7. Test d'ipotesi

Un tipico problema che ci si può trovare ad affrontare è il seguente:

Faccio una certa ipotesi (che indico con H_0 e che chiamo **ipotesi nulla**). In base ai dati che ho a disposizione devo decidere se accettare o rifiutare la verità di questa ipotesi.

Si potranno verificare quattro situazioni alternative:

1. L'ipotesi è vera e l'accetto $\rightarrow$ bene
2. L'ipotesi è vera ma in base ai dati la rifiuto $\rightarrow$ in questo caso si dice che si commette **errore di prima specie**
3. L'ipotesi è falsa ma in base ai dati la accetto $\rightarrow$ in questo caso si dice che si commette **errore di seconda specie**
4. L'ipotesi è falsa e la rifiuto $\rightarrow$ bene

Per chiarirsi le idee vediamo prima un esempio.

Esempio 7.0.1. Ho una moneta. Voglio verificare se è bilanciata o meno. La lancio n volte. Pongo $X_i = \begin{cases} 1 & \text{se all'}i\text{-esimo lancio esce testa,} \\ 0 & \text{se all'}i\text{-esimo lancio esce croce.} \end{cases}$, $i = 1, \ldots, n$.

Ho un campione statistico bernoulliano di numerosità n e parametro $p \in [0, 1]$ incognito, dove p è la probabilità che esca testa in un singolo lancio.

L'ipotesi nulla che dobbiamo testare è

$$H_0) \qquad p = 0.5.$$

Facciamo dunque n lanci. Otteniamo k teste ed $n - k$ croci:

$$x_1, \ \ldots, \ x_n \qquad \text{dove} \qquad x_i = \begin{cases} 1 & \text{se all'}i\text{-esimo lancio esce testa,} \\ 0 & \text{se all'}i\text{-esimo lancio esce croce.} \end{cases}$$

e dunque $\overline{x} = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = \dfrac{k}{n}$.

Stabilisco una distanza massima ε tra $\overline{x}$ e 0.5 entro la quale accettare l'ipotesi $p = 0.5$ e oltre la quale rifiutarla. Ovvero: accetto H_0 se $|\overline{x} - 0.5| < \varepsilon$ e la rifiuto se $|\overline{x} - 0.5| \geq \varepsilon$. cioè se $\left| \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{n}{2} \right| \geq n\varepsilon$. Quanto vale la probabilità di commettere errore di prima specie, ovvero di rifiutarla quando esse invece è vera?

Commetto errore di prima specie con probabilità

$$\alpha := \mathbb{P}\left(\left|\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{n}{2}\right| \geq n\varepsilon\right).$$

Poiché le v.a. X_i sono i.i.d con $\mathbb{P}_{X_i} = B(p)$, la v.a. $Y := \sum_{i=1}^{n} X_i$ è una v.a. binomiale di parametri n e p. Se l'ipotesi H_0 è vera, allora $p = 0.5$ cosicché $\mathbb{P}_Y = B(n, 0.5)$ e

$$\alpha := \mathbb{P}\left(\left|Y - \frac{n}{2}\right| \geq n\varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(Y \geq \frac{n}{2} + n\varepsilon\right) + \mathbb{P}\left(Y \leq \frac{n}{2} - n\varepsilon\right)$$

Vediamo alcuni casi

```
> ## definisco la funzione che calcola
> ## la probabilitÃ  di errore di prima specie
> alpha.binom = function(n,p,tolle) {
+ infe = n*(p - tolle);
+ supe = n*(p + tolle);
+ supep = supe;
+ if(supe == floor(supe)) supep = supe-1;
+ infe = round(infe, digits = 0);
+ c(floor(infe), floor(supe),
+   pbinom(infe, size=n, prob=p, lower.tail=TRUE) +
+         pbinom(supep, size=n, prob=p, lower.tail=FALSE))
+ }
> alpha.binom(50, .5, .1)
[1] 20.0000000 30.0000000  0.2026388
> alpha.binom(100, .5, .1)
[1] 40.00000000 60.00000000  0.05688793
> alpha.binom(200, .5, .1)
[1] 8.000000e+01 1.200000e+02 5.685156e-03
> alpha.binom(300, .5, .1)
[1] 1.2000e+02 1.8000e+02 6.3422e-04
> alpha.binom(400, .5, .1)
[1] 1.600000e+02 2.400000e+02 7.426568e-05
> alpha.binom(500, .5, .1)
[1] 2.000000e+02 3.000000e+02 8.940067e-06
> alpha.binom(50, .5, .05)
[1] 22.0000000 27.0000000  0.4798877
> alpha.binom(100, .5, .05)
[1] 45.0000000 55.0000000  0.3197273
> alpha.binom(200, .5, .05)
[1]  90.0000000 110.0000000   0.1581653
> alpha.binom(300, .5, .05)
[1] 135.0000000 165.0000000   0.0939037
> alpha.binom(400, .5, .05)
[1] 180.00000000 220.00000000   0.04563548
```

```
> alpha.binom(500, .5, .05)
[1] 225.00000000 275.00000000   0.02832616
```

Solitamente si vuole controllare (nel senso di tenere bassa, inferiore a 0.1 o a 0.05) la probabilità α di commettere errore di prima specie. Tale probabilità viene detta *livello di significatività* del test. Fissato il livello di significatività α, la numerosità n e la soglia di tolleranza ε andranno scelti di conseguenza come visto negli esempi precedenti.

Inoltre, fissato α, ci chiediamo quanto valga la probabilità di commettere errore di seconda specie, ovvero di accettare H_0 quand'essa invece è falsa.

Se H_0 è falsa, allora la probabilità di ottenere testa non è 0.5 ma assume un valore $p \neq 0.5$ (ignoto) e dunque $\mathbb{P}_Y = B(n,p)$ e io accetto H_0 con probabilità

$$\beta(p) := \mathbb{P}_p\left(\left|Y - \frac{n}{2}\right| < n\varepsilon\right) = \mathbb{P}_p\left(Y < \frac{n}{2} + n\varepsilon\right) - \mathbb{P}_p\left(Y \leq \frac{n}{2} - n\varepsilon\right)$$

Si calcola $\beta(p)$ per vari valori di p. La funzione $\beta(p)$ è detta **curva operativa caratteristica (OC)** mentre $1 - \beta(p)$ cioè la probabilità di rifiutare H_0 quand'essa in effetti è falsa e il parametro incognito vale p, è detta **potenza del test**.

Esempio 7.0.2. Consideriamo la solita moneta e stavolta vogliamo vedere se è più probabile ottenere testa che ottenere croce. Vogliamo cioè testare l'ipotesi nulla

$$H_0) \qquad p \leq 0.5$$

Un test di questo tipo è detto *test unilaterale.*

Stabilisco una tolleranza massima ε entro la quale accettare l'ipotesi $p \leq 0.5$ e oltre la quale rifiutarla. Ovvero: accetto H_0 se $\overline{x} < 0.5+\varepsilon$ e la rifiuto se $\overline{x} \geq 0.5+\varepsilon$ cioè se $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \geq \frac{n}{2} + n\varepsilon$. Quanto vale la probabilità di commettere errore di prima specie, ovvero di rifiutarla quando essa invece è vera?

Commetto errore di prima specie con probabilità

$$\alpha := \mathbb{P}\left(Y \geq \frac{n}{2} + n\varepsilon\right).$$

Se H_0 è vera, allora $\mathbb{P}_Y = B(n,p)$ per qualche $p \leq 0.5$. Indico F_Y^p la sua funzione di ripartizione Vediamo alcuni casi

```
  > ## definisco la funzione che calcola il primo valore
> ## che rifiuto e
> ## la probabilitÃ  di errore di prima specie
> alpha.binom.uni = function(n,p,tolle) {
+ supe = n*(p + tolle);
+ supep = supe;
+ if(supe == floor(supe)) supep = supe-1;
+ c(floor(supe), pbinom(supep, size=n, prob=p, lower.tail=FALSE))
+ }
> alpha.binom.uni(50, .5, .1)
[1] 30.0000000  0.1013194
```

```
> ppp =numeric(0)
> fff =numeric(0)
> beta.p <- matrix(0, nrow = 1000, ncol = 2, byrow = FALSE)
> for (i in 1:1000)  {
+     ppp[i] <- i*0.5/1000
+     fff[i] <- pbinom(c(274), size=500, prob=ppp[i], lower.tail=TRUE)
+     - pbinom(c(225), size=500, prob=ppp[i], lower.tail=TRUE)
+     beta.p[i,1] <- round(ppp[i],6)
+     beta.p[i,2] <- round(fff[i],6)
+         }
> write.csv(beta.p, "betadip.csv", row.names = FALSE)
```

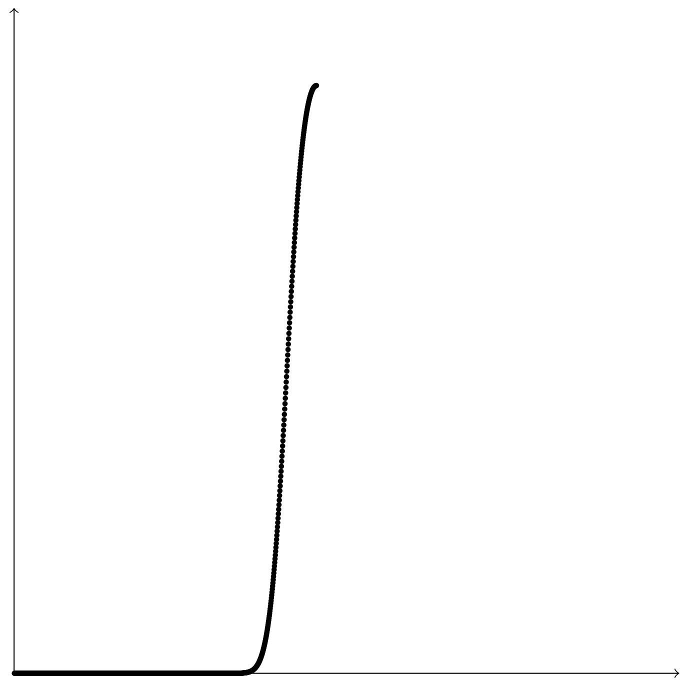

Figura 7.1: $\beta(p)$

```
> alpha.binom.uni(100, .5, .1)
[1] 60.00000000  0.02844397
> alpha.binom.uni(200, .5, .1)
[1] 1.200000e+02 2.842578e-03
> alpha.binom.uni(300, .5, .1)
[1] 1.8000e+02 3.1711e-04
> alpha.binom.uni(400, .5, .1)
[1] 2.400000e+02 3.713284e-05
> alpha.binom.uni(500, .5, .1)
[1] 3.000000e+02 4.470033e-06
> alpha.binom.uni(50, .5, .05)
[1] 27.0000000  0.2399438
> alpha.binom.uni(100, .5, .05)
[1] 55.0000000  0.1356265
> alpha.binom.uni(200, .5, .05)
[1] 110.00000000   0.06868333
> alpha.binom.uni(300, .5, .05)
[1] 165.00000000   0.04695185
> alpha.binom.uni(400, .5, .05)
[1] 220.00000000   0.02011537
> alpha.binom.uni(500, .5, .05)
[1] 275.00000000   0.01416308
```

7.1 Principi generali di un test statistico

In generale dunque un test d'ipotesi ha la seguente struttura:

1. Si definisce l'insieme delle distribuzioni *compatibili* con il campione $X_1, \ldots, X_n$.

2. Si definisce l'ipotesi da testare, detta *ipotesi nulla* (si indica col simbolo H_0). Le ipotesi si possono suddividere in due grandi famiglie:

   - **ipotesi parametriche**: la distribuzione del campione è nota a meno di un parametro θ, scalare o vettoriale. La formula generale di un'ipotesi parametrica è dunque
   $$H_0 : \qquad \theta \in \Theta_0 \subset \Theta$$
   ovvero: il parametro θ appartiene ad uno specificato sottoinsieme Θ_0 del dominio ammissibile per il parametro Θ.

   - **ipotesi non parametriche**: sono ipotesi sul tipo di distribuzione del campione oppure ipotesi che riguardano popolazioni differenti. La formulazione generale di una ipotesi non parametrica è del tipo
   $$H_0 : \qquad F(x) \in \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$$
   ovvero: la legge F del campione appartiene ad uno specificato sottoinsieme della famiglia delle leggi ammissibili.

In entrambi i casi l'ipotesi si dice *semplice* se Θ_0 o $\mathcal{F}_0$ è costituito da un solo elemento. Si dice *composta* altrimenti.

3. Si definisce l'ipotesi alternativa H_A che è da considerarsi valida quando si rifiuta H_0.

$$H_A : \qquad \theta \in \Theta_1, \qquad \Theta_1 := \Theta \setminus \Theta_0 \qquad \text{nel caso parametrico,}$$
$$H_A : \qquad F(x) \in \mathcal{F}_1 \qquad \mathcal{F}_1 := \mathcal{F} \setminus \mathcal{F}_0 \qquad \text{nel caso non parametrico.}$$

4. Si definisce una statistica $\varphi(X_1, \ldots, X_n)$ con distribuzione nta quando H_0 è vera.

5. Si suddivide lo spazio $\mathcal{G}$ delle possibili osservazioni in due insiemi disgiunti:
   - $\mathcal{A}$ detta *regione di accettazione di* H_0;
   - $\mathcal{C} := \mathcal{G} \setminus \mathcal{A}$ detta *regione di rifiuto di* H_0 o *regione critica.*

6. Si formula la regola di decisione:
   - accetto H_0 se $\varphi(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{A}$;
   - rifiuto H_0 se $\varphi(x_1, \ldots, x_n) \notin \mathcal{A}$, ovvero se $\varphi(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{C}$.

Diciamo che commettiamo *errore di prima specie* se rigettiamo H_0 quando essa in realtà è vera e chiamiamo *livello di significatività del test* la probabilità che ciò accada:

$$\alpha := \mathbb{P}\left(\varphi(X_1, \ldots, X_n) \in \mathcal{C} | H_0\right).$$

Il valore $1 - \alpha$ è detto *livello di fiducia del test.*

Diciamo invece che commettiamo *errore di seconda specie* se accettiamo H_0 quando esssa è falsa. Indichiamo con β la probabilità che cio accada:

$$\beta := \mathbb{P}\left(\varphi(X_1, \ldots, X_n) \in \mathcal{A} | H_A\right).$$

Il valore $1 - \beta$ è detto *potenza del test.* (Vedremo negli esempi successivi relativi a test parametrici che se H_A è un'ipotesi composta, allora β è una funzione $\beta(\theta)$, $\theta \in \Theta_1$.

Come già detto, è prioritario *limitare* la probabilità di commettere errore di prima specie, cioè di limitare la probabilità di rifiutare l'ipotesi nulla quando essa è vera.

7.2 Test parametrici per campioni gaussiani

7.2.1 Test d'ipotesi per il valore atteso di campioni gaussiani di cui è nota la varianza

Test bilaterale

Sia $X_1, \ldots, X_n$ un campione gaussiano di valore atteso μ incognito e varianza σ^2 nota. Vogliamo testare

$$H_0 : \qquad \mu = \mu_0, \qquad\qquad H_A : \qquad \mu \neq \mu_0.$$

Sappiamo che $\mathbb{P}_{X_i} = N\left(\mu_0, \sigma^2\right)$ se e solo se $\mathbb{E}\left[\overline{X}\right] = \mu_0$. Dunque accetto l'ipotesi nulla H_0 se la media campionaria si discosta da μ_0 per meno di un valore soglia ε ovvero se $|\overline{x} - \mu_0| < \varepsilon$ e la rifiuto altrimenti.

Il livello di significatività (cioè la probabilità di commettere un errore di prima specie) è allora

$$\alpha = \mathbb{P}\left(\left|\overline{X} - \mu_0\right| \geq \varepsilon | \mu = \mu_0\right).$$

Ma se H_0 è vera, $\mathbb{P}_{\overline{X}} = N\left(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ e $Z := \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ ha distribuzione gaussiana standard $N(0,1)$. Dunque

$$\begin{aligned}
\alpha &= \mathbb{P}\left(\left|\overline{X} - \mu_0\right| \geq \varepsilon | \mu = \mu_0\right) = \mathbb{P}\left(\frac{\left|\overline{X} - \mu_0\right|}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \geq \frac{\varepsilon}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} | \mu = \mu_0\right) = \mathbb{P}\left(|Z| \geq \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(Z \geq \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right) + \mathbb{P}\left(Z \leq \frac{-\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right) + \Phi\left(\frac{-\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right) \\
&= 2\left(1 - \Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right)\right)
\end{aligned}$$

Se voglio fissare a priori α, deve essere allora $\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2}$ cioè deve essere $\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma} = z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ e dunque devo scegliere

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}}.$$

Presi i dati $x_1, \ldots, x_n$, sia $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ la loro media:

$$\text{accetto } H_0 \text{ se } |\overline{x} - \mu_0| < \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}} \text{ e la rifiuto altrimenti.}$$

Calcoliamo la *curva operativa caratteristica*. Se H_0 è falsa, $\mu \neq \mu_0$, commetto errore di seconda specie con probabilità

$$\begin{aligned}
\beta(\mu) &= \mathbb{P}\left(\left|\overline{X} - \mu_0\right| < \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}} | \mathbb{E}[X_i] = \mu\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\mu_0 - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}} < \overline{X} < \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}} | \mathbb{E}[X_i] = \mu\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\frac{\mu_0 - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} < \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < \frac{\mu_0 - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} | \mathbb{E}[X_i] = \mu\right) \\
&= \Phi\left(\frac{\mu_0 - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) - \Phi\left(\frac{\mu_0 - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} + z_{\frac{\alpha}{2}}\right).
\end{aligned} \tag{7.1}$$

Distinguiamo due casi

1. $\mu > \mu_0$

   In questo caso $\frac{\mu_0 - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < 0$ dunque $\frac{\mu_0 - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} + z_{\frac{\alpha}{2}} < z_{\frac{\alpha}{2}}$ e quindi

$$0 < \Phi\left(\frac{\mu_0 - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} + z_{\frac{\alpha}{2}}\right) < \frac{\alpha}{2}$$

e la possiamo considerare una quantità trascurabile. Abbiamo dunque

$$\beta(\mu) \sim \Phi\left(\frac{\mu_0-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right).$$

In particolare

$$\sup_{\mu>\mu_0} \beta(\mu) \sim \Phi\left(z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2}.$$

Supponiamo di voler fissare (oltre ad α) anche $\beta(\mu) = \widehat{\beta}$, per un qualche μ fissato. Con la semplificazione fatta dalla (7.1) otteniamo $\widehat{\beta} \geq \Phi\left(\frac{\mu_0-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)$. L'unica quantità che possiamo trattare è la numerosità n. Risolvendo l'equazione rispetto a n otteniamo

$$z_{\widehat{\beta}} \geq \frac{\mu_0-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

e dunque

$$\frac{\mu_0-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq z_{\widehat{\beta}} + z_{\frac{\alpha}{2}},$$

cioè

$$n \geq \left(\frac{\sigma}{\mu_0-\mu}\right)^2 \left(z_{\widehat{\beta}} + z_{\frac{\alpha}{2}}\right)^2$$

2. $\mu < \mu_0$
   In questo caso $\frac{\mu-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < 0$ e scriviamo la (7.1) nella forma

$$\begin{aligned}\beta(\mu) &= \Phi\left(\frac{\mu-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} - z_{\frac{\alpha}{2}}\right) - \Phi\left(\frac{\mu-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)\\ &= \Phi\left(\frac{\mu-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) - \Phi\left(\frac{\mu-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} + z_{\frac{\alpha}{2}}\right).\end{aligned}$$

   Si ha $\frac{\mu-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} + z_{\frac{\alpha}{2}} < z_{\frac{\alpha}{2}}$ e dunque

$$0 < \Phi\left(\frac{\mu-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} + z_{\frac{\alpha}{2}}\right) < \frac{\alpha}{2}$$

   e la possiamo considerare una quantità trascurabile. Abbiamo dunque Abbiamo dunque

$$\beta(\mu) \sim \Phi\left(\frac{\mu-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right).$$

   In particolare

$$\sup_{\mu<\mu_0} \beta(\mu) \sim \Phi\left(z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2}.$$

Supponiamo di voler fissare (oltre ad α) anche $\beta(\mu) = \widehat{\beta}$. Con la semplificazione fatta possiamo considerare l'equazione $\widehat{\beta} \geq \Phi\left(\frac{\mu - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)$ e ritroviamo la disuguaglianza trovata nel caso precedente:

$$n \geq \left(\frac{\sigma}{\mu_0 - \mu}\right)^2 \left(z_{\widehat{\beta}} + z_{\frac{\alpha}{2}}\right)^2$$

Test unilaterale inferiore con H_0 semplice

Sia $X_1, \ldots, X_n$ un campione gaussiano di valore atteso μ incognita e varianza σ^2 nota. Vogliamo testare

$$H_0 : \qquad \mu = \mu_0 \qquad\qquad H_A : \qquad \mu > \mu_0.$$

Accetto l'ipotesi nulla H_0 se la media campionaria è inferiore a $\mu_0 + \varepsilon$ cioè se $\overline{x} < \mu_0 + \varepsilon$.

La probabilità di commettere un errore di prima specie è allora

$$\mathbb{P}\left(\overline{X} \geq \mu_0 + \varepsilon | \mu = \mu_0\right).$$

Poiché, se $H - 0$ è vera si ha $\mathbb{P}_{\overline{X}} = N\left(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ e $Z := \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ ha distribuzione $N(0,1)$, si ha

$$\mathbb{P}\left(\overline{X} \geq \mu_0 + \varepsilon | \mu = \mu_0\right) = \mathbb{P}\left(\frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \geq \frac{\varepsilon}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} | \mu = \mu_0\right)$$
$$= \mathbb{P}\left(Z \geq \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(Z \leq \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right).$$

Dunque scelgo $\varepsilon = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha}$. Presi i dati $x_1, \ldots, x_n$, sia dunque $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ la loro media.

$$\text{Accetto } H_0 \text{ se } \overline{x} < \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha} \text{ e la rifiuto altrimenti.}$$

Test unilaterale inferiore con H_0 composta

Sia $X_1, \ldots, X_n$ un campione gaussiano di valore atteso μ incognita e varianza σ^2 nota. Vogliamo testare

$$H_0 : \qquad \mu \leq \mu_0 \qquad\qquad H_A : \qquad \mu > \mu_0.$$

Accetto l'ipotesi nulla H_0 se la media campionaria è inferiore a $\mu_0 + \varepsilon$ cioè se $\overline{x} < \mu_0 + \varepsilon$.

La probabilità di commettere un errore di prima specie è allora

$$\mathbb{P}\left(\overline{X} \geq \mu_0 + \varepsilon | \mu \leq \mu_0\right).$$

Poiché $\mathbb{P}_{\overline{X}} = N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ e $Z := \frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ ha distribuzione $N(0,1)$, si ha

$$\mathbb{P}\left(\overline{X} \geq \mu_0 + \varepsilon | \mathbb{E}\left[\overline{X}\right] = \mu\right) = \mathbb{P}\left(\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \geq \frac{\mu_0 - \mu + \varepsilon}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} | \mathbb{E}\left[\overline{X}\right] = \mu\right)$$
$$= \mathbb{P}\left(Z \geq \frac{(\mu_0 - \mu + \varepsilon)\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(Z \leq \frac{(\mu_0 - \mu + \varepsilon)\sqrt{n}}{\sigma}\right)$$
$$= 1 - \Phi\left(\frac{(\mu_0 - \mu + \varepsilon)\sqrt{n}}{\sigma}\right) \leq 1 - \Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right).$$

Se voglio limitare superiormente $\mathbb{P}\left(\overline{X} > \mu_0 + \varepsilon | \mu \leq \mu_0\right)$, cioè se voglio

$$\mathbb{P}\left(\overline{X} > \mu_0 + \varepsilon | \mathbb{E}\left[\overline{X}\right] = \mu\right) \leq \alpha \qquad \forall \mu \leq \mu_0$$

scelgo ε in modo da avere $1 - \Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right) = \alpha$ cioè $\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma} = z_{1-\alpha}$ e dunque scelgo

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha}.$$

Presi i dati $x_1, \ldots, x_n$, sia dunque $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ la loro media.

Accetto H_0 se $\overline{x} < \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha}$ e la rifiuto altrimenti.

Test unilaterale superiore con H_0 semplice

Sia $X_1, \ldots, X_n$ un campione gaussiano di media μ incognita e varianza σ^2 nota. Vogliamo testare

$$H_0: \quad \mu = \mu_0 \qquad H_A: \mu < \mu_0$$

Accetto l'ipotesi nulla H_0 se la media campionaria è superiore a $\mu_0 - \varepsilon$ cioè se $\overline{x} > \mu_0 - \varepsilon$. La probabilità di commettere un errore di prima specie è allora

$$\mathbb{P}\left(\overline{X} \leq \mu_0 - \varepsilon | \mu = \mu_0\right).$$

Poiché, se H_0 è vera, $\mathbb{P}_{\overline{X}} = N\left(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n}\right)$, e $Z := \frac{\overline{X}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ ha distribuzione $N(0,1)$, si ha

$$\mathbb{P}\left(\overline{X} \leq \mu_0 - \varepsilon | \mu = \mu_0\right) = \mathbb{P}\left(\frac{\overline{X}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq \frac{-\varepsilon}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} | \mu = \mu_0\right) = \mathbb{P}\left(Z \leq \frac{-\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right)$$
$$= \Phi\left(\frac{-\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right).$$

Dunque scelgo ε in modo da avere $\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 1 - \alpha$ cioè $\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma} = z_{1-\alpha}$ cioè scelgo

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha}.$$

Presi i dati $x_1, \ldots, x_n$, sia dunque $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ la loro media.

$$\text{Accetto } H_0 \text{ se } \overline{x} > \mu_0 - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha} \text{ e la rifiuto altrimenti.}$$

Test unilaterale superiore con H_0 composta

Sia $X_1, \ldots, X_n$ un campione gaussiano di media μ incognita e varianza σ^2 nota. Vogliamo testare

$$H_0: \qquad \mu \geq \mu_0 \qquad\qquad H_A: \mu < \mu_0.$$

Accetto l'ipotesi nulla H_0 se la media campionaria è superiore a $\mu_0 - \varepsilon$ cioè se $\overline{x} > \mu_0 - \varepsilon$. La probabilità di commettere un errore di prima specie è allora

$$\mathbb{P}\left(\overline{X} \leq \mu_0 - \varepsilon | \mathbb{E}\left[\overline{X}\right] \leq \mu_0\right).$$

Poiché, se $\mathbb{P}_{X_i} = N\left(\mu, \sigma^2\right)$ si ha $\mathbb{P}_{\overline{X}} = N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$, e $Z := \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ ha distribuzione $N(0,1)$, abbiamo anche

$$\mathbb{P}\left(\overline{X} \leq \mu_0 - \varepsilon | \mathbb{E}\left[\overline{X}\right] = \mu \geq \mu_0\right) = \mathbb{P}\left(\frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq \frac{\mu_0 - \mu - \varepsilon}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} | \mathbb{E}\left[\overline{X}\right] = \mu \geq \mu_0\right) =$$
$$= \mathbb{P}\left(Z \leq \frac{(\mu_0 - \mu - \varepsilon)\sqrt{n}}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{(\mu_0 - \mu - \varepsilon)\sqrt{n}}{\sigma}\right) \leq \Phi\left(\frac{-\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right).$$

Se voglio limitare superiormente $\mathbb{P}\left(\overline{X} \leq \mu_0 - \varepsilon | \mu \geq \mu_0\right)$ cioè se voglio

$$\mathbb{P}\left(\overline{X} \leq \mu_0 - \varepsilon | \mathbb{E}\left[\overline{X}\right] = \mu \geq \mu_0\right) \leq \alpha \qquad \forall \mu \geq \mu_0$$

scelgo ε in modo da avere $\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 1 - \alpha$ cioè $\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma} = z_{1-\alpha}$ e dunque scelgo

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha}.$$

Presi i dati $x_1, \ldots, x_n$, sia dunque $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ la loro media.

$$\text{Accetto } H_0 \text{ se } \overline{x} > \mu_0 - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha} \text{ e la rifiuto altrimenti.}$$

7.2.2 Campione gaussiano di cui non è nota la varianza

Test bilaterale

Sia $X_1, \ldots, X_n$ un campione gaussiano di media μ e varianza σ^2 entrambe ignote. Vogliamo testare

$$H_0: \qquad \mu = \mu_0 \qquad\qquad H_A: \qquad \mu \neq \mu_0/$$

H_0 è vera se e solo se $\mathbb{E}\left[\overline{X}\right] = \mu_0$ ovvero, per l'indipendenza di $\overline{X}$ e S^2, se e solo se $\mathbb{E}\left[\frac{(\overline{X}-\mu_0)\sqrt{n}}{S}\right] = \mathbb{E}\left[\overline{X}-\mu_0\right]\sqrt{n}\,\mathbb{E}\left[\frac{1}{\sqrt{S^2}}\right] = 0$. Dunque considero $t := \frac{(\overline{x}-\mu_0)\sqrt{n}}{s}$ e accetto l'ipotesi nulla H_0 se $|t| \leq \varepsilon$.

Sappiamo che, se $\mu = \mu_0$, allora $T := \frac{(\overline{X}-\mu_0)\sqrt{n}}{S}$ ha distribuzione $t(n-1)$. Il livello di di significatività è allora $\alpha = \mathbb{P}\left(|T| \geq \varepsilon\right)$ e si ha

$$\begin{aligned}\alpha &= \mathbb{P}\left(|T| \geq \varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(T \geq \varepsilon\right) + \mathbb{P}\left(T \leq -\varepsilon\right)\\ &= 1 - F_T(\varepsilon) + F_T(-\varepsilon) = 2\left(1 - F_T(\varepsilon)\right)\end{aligned}$$

Se voglio fissare a priori α, deve essere allora $F_T(\varepsilon) = 1 - \frac{\alpha}{2}$ dunque devo scegliere

$$\varepsilon = t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}.$$

Presi i dati $x_1, \ldots, x_n$, dunque accetto H_0 se $|t| \leq t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}$ e la rifiuto altrimenti, ovvero

$$\text{accetto } H_0 \text{ se } \mu_0 - \frac{t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\, s}{\sqrt{n}} \leq \overline{x} \leq \mu_0 + \frac{t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\, s}{\sqrt{n}} \text{ e la rifiuto altrimenti.}$$

Test unilaterale inferiore con ipotesi nulla semplice

Sia $X_1, \ldots, X_n$ un campione gaussiano di media μ e varianza σ^2 entrambe incognite. Vogliamo testare

$$H_0: \quad \mu = \mu_0, \qquad H_A: \quad \mu > \mu_0$$

Diamo la seguente regola di accettazione: accettiamo H_0 se $\frac{(\overline{x}-\mu_0)\sqrt{n}}{s} \leq \varepsilon$.

La probabilità di commettere un errore di prima specie è allora

$$\alpha = \mathbb{P}\left(\frac{(\overline{X}-\mu_0)\sqrt{n}}{S} > \varepsilon | \mu = \mu_0\right) = \mathbb{P}\left(T > \varepsilon\right) = 1 - F_T(\varepsilon).$$

dove $\mathbb{P}_T = t(n-1)$. Se vogliamo stabilire il livello di significatività α dovremmo scegliere ε in modo che

$$1 - F_T(\varepsilon) = \alpha$$

cioè $\varepsilon = t_{n-1,1-\alpha}$.

Presi i dati $x_1, \ldots, x_n$, sia dunque $t_0 = \frac{(\overline{x}-\mu_0)\sqrt{n}}{s}$. Accetto H_0 se $t_0 \leq t_{n-1,1-\alpha}$ ovvero

$$\text{accetto } H_0 \text{ se } \overline{x} \leq \mu_0 + \frac{t_{n-1,1-\alpha}\, s}{\sqrt{n}} \text{ e la rifiuto altrimenti.}$$

Test unilaterale inferiore con ipotesi nulla composta

Sia $X_1, \ldots, X_n$ un campione gaussiano di media μ e varianza σ^2 entrambe incognite. Vogliamo testare

$$H_0: \quad \mu \leq \mu_0, \qquad H_A: \quad \mu > \mu_0$$

Diamo la seguente regola di accettazione: accettiamo H_0 se $\frac{(\overline{X}-\mu_0)\sqrt{n}}{S} \leq \varepsilon$.

La probabilità di commettere un errore di prima specie è allora

$$\mathbb{P}\left(\frac{(\overline{X}-\mu_0)\sqrt{n}}{S} > \varepsilon | \mathbb{E}\left[\overline{X}\right] = \mu \leq \mu_0\right).$$

Se H_0 è vera, allora $\mathbb{E}\left[\overline{X}\right] = \mu \leq \mu_0$ e dunque

$$\frac{(\overline{X}-\mu_0)\sqrt{n}}{S} \leq \frac{(\overline{X}-\mu)\sqrt{n}}{S} =: T, \qquad \mathbb{P}_T = t(n-1).$$

Di conseguenza

$$\left\{\frac{(\overline{X}-\mu_0)\sqrt{n}}{S} > \varepsilon\right\} \subset \left\{\frac{(\overline{X}-\mu)\sqrt{n}}{S} > \varepsilon\right\}$$

Dunque, per ogni $\mu \leq \mu_0$ si ha

$$\mathbb{P}\left(\frac{(\overline{X}-\mu_0)\sqrt{n}}{S} > \varepsilon | \mathbb{E}\left[\overline{X}\right] = \mu\right) \leq$$
$$\leq \mathbb{P}\left(\frac{(\overline{X}-\mu)\sqrt{n}}{S} > \varepsilon | \mathbb{E}\left[\overline{X}\right] = \mu\right) = \mathbb{P}\left(T > \varepsilon\right) = 1 - F_T(\varepsilon).$$

Se vogliamo controllare il livello di significatività α dovremmo scegliere ε in modo che

$$1 - F_T(\varepsilon) = \alpha$$

cioè $\varepsilon = t_{n-1,1-\alpha}$.

Presi i dati $x_1, \ldots, x_n$, sia dunque $t_0 = \dfrac{(\overline{x}-\mu_0)\sqrt{n}}{s}$. Accetto H_0 se $t_0 \leq t_{n-1,1-\alpha}$ ovvero

$$\text{accetto } H_0 \text{ se } \overline{x} \leq \mu_0 + \frac{t_{n-1,1-\alpha}\, s}{\sqrt{n}} \text{ e la rifiuto altrimenti.}$$

Test unilaterale superiore con ipotesi nulla semplice

Sia $X_1, \ldots, X_n$ un campione gaussiano di media μ e varianza σ^2 entrambe incognite. Vogliamo testare

$$H_0: \qquad \mu = \mu_0, \qquad\qquad H_A: \qquad \mu < \mu_0.$$

Diamo la seguente regola di accettazione: accettiamo H_0 se $\dfrac{(\overline{x}-\mu_0)\sqrt{n}}{s} \geq -\varepsilon$.

La probabilità di commettere un errore di prima specie è allora

$$\alpha = \mathbb{P}\left(\frac{(\overline{X}-\mu_0)\sqrt{n}}{S} < -\varepsilon | \mu = \mu_0\right) = \mathbb{P}\left(T < -\varepsilon\right) = F_T(-\varepsilon)$$

dove $\mathbb{P}_T = t(n-1)$. Se vogliamo stabilire il livello di significatività α dovremmo scegliere ε in modo che

$$F_T(-\varepsilon) = \alpha$$

cioè $\varepsilon = -t_{n-1,\alpha} = t_{n-1,1-\alpha}$.

Presi i dati $x_1, \ldots, x_n$, sia dunque $t_0 = \dfrac{(\overline{x}-\mu_0)\sqrt{n}}{s}$. Accetto H_0 se $t_0 \geq -t_{n-1,1-\alpha}$ e la rifiuto altrimenti, ovvero accetto H_0 se

$$\overline{x} \geq \mu_0 - \frac{t_{n-1,1-\alpha}\, s}{\sqrt{n}}$$

e la rifiuto altrimenti.

Test unilaterale superiore con ipotesi nulla composta

Sia $X_1, \ldots, X_n$ un campione gaussiano di media μ e varianza σ^2 entrambe incognite. Vogliamo testare l'ipotesi

$$H_0: \qquad \mu \geq \mu_0, \qquad\qquad H_A: \qquad \mu < \mu_0.$$

Diamo la seguente regola di accettazione: accettiamo H_0 se $\dfrac{(\overline{x}-\mu_0)\sqrt{n}}{s} \geq -\varepsilon$.

La probabilità di commettere un errore di prima specie è allora

$$\mathbb{P}\left(\frac{(\overline{X}-\mu_0)\sqrt{n}}{S} < -\varepsilon | \mathbb{E}\left[\overline{X}\right] = \mu \geq \mu_0\right).$$

Se H_0 è vera, allora $\mathbb{E}\left[\overline{X}\right] = \mu \geq \mu_0$ e dunque

$$\frac{(\overline{X}-\mu_0)\sqrt{n}}{S} \geq \frac{(\overline{X}-\mu)\sqrt{n}}{S} =: T, \qquad \mathbb{P}_T = t(n-1).$$

Di conseguenza

$$\left\{\frac{(\overline{X}-\mu_0)\sqrt{n}}{S} < -\varepsilon\right\} \subset \left\{\frac{(\overline{X}-\mu)\sqrt{n}}{S} < -\varepsilon\right\}$$

Dunque per ogni $\mu \geq \mu_0$ si ha

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\frac{(\overline{X}-\mu_0)\sqrt{n}}{S} < -\varepsilon | \mathbb{E}\left[\overline{X}\right] = \mu\right) &\leq \mathbb{P}\left(\frac{(\overline{X}-\mu)\sqrt{n}}{S} < -\varepsilon | \mathbb{E}\left[\overline{X}\right] = \mu\right) \\ &= \mathbb{P}\left(T < -\varepsilon\right) = F_T(-\varepsilon) = 1 - F_T(\varepsilon).\end{aligned}$$

Se vogliamo controllare il livello di significatività α dovremmo scegliere ε in modo che

$$1 - F_T(\varepsilon) = \alpha$$

cioè $\varepsilon = t_{n-1,1-\alpha}$.

Presi i dati $x_1, \ldots, x_n$, sia dunque $t_0 = \dfrac{(\overline{x}-\mu_0)\sqrt{n}}{s}$. Accetto H_0 se $t_0 \geq -t_{n-1,1-\alpha}$ e la rifiuto altrimenti, ovvero

$$\text{accetto } H_0 \text{ se } \overline{x} \geq \mu_0 - \frac{t_{n-1,1-\alpha}\, s}{\sqrt{n}} \text{ e la rifiuto altrimenti.}$$

7.3 Test d'ipotesi per la varianza di campioni gaussiani

Test bilaterale

Sia $X_1, \ldots, X_n$ un campione gaussiano di media μ (nota o incognita) e varianza σ^2 incognita. Vogliamo testare

$$H_0: \qquad \sigma^2 = \sigma_0^2 \qquad\qquad H_A: \qquad \sigma^2 \neq \sigma_0^2$$

H_0 è vera se e solo se $\mathbb{E}\left[S^2\right] = \sigma_0^2$ ovvero se e solo se $\mathbb{E}\left[\dfrac{S^2}{\sigma_0^2}\right] = 1$. Dunque accetto H_0 se $1-\varepsilon_1 < \dfrac{s^2}{\sigma_0^2} < 1+\varepsilon_2$, ε_1, ε_2 positivi, cioè se e solo se

$$(n-1)(1-\varepsilon_1) < \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} < (n-1)(1+\varepsilon_2).$$

Devo scegliere ε_1 e e_2 in modo da ottenere il livello di significatività α desiderato. Sappiamo che se H_0 è vera, allora la v.a. $V := \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ ha distribuzione χ^2_{n-1}.

$$\begin{aligned}
\alpha &= \mathbb{P}\left(\frac{S^2}{\sigma_0^2} > 1+\varepsilon_2 | \sigma^2=\sigma_0^2\right) + \mathbb{P}\left(\frac{S^2}{\sigma_0^2} < 1-\varepsilon_1 | \sigma^2=\sigma_0^2\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} > (n-1)(1+\varepsilon_2) | \sigma^2=\sigma_0^2\right) + \mathbb{P}\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} < (n-1)(1-\varepsilon_1) | \sigma^2=\sigma_0^2\right) \\
&= \mathbb{P}\left(V > (n-1)(1+\varepsilon_2)\right) + \mathbb{P}\left(V < (n-1)(1-\varepsilon_1)\right).
\end{aligned}$$

Una possibile scelta è allora

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(V > (n-1)(1+\varepsilon_2)\right) = \frac{\alpha}{2} \qquad \text{cioè} \quad (n-1)(1+\varepsilon_2) = \chi^2_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}} \\
&\mathbb{P}\left(V < (n-1)(1-\varepsilon_1)\right) = \frac{\alpha}{2} \qquad \text{cioè} \quad (n-1)(1-\varepsilon_1) = \chi^2_{n-1,\frac{\alpha}{2}}.
\end{aligned}$$

Dunque accetto H_0 se $\chi^2_{n-1,\frac{\alpha}{2}} < \dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} < \chi^2_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}$ ovvero

$$\text{accetto } H_0 \text{ se } \frac{\sigma_0^2}{n-1}\chi^2_{n-1,\frac{\alpha}{2}} < s^2 < \frac{\sigma_0^2}{n-1}\chi^2_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}} \text{ e la rifiuto altrimenti.}$$

Test unilaterale inferiore con ipotesi semplice

Sia $X_1, \ldots, X_n$ un campione gaussiano di media μ (nota o incognita) e varianza σ^2 incognita. Vogliamo testare

$$H_0: \qquad \sigma^2 = \sigma_0^2 \qquad\qquad H_A: \qquad \sigma^2 > \sigma_0^2.$$

Accetto l'ipotesi nulla se $\dfrac{s^2}{\sigma_0^2} \leq 1+\varepsilon$.

Se la varianza è σ_0^2, allora $V := \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$ ha distribuzione χ^2_{n-1} e la probabilità di commettere errore di prima specie è

$$\mathbb{P}\left(\frac{S^2}{\sigma_0^2} > 1+\varepsilon | \sigma^2=\sigma_0^2\right) = \mathbb{P}\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} > (n-1)(1+\varepsilon) | \sigma^2=\sigma_0^2\right) = 1-F_V\left((n-1)(1+\varepsilon)\right).$$

Posso allora limitare superiormente con α la probabilità di commettere errore di prima specie imponendo

$$1-F_V\left((n-1)(1+\varepsilon)\right) = \alpha$$

cioè scegliendo ε in modo che

$$(n-1)(1+\varepsilon) = \chi^2_{n-1,1-\alpha}.$$

Dunque accetto l'ipotesi nulla H_0 se $\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} < \chi^2_{n-1,1-\alpha}$ ovvero

$$\text{acccetto } H_0 \text{ se } s^2 < \frac{\sigma_0^2}{n-1}\chi^2_{n-1,1-\alpha} \text{ e la rifiuto altrimenti.}$$

Test unilaterale inferiore con ipotesi composta

Sia $X_1, \ldots, X_n$ un campione gaussiano di media μ (nota o incognita) e varianza σ^2 incognita. Vogliamo testare

$$H_0 : \qquad \sigma^2 \leq \sigma_0^2 \qquad\qquad H_A : \qquad \sigma^2 > \sigma_0^2.$$

Accetto l'ipotesi nulla se $\dfrac{s^2}{\sigma_0^2} \leq 1 + \varepsilon$.

Se la varianza è $\sigma^2 \leq \sigma_0^2$, allora $V := \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ ha distribuzione χ^2_{n-1} e la probabilità di commettere errore di prima specie è

$$\mathbb{P}\left(\frac{S^2}{\sigma_0^2} > 1 + \varepsilon | \mathrm{Var}\left[X_i\right] = \sigma^2 \leq \sigma_0\right) = \mathbb{P}\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} > \frac{\sigma_0^2}{\sigma^2}(n-1)(1+\varepsilon) | \mathrm{Var}\left[X_i\right] = \sigma^2 \leq \sigma_0\right)$$
$$= \mathbb{P}\left(V > \frac{\sigma_0^2}{\sigma^2}(n-1)(1+\varepsilon)\right) = 1 - F_V\left(\frac{\sigma_0^2}{\sigma^2}(n-1)(1+\varepsilon)\right)$$
$$\leq 1 - F_V\left((n-1)(1+\varepsilon)\right)$$

dove abbiamo usato la monotonia di F_V e il fatto che $\sigma^2 \leq \sigma_0^2$ implica $\dfrac{\sigma^2}{\sigma_0^2} \leq 1$.

Posso allora limitare superiormente con α la probabilità di commettere errore di prima specie imponendo

$$1 - F_V\left((n-1)(1+\varepsilon)\right) = \alpha$$

cioè scegliendo ε in modo che

$$(n-1)(1+\varepsilon) = \chi^2_{n-1,1-\alpha}.$$

Dunque accetto l'ipotesi nulla H_0 se $\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} < \chi^2_{n-1,1-\alpha}$ ovvero

$$\text{accetto } H_0 \text{ se } s^2 < \frac{\sigma_0^2}{n-1}\chi^2_{n-1,1-\alpha} \text{ e la rifiuto altrimenti.}$$

Test unilaterale superiore con ipotesi semplice

Sia $X_1, \ldots, X_n$ un campione gaussiano di media μ (nota o incognita) e varianza σ^2 incognita. Vogliamo testare

$$H_0 : \qquad \sigma^2 = \sigma_0^2 \qquad\qquad H_A : \qquad \sigma^2 < \sigma_0^2.$$

Accetto l'ipotesi nulla se $\dfrac{s^2}{\sigma_0^2} \geq 1 - \varepsilon$.

Se H_0 è vera, allora $V := \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$ ha distribuzione χ^2_{n-1} e la probabilità di commettere errore di prima specie è

$$\alpha = \mathbb{P}\left(\frac{S^2}{\sigma_0^2} < 1 - \varepsilon | \sigma^2 = \sigma_0^2\right) = F_V\left((n-1)(1-\varepsilon)\right).$$

Deve quindi essere

$$(n-1)(1-\varepsilon) = \chi^2_{n-1,\alpha}.$$

Dunque accetto l'ipotesi nulla H_0 se $\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} > \chi^2_{n-1,\alpha}$ ovvero

$$\text{accetto } H_0 \text{ se } s^2 > \frac{\sigma_0^2}{n-1}\chi^2_{n-1,\alpha} \text{ e la rifiuto altrimenti.}$$

Test unilaterale superiore con ipotesi composta

Sia $X_1, \ldots, X_n$ un campione gaussiano di media μ (nota o incognita) e varianza σ^2 incognita. Vogliamo testare

$$H_0: \qquad \sigma^2 \geq \sigma_0^2 \qquad\qquad H_A: \qquad \sigma^2 < \sigma_0^2.$$

Accetto l'ipotesi nulla se $\dfrac{s^2}{\sigma_0^2} \geq 1-\varepsilon$.

Se la varianza è $\sigma^2 \geq \sigma_0^2$, allora $V := \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ ha distribuzione χ^2_{n-1} e la probabilità di commettere errore di prima specie è

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(\frac{S^2}{\sigma_0^2} < 1-\varepsilon | \mathrm{Var}\left[X_i\right] = \sigma^2 \geq \sigma_0^2\right) \\
&\qquad = \mathbb{P}\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \frac{\sigma_0^2}{\sigma^2}(n-1)(1-\varepsilon) | \mathrm{Var}\left[X_i\right] = \sigma^2 \geq \sigma_0^2\right) \\
&\qquad\qquad = F_V\left(\frac{\sigma_0^2}{\sigma^2}(n-1)(1-\varepsilon)\right) \leq F_V\left((n-1)(1-\varepsilon)\right).
\end{aligned}$$

Posso allora limitare superiormente con α la probabilità di commettere errore di prima specie imponendo

$$F_V\left((n-1)(1-\varepsilon)\right) = \alpha$$

cioè scegliendo ε in modo che

$$(n-1)(1-\varepsilon) = \chi^2_{n-1,\alpha}.$$

Dunque accetto l'ipotesi nulla H_0 se $\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} > \chi^2_{n-1,\alpha}$ ovvero

$$\text{accetto } H_0 \text{ se } s^2 > \frac{\sigma_0^2}{n-1}\chi^2_{n-1,\alpha} \text{ e la rifiuto altrimenti.}$$

8. Intervalli di confidenza e Test di ipotesi per il confronto di campioni gaussiani

8.1 Intervalli di confidenza per la differenza dei valori attesi di campioni gaussiani

Supponiamo di avere due campioni, entrambi gaussiani e tra di loro indipendenti

$$\begin{aligned} &X : X_1,\ \ldots,\ X_n \qquad \mathbb{P}_{X_i} = N\left(\mu_X, \sigma_X^2\right), \\ &Y : Y_1,\ \ldots,\ Y_k \qquad \mathbb{P}_{Y_j} = N\left(\mu_Y, \sigma_Y^2\right). \end{aligned}$$

Vogliamo costruire un intervallo di confidenza per la differenza $\mu_X - \mu_Y$. Consideriamo due casi distinti (ma non esaustivi)

8.1.1 Le varianze σ_X^2 e σ_Y^2 sono note

Osservazione 8.1.1. Si può dimostrare che $\overline{X} - \overline{Y}$ è stimatore di massima verosimiglianza per $\mu_X - \mu_Y$.

Sappiamo che $\mathbb{P}_{X_i} = N\left(\mu_X, \sigma_X^2\right)$, $\mathbb{P}_{Y_j} = N\left(\mu_Y, \sigma_Y^2\right)$, dunque

$$\mathbb{P}_{\overline{X}} = N\left(\mu_X, \frac{\sigma_X^2}{n}\right), \qquad \mathbb{P}_{\overline{Y}} = N\left(\mu_Y, \frac{\sigma_Y^2}{k}\right).$$

Di conseguenza la v.a. $\dfrac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_X^2}{n} + \dfrac{\sigma_Y^2}{k}}}$ ha distribuzione gaussiana standard. Abbiamo dunque

$$\begin{aligned} 1 - \alpha &= \mathbb{P}\left(z_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_X^2}{n} + \dfrac{\sigma_Y^2}{k}}} < z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right) \\ &= \mathbb{P}\left(\overline{X} - \overline{Y} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{k}} < \mu_X - \mu_Y < \overline{X} - \overline{Y} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{k}} \right). \end{aligned}$$

Abbiamo dunque determinato l'intervallo di confidenza bilaterale di livello $1 - \alpha$

$$(L_i, L_s) = \left(\overline{X} - \overline{Y} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{k}}, \overline{X} - \overline{Y} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{k}} \right)$$

Esercizio 8.1.1. Dimostrare che

- $(-\infty, L_s) = \left(-\infty, \overline{X} - \overline{Y} + z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{k}}\right)$ è un intervallo di confidenza inferiore di livello $1-\alpha$;
- $(L_i, +\infty) = \left(\overline{X} - \overline{Y} - z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{k}}, +\infty\right)$ è un intervallo di confidenza superiore di livello $1-\alpha$.

8.1.2 Le varianze σ_X^2 e σ_Y^2 sono ignote ma si possono ritenere uguali

Indico con σ^2 il comune valore delle due varianze. Considero le varianze campionarie dei due campioni

$$S_X^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2, \qquad S_Y^2 = \frac{1}{k-1}\sum_{j=1}^k (Y_j - \overline{Y})^2.$$

Sappiamo che $V_X := \frac{(n-1)S_X^2}{\sigma^2}$ segue la distribuzione χ^2_{n-1}, e che $V_Y := \frac{(k-1)S_Y^2}{\sigma^2}$ segue la distribuzione χ^2_{k-1}. Inoltre, poiché i due campioni sono indipendenti, anche V_X e V_Y sono indipendenti. Dunque, per il Teorema 4.3.2, $V_X + V_Y$ segue la distribuzione $\chi^2_{n-1+k-1} = \chi^2_{n+k-2}$: $\mathbb{P}_{V_X+V_Y} = \chi^2_{n+k-2}$.

D'altra parte

$$V_X + V_Y = \frac{(n-1)S_X^2 + (k-1)S_Y^2}{\sigma^2} = \frac{n+k-2}{\sigma^2}\,\frac{(n-1)S_X^2 + (k-1)S_Y^2}{n+k-2}.$$

Se definiamo la statistica:

$$\overline{S}^2 := \frac{(n-1)S_X^2 + (k-1)S_Y^2}{n+k-2}.$$

abbiamo

$$V_X + V_Y = \frac{(n+k-2)\overline{S}^2}{\sigma^2}.$$

Inoltre sappiamo che $\overline{X} - \overline{Y}$ ha distribuzione $N\left(\mu_X - \mu_Y, \sigma^2\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{k}\right)\right)$, quindi

$$Z := \frac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_X - \mu_Y)}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{k}}}$$

ha distribuzione gaussiana standard $N(0,1)$. Considero

$$\begin{aligned} T :=& \frac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_X - \mu_Y)}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{k}}}\,\frac{\sqrt{n+k-2}}{\sqrt{V_X + V_Y}} \\ =& \frac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{k}}}\,\frac{\sqrt{n+k-2}}{\sqrt{(n-1)S_X^2 + (k-1)S_Y^2}} = \frac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{k}}}\,\frac{1}{\overline{S}}. \end{aligned}$$

Poiché i due campioni sono gaussiani e indipendenti le v.a. $\overline{X}$, S_X^2, $\overline{Y}$ e S_Y^2 sono indipendenti, quindi $\overline{X}-\overline{Y}$ e V_X+V_Y sono indipendenti, e dunque $\mathbb{P}_T = t_{n+k-2}$, vedi Teorema 4.3.8.

Abbiamo dunque

$$1-\alpha = \mathbb{P}\left(t_{n+k-2,\frac{\alpha}{2}} < \frac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_X-\mu_Y)}{\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{k}}}\frac{1}{S} < t_{n+k-2,1-\frac{\alpha}{2}} \right)$$
$$= \mathbb{P}\left(\overline{X}-\overline{Y}-t_{n+k-2,1-\frac{\alpha}{2}}\overline{S}\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{k}} < \mu_X-\mu_Y < \overline{X}-\overline{Y}+t_{n+k-2,1-\frac{\alpha}{2}}\overline{S}\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{k}} \right).$$

Abbiamo dunque l'intervallo di confidenza di livello $1-\alpha$

$$(L_i, L_s) = \left(\overline{X}-\overline{Y}-t_{n+k-2,1-\frac{\alpha}{2}}\overline{S}\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{k}}, \overline{X}-\overline{Y}+t_{n+k-2,1-\frac{\alpha}{2}}\overline{S}\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{k}} \right)$$

8.2 Test d'ipotesi per la differenza dei valori attesi di campioni gaussiani

Supponiamo di avere due campioni, entrambi gaussiani e tra di loro indipendenti

$$\begin{aligned} &X\colon X_1,\ \dots,\ X_n \qquad \mathbb{P}_{X_i} = N\left(\mu_X, \sigma_X^2\right), \\ &Y\colon Y_1,\ \dots,\ Y_k \qquad \mathbb{P}_{Y_j} = N\left(\mu_Y, \sigma_Y^2\right). \end{aligned}$$

Vogliamo testare

$$H_0: \qquad \mu_X-\mu_Y = d \qquad\qquad H_A: \qquad \mu_X-\mu_Y \neq d.$$

Osserviamo che $\mu_X-\mu_Y=d$ se e solo se $\mathbb{E}\left[\overline{X}-\overline{Y}\right]=d$.

Distinguiamo tre diversi casi

8.2.1 Le varianze σ_X^2 e σ_Y^2 sono note

Sappiamo che $\mathbb{P}_{\overline{X}} = N\left(\mu_x, \frac{\sigma_X^2}{n}\right)$, $\mathbb{P}_{\overline{Y}} = N\left(\mu_Y, \frac{\sigma_Y^2}{k}\right)$. Considero la v.a. $W := \overline{X}-\overline{Y}$. Poiché i due campioni sono indipendenti, anche $\overline{X}$ e $\overline{Y}$ sono indipendenti, abbiamo che

$$\mathbb{P}_W = N\left(\mu_X-\mu_Y, \frac{\sigma_X^2}{n}+\frac{\sigma_Y^2}{k}\right).$$

Dunque H_0 è vera se e solo se $\mathbb{P}_W = N\left(d, \frac{\sigma_X^2}{n}+\frac{\sigma_Y^2}{k}\right)$. Stabilisco quindi il seguente criterio di accettazione:

$$\text{Accetto } H_0 \text{ se e solo se } |w-d| = |\overline{x}-\overline{y}-d| < \varepsilon.$$

La probabilità di commettere errore di prima specie vale allora

$$\alpha = \mathbb{P}\left(|W-d|\geq\varepsilon|\mu_X-\mu_Y=d\right) = \mathbb{P}\left(\frac{|W-d|}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n}+\frac{\sigma_Y^2}{k}}} \geq \frac{\varepsilon}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n}+\frac{\sigma_Y^2}{k}}} |\mu_X-\mu_Y=d \right)$$

D'altra parte, se H_0 è vera, allora $Z := \dfrac{W-d}{\sqrt{\dfrac{\sigma_X^2}{n}+\dfrac{\sigma_Y^2}{k}}}$ ha distribuzione gaussiana standard $N(0,1)$, e dunque dovremo scegliere $\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{\dfrac{\sigma_X^2}{n}+\dfrac{\sigma_Y^2}{k}}} = z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ ovvero

$$\varepsilon = z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n}+\frac{\sigma_Y^2}{k}}.$$

Dunque

$$\text{accetto l'ipotesi } H_0 \text{ se } |\overline{x}-\overline{y}-d| < z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n}+\frac{\sigma_Y^2}{k}} \text{ e la rifiuto altrimenti.}$$

Osservazione 8.2.1. Se $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = \sigma_0^2$ e $k = n$, allora $\varepsilon = z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma_0\sqrt{\dfrac{2}{n}}$.

8.2.2 Le varianze σ_X^2 e σ_Y^2 sono ignote ma si possono ritenere uguali

Consideriamo le due varianze campionarie

$$S_X^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2, \qquad S_Y^2 = \frac{1}{k-1}\sum_{j=1}^{k}(Y_j-\overline{Y})^2.$$

Indico con σ^2 il comune valore di σ_X^2 e σ_Y^2. Sappiamo che $V_X := \dfrac{(n-1)S_X^2}{\sigma^2}$ segue la distribuzione χ^2_{n-1}, e che $V_Y := \dfrac{(k-1)S_Y^2}{\sigma^2}$ segue la distribuzione χ^2_{k-1}. Inoltre, poiché i due campioni sono indipendenti, anche V_X e V_Y sono idipendenti. Dunque, per il Teorema 4.3.2, $V_X + V_Y$ segue la distribuzione $\chi^2_{n-1+k-1} = \chi^2_{n+k-2}$

D'altra parte

$$V_X + V_Y = \frac{(n-1)S_X^2+(k-1)S_Y^2}{\sigma^2} = \frac{n+k-2}{\sigma^2}\,\frac{(n-1)S_X^2+(k-1)S_Y^2}{n+k-2}.$$

Se definiamo la statistica:

$$\overline{S}^2 := \frac{(n-1)S_X^2+(k-1)S_Y^2}{n+k-2}.$$

abbiamo

$$V_X + V_Y = \frac{(n+k-2)\overline{S}^2}{\sigma^2}.$$

Inoltre sappiamo che $\overline{X}-\overline{Y}$ ha distribuzione $N\left(\mu_X-\mu_Y, \sigma^2\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{k}\right)\right)$, quindi

$$Z := \frac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_X-\mu_Y)}{\sigma\sqrt{\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{k}}}$$

ha distribuzione gaussiana standard $N(0,1)$. Considero

$$T := \frac{\overline{X} - \overline{Y} - d}{\sigma\sqrt{\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{k}}} \frac{\sqrt{n+k-2}}{\sqrt{V_X + V_Y}} = \frac{\overline{X} - \overline{Y} - d}{\sqrt{\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{k}}} \frac{\sqrt{n+k-2}}{\sqrt{(n-1)S_X^2 + (k-1)S_Y^2}}.$$

Poiché i due campioni sono gaussiani e indipendenti le v.a. $\overline{X}$, S_X^2, $\overline{Y}$ e S_Y^2 sono indipendenti, quindi $\overline{X} - \overline{Y}$ e $V_X + V_Y$ sono indipendenti, e dunque $\mu_X - \mu_Y = d$ se e solo se e $\mathbb{E}[T] = 0$. Infatti, per l'indipendenza, si ha

$$\mathbb{E}[T] = \frac{\mathbb{E}\left[\overline{X} - \overline{Y} - d\right]}{\sigma\sqrt{\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{k}}} \sqrt{n+k-2}\,\mathbb{E}\left[\frac{1}{\sqrt{V_X + V_Y}}\right].$$

Come criterio di accettazione per l'ipotesi nulla H_0 scelgo pertanto $|t| < \varepsilon$.

Inoltre, se H_0 è vera, allora per il Teorema 4.3.8 la v.a. T segue la distribuzione $t(n+k-2)$. La probabilità di commettere errore di prima specie è quindi $\alpha = \mathbb{P}(|T| \geq \varepsilon)$. Fissato il livello di significatività α, devo dunque scegliere $\varepsilon = t_{n+k-2,1-\frac{\alpha}{2}}$.

Siano $x\colon x_1, \ldots, x_n$ e $y\colon y_1, \ldots, y_k$ i dati, $\overline{x}$ e $\overline{y}$ le rispettive medie, s_x^2 e s_y^2 le rispettive varianze:

$$\text{accetto } H_0 \text{ se } \frac{|\overline{x} - \overline{y} - d|}{\sqrt{\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{k}}} \frac{\sqrt{n+k-2}}{\sqrt{(n-1)s_X^2 + (k-1)s_Y^2}} < t_{n+k-2,1-\frac{\alpha}{2}}, \text{ e la rifiuto altrimenti.}$$

8.3 Test d'ipotesi per l'uguaglianza delle varianze di campioni gaussiani

Introduciamo prima una nuova distribuzione.

8.3.1 Distribuzione di Fisher-Snedecor a k e n gradi di libertà

Si può dimostrare che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma\left(\dfrac{k+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{k}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)} \left(\dfrac{k}{n}\right)^{\frac{k}{2}} \dfrac{x^{\frac{k}{2}-1}}{\left(1 + \dfrac{kx}{n}\right)^{\frac{k+n}{2}}} & x > 0, \\ 0 & x \leq 0. \end{cases}$$

è una densità di probabilità. La distribuzione assolutamente continua ad essa associata si dice *distribuzione di Fisher-Snedecor a k ed n gradi di libertà*, o semplicemente *distribuzione di Fisher a k ed n gradi di libertà*.

Si può dimostrare che se F è una variabile aleatoria con questa distribuzione, allora

$$\mathbb{E}[F] = \begin{cases} \frac{n}{n-2} & n > 2, \\ +\infty & n = 1, 2, \end{cases} \qquad \operatorname{Var}[F] = \begin{cases} \frac{2n^2(k+n-2)}{k(n-2)^2(n-4)} & n > 4, \\ +\infty & n = 3, 4, \\ \text{non esiste} & n = 1, 2. \end{cases}$$

Teorema 8.3.1. *Siano U e V variabili aleatorie indipendenti con distribuzioni $\mathbb{P}_U = \chi^2_k$, $\mathbb{P}_V = \chi^2_n$. Allora la v.a. $F := \dfrac{U/k}{V/n}$ segue la distribuzione di Fisher-Snedecor con k ed n gradi di libertà.*

Dimostrazione. Sappiamo che $\mathbb{P}_U = f(u)\mathrm{d}u$, $\mathbb{P}_V = g(v)\mathrm{d}v$ dove

$$f(u) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma\left(\dfrac{k}{2}\right)}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{k}{2}} u^{\frac{k}{2}-1}\exp\left(\frac{-u}{2}\right) & u > 0, \\ 0 & u \le 0, \end{cases}$$

$$g(v) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}} v^{\frac{n}{2}-1}\exp\left(\frac{-v}{2}\right) & v > 0, \\ 0 & v \le 0. \end{cases}$$

Possiamo scrivere $F = \varphi \circ (U, V)$ dove

$$\varphi\colon (u,v) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \begin{cases} \dfrac{un}{kv} & v \neq 0, \\ 0 & v = 0. \end{cases}$$

Sia $\psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di Borel non negativa. Abbiamo

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(t)\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}^2} \psi(\varphi(u,v))\mathbb{P}_{U,V}(\mathrm{d}u\mathrm{d}v)$$

$$= \int_{(0,+\infty)^2} \psi\left(\frac{nu}{kv}\right)\frac{1}{\Gamma\left(\dfrac{k}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{k+n}{2}} u^{\frac{k}{2}-1}v^{\frac{n}{2}-1}\exp\left(\frac{-(u+v)}{2}\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

sostituiamo $t = \dfrac{nu}{kv}$, $u = \dfrac{kv}{n}t$, $\mathrm{d}u = \dfrac{kv}{n}\mathrm{d}t$

$$= \int_0^{+\infty} \psi(t)\frac{1}{\Gamma\left(\dfrac{k}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{k+n}{2}}\left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{k}{2}} t^{\frac{k}{2}-1}\left(\int_0^{+\infty} y^{\frac{k+n}{2}-1}\exp\left(\frac{-v}{2}\left(1+\frac{kt}{n}\right)\right)\mathrm{d}v\right)\mathrm{d}t$$

sostituiamo $x = \dfrac{v}{2}\left(1+\dfrac{kt}{n}\right) = \dfrac{v}{2}\dfrac{n+kt}{n}$, $v = \dfrac{2nx}{n+kt}$, $\mathrm{d}v = \dfrac{2n}{n+kt}\mathrm{d}x$

$$= \int_0^{+\infty} \psi(t)\frac{1}{\Gamma\left(\dfrac{k}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{k+n}{2}}\left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{k}{2}} t^{\frac{k}{2}-1}\left(\int_0^{+\infty}\left(\frac{2n}{n+kt}\right)^{\frac{k+n}{2}} x^{\frac{k+n}{2}-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{+\infty} \psi(t)\frac{\Gamma\left(\dfrac{k+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{k}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}\left(\frac{n}{n+kt}\right)^{\frac{k+n}{2}}\left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{k}{2}} t^{\frac{k}{2}-1}\mathrm{d}t$$

da cui la tesi. $\square$

Osservazione 8.3.1. Indichiamo con $f_{k,n,\alpha}$ il quantile di livello α associato alla distribuzione di Fisher di parametri k ed n. Siano U e V sono come nel Teorema 8.3.1: U e V variabili aleatorie indipendenti con distribuzioni $\mathbb{P}_U = \chi^2_k$, $\mathbb{P}_V = \chi^2_n$ e sia $\alpha \in (0,1)$. Si ha

$$\alpha = \mathbb{P}\left(\frac{U/k}{V/n} \le f_{k,n,\alpha}\right) = \mathbb{P}\left(\left(\frac{U/k}{V/n}\right)^{-1} \ge \frac{1}{f_{k,n,\alpha}}\right)$$
$$= \mathbb{P}\left(\frac{V/n}{U/k} \ge \frac{1}{f_{k,n,\alpha}}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\frac{V/n}{U/k} \le \frac{1}{f_{k,n,\alpha}}\right)$$

ovvero $\mathbb{P}\left(\frac{V/n}{U/k} \le \frac{1}{f_{k,n,\alpha}}\right) = 1-\alpha$ cioè $\frac{1}{f_{k,n,\alpha}} = f_{n,k,1-\alpha}$.

8.4 Test d'ipotesi per l'uguaglianza delle varianze di campioni gaussiani

Supponiamo di avere due campioni, entrambi gaussiani e tra di loro indipendenti

$$X\colon X_1,\ \ldots,\ X_k \qquad \mathbb{P}_{X_i} = N\left(\mu_X, \sigma^2_X\right),$$
$$Y\colon Y_1,\ \ldots,\ Y_n \qquad \mathbb{P}_{Y_j} = N\left(\mu_Y, \sigma^2_Y\right).$$

Vogliamo testare

$$H_0: \quad \sigma^2_X = \sigma^2_Y \qquad\qquad H_A: \quad \sigma^X_2 \ne \sigma^2_Y.$$

Sappiamo che S^2_X e S^2_Y sono stimatori non distorti di σ^2_X e σ^2_Y, rispettivamente. Dunque:

$$\text{accettiamo } H_0 \text{ se } 1-\varepsilon_1 < \frac{s^2_X}{s^2_Y} < 1+\varepsilon_2, \text{ rifiutiamo altrimenti.}$$

Per scegliere ε_1 ed ε_2 in base al livello di significatività desiderato, consideriamo le v.a.

$$V_X = \frac{(k-1)S^2_X}{\sigma^2_X}, \qquad V_Y = \frac{(n-1)S^2_Y}{\sigma^2_Y}.$$

Sappiamo che $\mathbb{P}_{V_X} = \chi^2_{k-1}$, $\mathbb{P}_{V_Y} = \chi^2_{n-1}$. Dunque, la v.a. $\frac{S^2_X/\sigma^2_X}{S^2_Y/\sigma^2_Y}$ segue la distribuzione di Fisher con $k-1$ ed $n-1$ gradi di libertà. In particolare H_0 è vera se e solo se $F := \frac{S^2_X}{S^2_Y}$ segue la distribuzione di Fisher con $k-1$ ed $n-1$ gradi di libertà.

Abbiamo dunque

$$\alpha = \mathbb{P}\left(\frac{S^2_X}{S^2_Y} \le 1-\varepsilon_1 | \sigma^2_X = \sigma^2_Y\right) + \mathbb{P}\left(\frac{S^2_X}{S^2_Y} \ge 1+\varepsilon_2 | \sigma^2_X = \sigma^2_Y\right).$$

Scegliamo di *distribuire equamente l'errore* imponendo

$$\frac{\alpha}{2} = \mathbb{P}\left(\frac{S^2_X}{S^2_Y} \le 1-\varepsilon_1 | \sigma^2_X = \sigma^2_Y\right) = \mathbb{P}\left(F \le 1-\varepsilon_1\right)$$
$$\frac{\alpha}{2} = \mathbb{P}\left(\frac{S^2_X}{S^2_Y} \ge 1+\varepsilon_2 | \sigma^2_X = \sigma^2_Y\right) = \mathbb{P}\left(F \ge 1+\varepsilon_2\right) = 1 - \mathbb{P}\left(F \le 1+\varepsilon_2\right).$$

Dovrà dunque essere $1-\varepsilon_1 = f_{k-1,n-1,\frac{\alpha}{2}}$, $1+\varepsilon_2 = f_{k-1,n-1,1-\frac{\alpha}{2}}$. In definitiva:

$$\text{accetto } H_0 \text{ se } f_{k-1,n-1,\frac{\alpha}{2}} < \frac{s^2_X}{s^2_Y} < f_{k-1,n-1,1-\frac{\alpha}{2}}. \text{ Rifiuto altrimenti.}$$