Numeri reali; operazioni, insiemi

$\mathbb{N} :=$ insieme dei numeri naturali $= \{0, 1, 2, \_\_\_\_ \}$

$\mathbb{Z} :=$ insieme dei numeri interi $= \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \_\_\_\_ \}$

$\mathbb{Q} :=$ insieme dei numeri razionali $=$

$= \{0, 1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 2, -2, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, 3, -3 \dots \}$

$= \{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z} \text{ e } q \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \}$

$\frac{1}{2} = 0.5 \qquad \frac{1}{4} = 0.25 \qquad \frac{1}{3} = 0.333\dots = 0.\overline{3}$

$\frac{23}{15} = 1.53333\dots = 1.5\overline{3} \qquad 0.3191919\dots = 0.3\overline{19}$

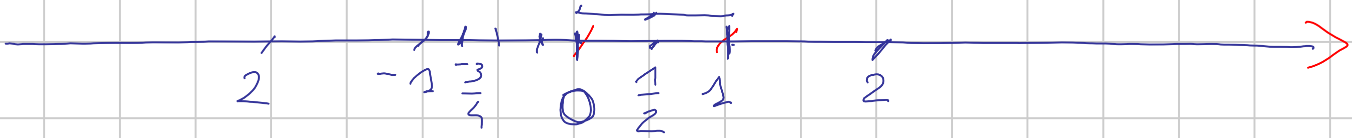
Indico con $\mathbb{R}$ l'insieme di tutti i numeri aventi un numero qualsiasi (anche infinito e senza periodo) di cifre decimali.

$\sqrt{2} :=$ l'unico numero nonnegativo il cui quadrato è 2

$1.414213362\dots$

$\pi := 3.14159265 35\dots$

I numeri reali che non sono razionali si dicono irrazionali.



Dati $a, b \in \mathbb{R}$, sono ben definite le operazioni di somma e prodotto:

$(a+b)+c = a+(b+c) \quad \forall a,b,c \in \mathbb{R}$ PROP. ASSOCIATIVA

$a+0 = 0+a = a \quad \forall a \in \mathbb{R}$ ESISTENZA DELL'ELEMENTO NEUTRO

Per ogni $a \in \mathbb{R}$ esiste uno ed un solo numero reale, $-a$, con la proprietà $a+(-a) = (-a)+a = 0$

(ESISTENZA E UNICITÀ DELL'OPPOSTO)

$a+b = b+a \quad \forall a,b \in \mathbb{R}$

— o —

$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \quad \forall a,b,c \in \mathbb{R}$ PROP. ASSOCIATIVA

$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a \quad \forall a \in \mathbb{R}$ ESISTE DELL'ELEMENTO NEUTRO

Per ogni $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, esiste uno ed un solo numero reale $\frac{1}{a}$ t.c. $a \cdot \left(\frac{1}{a}\right) = \left(\frac{1}{a}\right) \cdot a = 1$.

$\frac{1}{a}$ si dice RECIPROCO o INVERSO DI a.

$a \cdot b = b \cdot a \quad \forall a,b \in \mathbb{R}$ PROP. COMMUTATIVA

$$\left.\begin{aligned} a \cdot (b+c) &= a \cdot b + a \cdot c \\ (a+b) \cdot c &= a \cdot c + b \cdot c \end{aligned}\right\} \text{PROPRIETÀ DISTRIBUTIVE}$$

POTENZA INTERA DI UN NUMERO REALE

Se $a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$ definisco potenza n-esima di a e indico col simbolo a^n il prodotto $\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ volte}}$

Di conseguenza $\forall n, m \in \mathbb{N}$, $n, m > 0$ e $\forall a \in \mathbb{R}$

$$a^n \cdot a^m = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ volte}} \cdot \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ volte}} =$$

$$= \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n+m \text{ volte}} = a^{n+m}$$

$$\frac{a^n}{a^m} = \frac{\overbrace{a \cdot \ldots \cdot a}^{n \text{ volte}}}{\underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ volte}}} =$$

1°) $n > m$ $\quad = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n-m \text{ volte}} = a^{n-m}$

2°) $m > n$ $\quad = \dfrac{1}{\underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{m-n \text{ volte}}} = \dfrac{1}{a^{m-n}} = a^{n-m}$

Dò questa definizione: se $a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$ pongo

$$a^{-n} := \frac{1}{a^n}$$

Oss. $\dfrac{a^n}{a^n} = a^n \cdot \dfrac{1}{a^n} = 1 \Rightarrow$ Per definizione $a^0 = 1$

$\quad \| $

$a^{n-n} = a^0$

$$(a^n)^2 = a^n \cdot a^n = a^{2n}$$

$$(a^n)^3 = a^n \cdot a^n \cdot a^n = a^{3n}$$

$$(a^n)^m = \underbrace{a^n \cdot a^n \cdot \ldots \cdot a^n}_{m \text{ volte}} = a^{mn} \qquad \forall m, \forall n \in \mathbb{N}$$

Sia a un reale positivo $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$

Sia $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, voglio definire $a^{p/q}$

1° passo $p = 1$ $\quad a^{1/q}$ per definizione è l'unico reale positivo x t.c. $x^q = a$.

2° passo $\frac{p}{q} \in \mathbb{Z}$ definisco $a^{p/q} = \left(a^{1/q}\right)^p$

Di conseguenza $a^{-\frac{p}{q}} = \left(a^{1/q}\right)^{-p} = \frac{1}{\left(a^{1/q}\right)^p} = \frac{1}{a^{p/q}}$

Se $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ e $x \in \mathbb{R}$, allora è possibile definire a^x in modo da conservare le regole di calcolo.

Dati $a, b \in \mathbb{R}$ è sempre possibile dire chi è il più grande e chi è il più piccolo dei due.

Si scrive $a \leq b$ (a minore uguale di b)

o $a \geq b$ (a maggiore uguale di b)

(Relazione di ordine Totale)

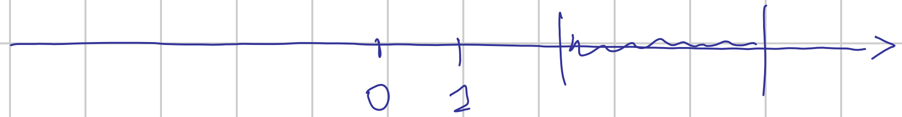
PROP. RIFLESSIVA $a \leq a \quad \forall a \in \mathbb{R}$

PROP ANTISIMMETRICA : $a \leq b$ e $b \leq a$, allora $a = b$

PROP TRANSITIVA : se $a \leq b$ e $b \leq c$, allora $a \leq c$.

Dati $x_1, \dots x_n \in \mathbb{R}$. indico con $\max\{x_1 \dots x_n\}$ il più grande dei valori: MASSIMO DI $x_1 \dots x_n$

indico con $\min\{x_1 \dots x_n\}$ il più piccolo dei valori: MINIMO DI $x_1 \dots x_n$



Dati $a, b \in \mathbb{R}$ $a < b$

$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ $\qquad [a, a] = \{a\}$

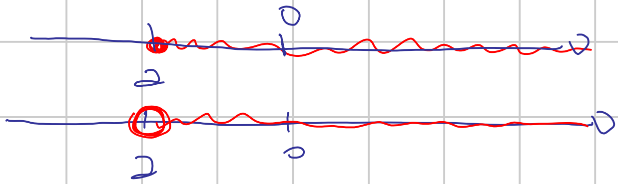
$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$

$(a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$

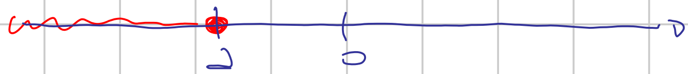
$[a,b) := \{x \in \mathbb{R} : a \le x < b\}$

$[a,+\infty) := \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$

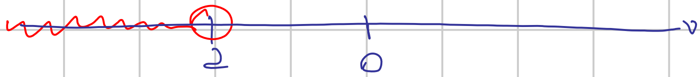
$(a,+\infty) := \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$



$(-\infty, a] := \{x \in \mathbb{R} : x \le a\}$



$(-\infty, a) := \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$



PROPRIETÀ

$a = b$, allora

$$\begin{cases} a+c = b+c & \forall c \\ a-c = b-c & \forall c \\ -a = -b & \\ ac = bc & \forall c \\ \frac{a}{c} = \frac{b}{c} & \forall c \neq 0 \\ \frac{1}{a} = \frac{1}{b} & \text{se } a \neq 0 \end{cases}$$

$\boxed{a - c := a + (-c)}$

Se $a \le b$

$a + c \le b + c \quad \forall c \in \mathbb{R}$

$a - c \le b - c \quad \forall c \in \mathbb{R}$

$\frac{a}{c} \le \frac{b}{c}$ se $c > 0$

$ac \le bc$ se $c > 0$

$\frac{b}{c} \le \frac{a}{c}$ se $c < 0$

$bc \le ac$ se $c < 0$

$\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b} \longrightarrow 0 < a \le b$, $a \le b < 0$

$\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ se $a < 0 < b$

$$\begin{array}{ccc} a & & b \\ -2 < 0 < 3 \\ -\frac{1}{2} & & \frac{1}{3} \end{array}$$

OPERAZIONI TRA DISUGUAGLIANZE

Se $\begin{cases} a_1 \le a_2 \\ b_1 \le b_2 \end{cases}$ allora $a_1 + b_1 \le a_2 + b_2$

DIM Poiché $a_1 \le a_2$, $a_1 + b_1 \le a_2 + b_1$

D'altra parte, poiché $b_1 \le b_2$, $b_1 + a_2 \le b_2 + a_2$

Quindi abbiamo

$$a_1 + b_1 \le a_2 + b_1 = b_1 + a_2 \le b_2 + a_2 = a_2 + b_2$$

prop commutativa

Per la proprietà Transitiva della relazione d'ordine ottengo $a_1 + b_1 \le a_2 + b_2$ cioè la Tesi.

PROP. Se $\begin{cases} a_1 \le a_2 \\ b_1 \le b_2 \end{cases}$ allora $a_1 - b_2 \le a_2 - b_1$

PROP Se $\begin{cases} 0 < a_1 \le a_2 \\ 0 < b_1 \le b_2 \end{cases}$ allora $0 < a_1 b_1 \le a_2 b_2$

$$0 < \frac{a_1}{b_2} \le \frac{a_2}{b_1}$$

PROP Se $\begin{cases} 0 < a_1 \le a_2 \\ b_1 \le b_2 < 0 \end{cases}$ allora $a_2 b_1 \le a_1 b_2 < 0$

$$\frac{a_2}{b_2} \le \frac{a_1}{b_1} < 0$$

PROP Se $\begin{cases} a_1 \le a_2 < 0 \\ 0 < b_1 \le b_2 \end{cases}$ allora $a_1 b_2 \le a_2 b_1 < 0$

$$\frac{a_1}{b_1} \le \frac{a_2}{b_2} < 0$$

PROP Se $\begin{cases} a_1 \le a_2 < 0 \\ b_1 \le b_2 < 0 \end{cases}$ allora $0 < a_2 b_2 \le a_1 b_1$

$$0 < \frac{a_2}{b_1} \le \frac{a_1}{b_2}$$

PROP Se $\begin{cases} 0 < a_1 \leq a_2 \\ b_1 < 0 < b_2 \end{cases}$ allora $a_1 b_1 < 0 < a_2 b_2$

$a_2 b_1 < 0 < a_1 b_2$

$\dfrac{a_1}{b_1} < 0 < \dfrac{a_2}{b_2} \qquad \dfrac{a_2}{b_1} < 0 < \dfrac{a_1}{b_2}$

PROP Se $\begin{cases} a_1 \leq a_2 < 0 \\ b_1 < 0 < b_2 \end{cases}$ allora $a_1 b_2 < 0 < a_2 b_1 \qquad a_2 b_2 < 0 < a_1 b_1$

$\dfrac{a_1}{b_2} < 0 < \dfrac{a_2}{b_1} \qquad \dfrac{a_2}{b_2} < 0 < \dfrac{a_1}{b_1}$

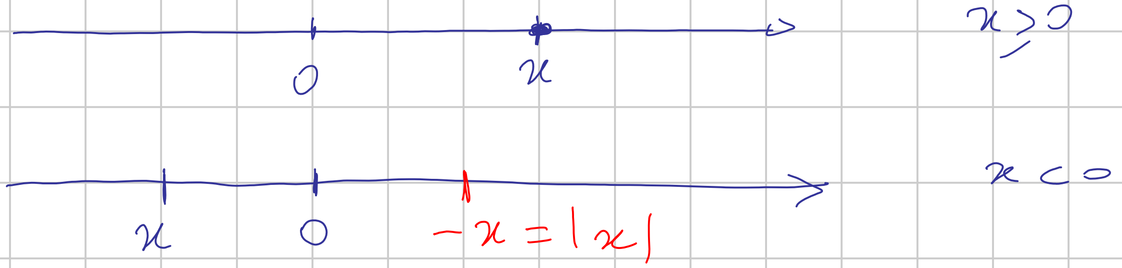
— o —

Per ogni numero reale x definisco

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

Osservazione $|x| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$|x| = 0$ se e solo $x = 0$



— o —

Insieme := concetto intuitivo = "collezione di oggetti".

Se A è un insieme e a è un elemento di A si scrive $a \in A$ a appartiene ad A

Se a non è un elemento di A si scrive $a \notin A$

a non appartiene ad A

Se A e B sono due insiemi, scrivo $A = B$ se ogni elemento di A è anche elemento di B e ogni elemento di B è anche elemento di A

Se A e B sono due insiemi e ogni elemento di A è anche elemento di B, scrivo $A \subseteq B$ e dico che A è sottoinsieme di B.

Se $A \subseteq B$ ma $A \neq B$, dico che A è un sottoinsieme proprio di B e scrivo $A \subset B$.

L'insieme che non contiene alcun elemento si dice INSIEME NUOTO e si indica $\emptyset$

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ DESCRIZIONE PER ELENCAZIONE

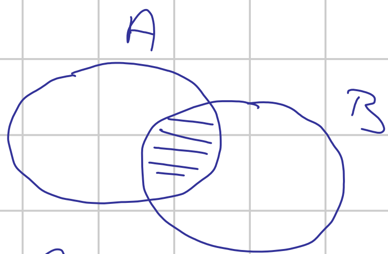
A insieme dei numeri naturali dispari

$A = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}$

$A = \{x : x \in \mathbb{N} \text{ e } \frac{x}{2} \notin \mathbb{N}\}$ PER CARATTERIZZAZIONE

OPERAZIONI TRA INSIEMI

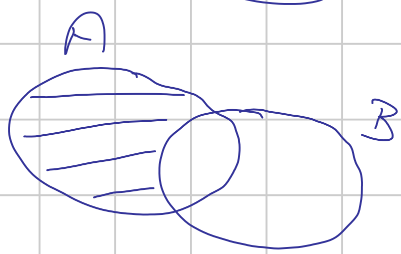
$A \cap B = \{x : x \in A \text{ e } x \in B\}$



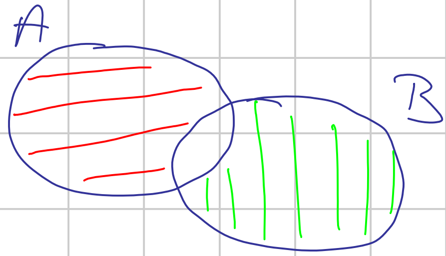
$A \cup B = \{x : x \in A \text{ o } x \in B\}$

VEL

$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ e } x \notin B\}$



$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$
$$= \{x : x \in A \text{ o } x \in B \text{ ma } x \notin A \cap B\}$$
$$= \{x : x \in A \text{ AUT } x \in B\}$$



PROPRIETÀ

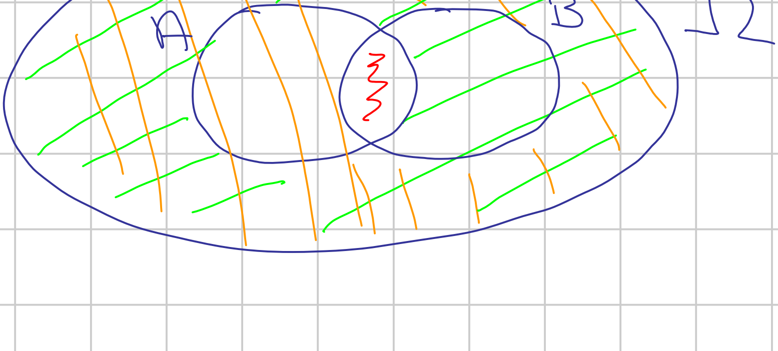
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
PROPR. ASSOCIATIVA

$A \cup B = B \cup A$
$A \cap B = B \cap A$
PROPR COMMUTATIVA

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
PROPR. DISTRIBUTIVE

Se $A \subseteq \Omega$ $\quad \Omega \setminus A$ si indica anche A^c

Se $A \subseteq \Omega$, $B \subseteq \Omega$
$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$



$= A^c$
$= B^c$

$$A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A$$
$$A \cap \emptyset = \emptyset \cap A = \emptyset$$

$$A \cup A = A$$
$$A \cap A = A$$

PROPRIETÀ DI IDEMPOTENZA

Dati due insiemi A e B, definisco PRODOTTO CARTESIANO DI A E B

$$A \times B = \{ (x, y) : x \in A \text{ e } y \in B \}$$

$$A^2 = A \times A = \{ (x, y) : x \in A \text{ e } y \in A \}$$

$$(x, y) \neq (y, x)$$