$\nexists x \in \mathbb{R}$ che soddisfa queste disuguaglianze

$f^{-1}([-10, -2]) = \emptyset$

Sia $f : A \to B$ e sia $A_1 \subseteq A$



$f|_{A_1} : x \in A_1 \mapsto f(x) \in B$

Restrizione di f ad A_1

— o —

$f : A \to B$ Dico che f è surgettiva se $f(A) = B$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \text{Im}(f)$

Esempio $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$ non è surgettiva perchè $-1 \notin f(\mathbb{R})$

$\to f : x \in \mathbb{R} \mapsto 2x \in \mathbb{R}$

Prendo $y \in \mathbb{R}$ cerco $x \in \mathbb{R}$ t.c. $2x = y$

Basta prendere $x = \frac{y}{2}$ $\Rightarrow$ è suriettiva $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

— o —

$f: A \to B$ dico che f è iniettiva se

" $\forall x_1, x_2 \in A$ $x_1 \neq x_2$, si ha $f(x_1) \neq f(x_2)$ ".

" $\forall x_1, x_2 \in A$ t.c. $f(x_1) = f(x_2)$, si ha $x_1 = x_2$ "

— o —

Es. $A = \{n \in \mathbb{N} : n \leq 10\}$ $B = \mathbb{N}$

$f : n \in A \mapsto \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \in \mathbb{N}$ non è né iniettiva né suriettiva

— o —

Se $f: A \to B$ è sia iniettiva che suriettiva, dico che f è biunivoca.

$f : x \in \mathbb{R} \mapsto 2x \in \mathbb{R}$ è biunivoca.

— o —

Sia $f: A \to B$ biunivoca.

1) f è suriettiva cioè $\forall b \in B$ $\exists a \in A$ t.c. $f(a) = b$

2) f è iniettiva implica che questo a sia unico

Infatti: se a non fosse unico, allora $\exists \bar{a} \in A$, $\bar{a} \neq a$ t.c. $f(\bar{a}) = b$

Ma allora avrei $f(\bar{a}) = b = f(a)$

e quindi $f(\bar{a}) = f(a)$ cioè f non sarebbe iniettiva.

—

$\forall b \in B$ $\exists! a \in A$ t.c. $f(a) = b$

cioè definita una legge $B \to A$

Questa legge si dice FUNZIONE INVERSA DI f

e si scrive $f^{-1} : B \to A$

$f: x \in \mathbb{R} \longmapsto 2x \in \mathbb{R}$

$f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f^{-1}: x \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{x}{2} \in \mathbb{R}$

COMPOSIZIONE

A, B, C insiemi

$f: A \to B$

$g: B \to C$

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

$x \in A$ $\quad f(x) \in B \quad g(f(x)) \in C$

In questo modo ho definito una funzione da A in C

$$g \circ f : x \in A \longmapsto g(f(x)) \in C$$

Esempio

$f: x \in \mathbb{R} \longmapsto x^2 \in \mathbb{R}$

$g: x \in \mathbb{R} \longmapsto 2x \in \mathbb{R}$

$g \circ f \qquad f \circ g$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x^2) = 2x^2$$

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(2x) = (2x)^2 = 4x^2$$

Esercizio

$f: n \in \mathbb{N} \longmapsto \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \in \mathbb{N}$

$g: n \in \mathbb{N} \longmapsto 2n \in \mathbb{N}$

$g \circ f = ?$ $\qquad$ $f \circ g = ?$

$\underline{\qquad} \circ \underline{\qquad}$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

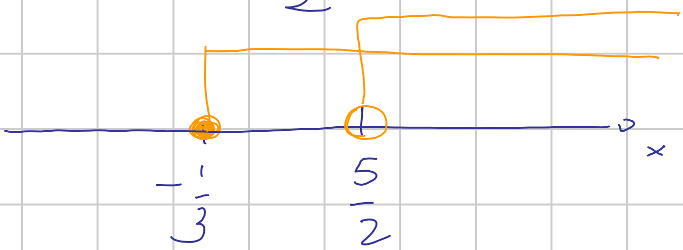
$f(x) = \sqrt{x}$ $\qquad$ $f : x \in [0, +\infty) \longmapsto \sqrt{x} \in \mathbb{R}$

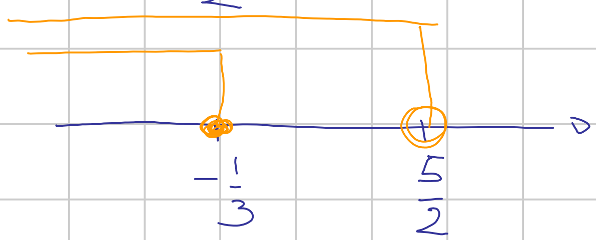
$f(x) = \sqrt{\dfrac{3x+1}{2x-5}}$

$$\begin{cases} 2x-5 \neq 0 \\ \dfrac{3x+1}{2x-5} \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x \neq 5 \\ \dfrac{3x+1}{2x-5} \geq 0 \end{cases} \qquad x \neq \frac{5}{2}$$

$$\begin{cases} 3x+1 \geq 0 \\ 2x-5 > 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} 3x+1 \leq 0 \\ 2x-5 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -\dfrac{1}{3} \\ x > \dfrac{5}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x \leq -\dfrac{1}{3} \\ x < \dfrac{5}{2} \end{cases}$$





$x > \frac{5}{2}$ $\quad$ $\left(\frac{5}{2}, +\infty\right)$ $\qquad$ $x \leq -\frac{1}{3}$ $\quad$ $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right]$

$$f : x \in \underbrace{\left(-\infty, \frac{1}{3}\right] \cup \left(\frac{5}{2}, +\infty\right)}_{A} \longmapsto \sqrt{\frac{3x+1}{2x-5}} \in \mathbb{R}$$