6. Intervalli di confidenza

La media campionaria e la varianza campionaria ci offrono una stima dei parametri valore atteso e varianza del campione statistico in esame. Abbiamo però bisogno di sapere *quanto ci si possa fidare di questa stima* ovvero quale sia la probabilità che il *vero* valore del parametro incognito non sia *troppo distante* dalla stima trovata.

Diamo perciò la seguente definizione:

Definizione 6.0.1 (Intervallo di confidenza)**.** Sia $X_1, \ldots, X_n$ un campione statistico e sia θ un parametro (ignoto) che caratterizza la distribuzione del campione.
Siano $L_i = l_i(X_1, \ldots, X_n)$ e $L_s = l_s(X_1, \ldots, X_n)$ due statistiche del campione e sia $\alpha \in (0, 1)$.

- Dico che l'intervallo (L_i, L_s) è un *intervallo di confidenza* (o di fiducia) di livello $1-\alpha$ se $\mathbb{P}\left(\theta \in (L_i, L_s)\right) \geq 1-\alpha$, ovvero che (L_i, L_s) è un intervallo di confidenza (o di fiducia) di errore α se $\mathbb{P}\left(\theta \notin (L_i, L_s)\right) \leq \alpha$.
- Dico che la semiretta $(L_i, +\infty)$ è un *intervallo di confidenza unilaterale superiore* di livello $1-\alpha$ se $\mathbb{P}\left(\theta > L_i\right) \geq 1-\alpha$
- Dico che la semiretta $(-\infty, L_s)$ è un *intervallo di confidenza unilaterale inferiore* di livello $1-\alpha$ se $\mathbb{P}\left(\theta < L_s\right) \geq 1-\alpha$

Osservazione 6.0.1.

1. La scelta dei nomi delle due statistiche non è casuale: L_i sta per limitazione inferiore mentre L_s sta per limitazione superiore.
2. Di solito si è interessati a *piccoli* valori di α, più precisamente a $\alpha \in (10^{-2}, 10^{-1})$.
3. La disuguaglianza di Chebychev ci ha fornito un intervallo di confidenza per il valore atteso μ del campione nel caso in cui la varianza σ^2 sia nota

$$\mathbb{P}\left(\left|\overline{X}-\mu\right| \geq t\right) \leq \frac{\sigma^2}{t^2} \qquad \forall t > 0$$

ovvero

$$\mathbb{P}\left(\left|\overline{X}-\mu\right| < t\right) \geq 1-\frac{\sigma^2}{t^2} \qquad \forall t > 0$$

cioè

$$\mathbb{P}\left(\overline{X}-t < \mu < \overline{X}+t\right) \geq 1-\frac{\sigma^2}{t^2} \qquad \forall t > 0.$$

Fissato $\alpha \in (0, 1)$ scelgo $t = \frac{\sigma}{\sqrt{\alpha}}$. La disuguaglianza di Chebychev si legge allora

$$\mathbb{P}\left(\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{\alpha}} < \mu < \overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{\alpha}}\right) \geq 1-\alpha \qquad \forall \alpha \in (0, 1).$$

Dunque l'intervallo $\left(\overline{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{\alpha}}, \overline{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{\alpha}}\right)$ è un intervallo di confidenza di livello $1-\alpha$ per il valore atteso μ del campione.

6.1 Stima per intervalli del valore atteso di campioni esponenziali

Sia $X_1, \ldots, X_n$ un campione statistico con distrubuzione $\mathbb{P}_{X_i} = \exp(\lambda)$. Cioè $\mathbb{P}_{X_i} = f(x)\mathrm{d}x$ con

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0, \\ \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} & x > 0. \end{cases}$$

Osserviamo che $\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} = \frac{\lambda}{\Gamma(1)} x^{1-1} \mathrm{e}^{-\lambda x}$, dunque $\exp(\lambda) = \Gamma(1,\lambda)$. Di conseguenza, vedi Lemma 4.3.1, $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$ ha distrubuzione $\Gamma(n,\lambda)$ (detta anche *distribuzione di Erlangen di parametri n e λ*) cioè $\mathbb{P}_{S_n} = g(x)\mathrm{d}x$ con

$$g(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0, \\ \frac{\lambda^n x^{n-1}}{\Gamma(n)} \mathrm{e}^{-\lambda x} & x > 0, \end{cases} = \begin{cases} 0 & x \le 0, \\ \frac{\lambda^n x^{n-1}}{(n-1)!} \mathrm{e}^{-\lambda x} & x > 0. \end{cases}$$

Consideriamo ora la v.a. $Y := 2\lambda S_n$. Sappiamo che $\mathbb{P}_Y = h(x)\mathrm{d}x$ con

$$h(x) = \frac{1}{2\lambda} g\left(\frac{x}{2\lambda}\right) = \begin{cases} 0 & x \le 0, \\ \frac{x^{n-1}}{2^n \Gamma(n)} \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} & x > 0. \end{cases}$$

Ovvero, abbiamo provato che $\mathbb{P}_Y = \chi^2_{2n}$.

Per ogni $\alpha \in (0,1)$ abbiamo dunque

$$\begin{aligned} 1-\alpha &= \mathbb{P}\left(\chi^2_{\frac{\alpha}{2},2n} < Y < \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},2n}\right) = \mathbb{P}\left(\chi^2_{\frac{\alpha}{2},2n} < 2\lambda n\overline{X} < \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},2n}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\frac{1}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},2n}} < \frac{1}{2\lambda n\overline{X}} < \frac{1}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},2n}}\right) = \mathbb{P}\left(\frac{2n\overline{X}}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},2n}} < \frac{1}{\lambda} < \frac{2n\overline{X}}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},2n}}\right) \end{aligned}$$

e dunque abbiamo l'intervallo di confidenza di livello $1-\alpha$ per il valore atteso della distribuzione

$$(L_i, L_s) = \left(\frac{2n\overline{X}}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},2n}}, \frac{2n\overline{X}}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},2n}}\right)$$

6.2 Stima per intervalli del valore atteso di campioni gaussiani

6.2.1 Campione gaussiano di cui è nota la varianza

Intervallo bilaterale

Sia $X_1, \ldots, X_n$ un campione gaussiano di valore atteso μ incognita e varianza σ^2 nota.

Sia Z una v.a. gaussiana standard, sia $\alpha \in (0,1)$ e sia $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ il quantile della gaussiana standard di livello $1-\frac{\alpha}{2}$: $\Phi\left(z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\frac{\alpha}{2}$. Calcolo $\mathbb{P}\left(|Z| \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)$:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(|Z| \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = \mathbb{P}\left(-z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq Z \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(Z \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) - \mathbb{P}\left(Z \leq -z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = \mathbb{P}\left(Z \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) - \mathbb{P}\left(Z \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) \\
&= \Phi\left(z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) - \Phi\left(z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} = 1-\alpha.
\end{aligned} \tag{6.1}$$

Sappiamo che $\mathbb{P}_{\overline{X}} = N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ e che dunque $\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ ha distribuzione $N(0,1)$. Applichiamo quindi la disuguaglianza (6.1) a $\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$. Si ha:

$$\begin{aligned}
1-\alpha &= \mathbb{P}\left(\frac{\left|\overline{X}-\mu\right|}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = \mathbb{P}\left(-z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\mu-\overline{X}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\frac{-\sigma\, z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}} \leq \mu - \overline{X} \leq \frac{\sigma\, z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\overline{X} - \frac{\sigma\, z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{X} + \frac{\sigma\, z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}\right)
\end{aligned}$$

L'intervallo

$$(L_i, L_s) = \left(\overline{X} - \frac{\sigma\, z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}, \overline{X} + \frac{\sigma\, z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}\right)$$

è dunque un intervallo di confidenza di livello $1-\alpha$ per il valore atteso μ del campione.

Osservazione 6.2.1 (Dimensionamento del campione)**.** Fissato il livello di confidenza $1-\alpha$, supponiamo di voler controllare l'ampiezza dell'intervallo di confidenza $L_s - L_i$. Nel caso in esame l'ampiezza dell'intervallo di confidenza è $\frac{2\,\sigma\, z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}$. Se fissiamo una limitazione superiore $2\,\delta$ per l'ampiezza di tale intervallo, deve dunque essere

$$\frac{2\,\sigma\, z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}} \leq 2\,\delta$$

ovvero

$$n \geq \left(\frac{\sigma\, z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\delta}\right)^2.$$

Intervallo unilaterale superiore

Sia Z una v.a. tale che $\mathbb{P}_Z = N(0,1)$. Sappiamo che

$$\mathbb{P}(Z \leq t) = 1-\alpha \quad \text{se e solo se} \quad t = z_{1-\alpha}.$$

Abbiamo dunque

$$1-\alpha = \mathbb{P}\left(\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq z_{1-\alpha}\right) = \mathbb{P}\left(\overline{X}-\mu \leq \frac{\sigma\, z_{1-\alpha}}{\sqrt{n}}\right) = \mathbb{P}\left(\mu \geq \overline{X} - \frac{\sigma\, z_{1-\alpha}}{\sqrt{n}}\right).$$

Quindi la semiretta

$$(L_i, +\infty) = \left(\overline{X} - \frac{\sigma\, z_{1-\alpha}}{\sqrt{n}}, +\infty\right)$$

è un intervallo di confidenza unilaterale superiore di livello $1-\alpha$.

Intervallo unilaterale inferiore

Sia Z una v.a. tale che $\mathbb{P}_Z = N(0,1)$. Sappiamo che

$$\mathbb{P}(Z \geq t) = 1-\alpha \quad \text{se e solo se} \quad \mathbb{P}(Z \leq t) = \alpha \quad \text{se e solo se} \quad t = z_\alpha.$$

Abbiamo dunque

$$1-\alpha = \mathbb{P}\left(\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \geq z_\alpha\right) = \mathbb{P}\left(\overline{X}-\mu \geq \frac{\sigma\, z_\alpha}{\sqrt{n}}\right) = \mathbb{P}\left(\mu \leq \overline{X} - \frac{\sigma\, z_\alpha}{\sqrt{n}}\right).$$

Quindi la semiretta

$$(-\infty, L_s) = \left(-\infty, \overline{X} - \frac{\sigma\, z_\alpha}{\sqrt{n}}\right) = \left(-\infty, \overline{X} + \frac{\sigma\, z_{1-\alpha}}{\sqrt{n}}\right)$$

è un intervallo di confidenza unilaterale inferiore di livello $1-\alpha$.

6.2.2 Campione gaussiano di cui non è nota la varianza

Intervallo bilaterale

Sia $X_1, \ldots, X_n$ un campione gaussiano di valore atteso μ varianza σ^2, entrambe incognite.

Sappiamo che la v.a. $T := \dfrac{(\overline{X}-\mu)\sqrt{n}}{S}$ segue la distribuzione t di Student con $n-1$ gradi di libertà:

$$\mathbb{P}_T = t(n-1).$$

Sia $t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}$ il relativo quantile di livello $1-\frac{\alpha}{2}$:

$$\mathbb{P}\left(T \leq t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2}.$$

Calcolo $\mathbb{P}\left(|T| \leq t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\right)$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(|T| \leq t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\right) &= \mathbb{P}\left(-t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}} \leq T \leq t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(T \leq t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\right) - \mathbb{P}\left(T \leq -t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(T \leq t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\right) - \mathbb{P}\left(T \leq t_{n-1,\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} = 1-\alpha.
\end{aligned}$$

Abbiamo dunque

$$\begin{aligned}
1-\alpha &= \mathbb{P}\left(|T| \leq t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\right) = \mathbb{P}\left(\frac{\left|\overline{X}-\mu\right|\sqrt{n}}{S} \leq t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\right)\\
&= \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}-\mu\right| \leq \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\right)\\
&= \mathbb{P}\left(\frac{-S}{\sqrt{n}} t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}} \leq \mu-\overline{X} \leq \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\right)\\
&= \mathbb{P}\left(\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}} \leq \mu \leq \overline{X}+\frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\right)
\end{aligned}$$

L'intervallo

$$(L_i, L_s) = \left(\overline{X}-\frac{S\, t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}, \overline{X}+\frac{S\, t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}\right)$$

è dunque un intervallo di confidenza di livello $1-\alpha$ per il valore atteso μ del campione.

Intervallo unilaterale superiore

Sappiamo che

$$\mathbb{P}(T \leq t) = 1-\alpha \quad \text{se e solo se} \quad t = t_{n-1,1-\alpha}.$$

Abbiamo dunque

$$\begin{aligned}
1-\alpha &= \mathbb{P}\left(\frac{(\overline{X}-\mu)\sqrt{n}}{S} \leq t_{n-1,1-\alpha}\right) = \mathbb{P}\left(\overline{X}-\mu \leq \frac{S\, t_{n-1,1-\alpha}}{\sqrt{n}}\right)\\
&= \mathbb{P}\left(\mu \geq \overline{X}-\frac{S\, t_{n-1,1-\alpha}}{\sqrt{n}}\right).
\end{aligned}$$

Quindi la semiretta

$$(L_i, +\infty) = \left(\overline{X}-\frac{S\, t_{n-1,1-\alpha}}{\sqrt{n}}, +\infty\right)$$

è un intervallo di confidenza unilaterale superiore di livello $1-\alpha$.

Intervallo unilaterale inferiore

Sappiamo che

$$\mathbb{P}(T \geq t) = 1-\alpha \quad \text{se e solo se} \quad \mathbb{P}(T \leq t) = \alpha \quad \text{se e solo se} \quad t = t_{n-1,\alpha}.$$

Abbiamo dunque

$$1-\alpha = \mathbb{P}\left(\frac{(\overline{X}-\mu)\sqrt{n}}{S} \geq t_{n-1,\alpha}\right) = \mathbb{P}\left(\overline{X}-\mu \geq \frac{S\, t_{n-1,\alpha}}{\sqrt{n}}\right) = \mathbb{P}\left(\mu \leq \overline{X}-\frac{S\, t_{n-1,\alpha}}{\sqrt{n}}\right).$$

Quindi la semiretta

$$(-\infty, L_s) = \left(-\infty, \overline{X}-\frac{S\, t_{n-1,\alpha}}{\sqrt{n}}\right) = \left(-\infty, \overline{X}+\frac{S\, t_{n-1,1-\alpha}}{\sqrt{n}}\right)$$

è un intervallo di confidenza unilaterale inferiore di livello $1-\alpha$.

6.3 Stima per intervalli della varianza di campioni gaussiani

Intervallo bilaterale

Sia $X_1, \ldots, X_n$ un campione gaussiano di valore atteso μ (incognita o nota) e varianza σ^2 incognita.

Sappiamo che la v.a. $V := (n-1)\dfrac{S^2}{\sigma^2}$ segue la distribuzione χ^2 a $n-1$ gradi di libertà. Per ogni $\alpha \in (0,1)$ indico con $\chi^2_{n-1,\alpha}$ il quantile di livello α della v.a. V:

$$F_V\left(\chi^2_{n-1,\alpha}\right) = \alpha \qquad \forall \alpha \in (0,1).$$

Osservazione 6.3.1. Poiché le v.a. con distribuzione χ^2_n sono quasi certamente positive, abbiamo $\chi^2_{n-1,\alpha} > 0$ per ogni $\alpha \in (0,1)$.

Calcolo $\mathbb{P}\left(\chi^2_{n-1,\frac{\alpha}{2}} < V < \chi^2_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\right)$:

$$\mathbb{P}\left(\chi^2_{n-1,\frac{\alpha}{2}} < V < \chi^2_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\right) = \mathbb{P}\left(V < \chi^2_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\right) - \\ - \mathbb{P}\left(V < \chi^2_{n-1,\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} = 1-\alpha.$$

Dunque, scegliendo $V = (n-1)\dfrac{S^2}{\sigma^2}$, otteniamo

$$\begin{aligned} 1-\alpha &= \mathbb{P}\left(\chi^2_{n-1,\frac{\alpha}{2}} < (n-1)\frac{S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\frac{1}{\chi^2_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}} < \frac{\sigma^2}{(n-1)S^2} < \frac{1}{\chi^2_{n-1,\frac{\alpha}{2}}}\right) = \mathbb{P}\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1,\frac{\alpha}{2}}}\right) \end{aligned}$$

Quindi l'intervallo

$$(L_i, L_s) = \left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1,\frac{\alpha}{2}}}\right)$$

è un intervallo di confidenza di livello $1-\alpha$ per la varianza σ^2 del campione.

Intervallo unilaterale superiore

Sappiamo che

$$\mathbb{P}\left(V \le t\right) = 1-\alpha \quad \text{se e solo se} \quad t = \chi^2_{n-1,1-\alpha}.$$

Dunque

$$1-\alpha = \mathbb{P}\left((n-1)\frac{S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{n-1,1-\alpha}\right) = \mathbb{P}\left(\sigma^2 > (n-1)\frac{S^2}{\chi^2_{n-1,1-\alpha}}\right).$$

Quindi la semiretta

$$(L_i, +\infty) = \left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1,1-\alpha}}, +\infty\right)$$

è un intervallo di confidenza di livello $1-\alpha$ per la varianza σ^2 del campione.

Intervallo unilaterale inferiore

Sappiamo che

$$\mathbb{P}\left(V \geq t\right) = 1 - \alpha \quad \text{se e solo se} \quad \mathbb{P}\left(V \leq t\right) = \alpha \quad \text{se e solo se} \quad t = \chi^2_{n-1,\alpha}.$$

Dunque

$$1 - \alpha = \mathbb{P}\left((n-1)\frac{S^2}{\sigma^2} > \chi^2_{n-1,\alpha}\right) = \mathbb{P}\left(\sigma^2 \leq (n-1)\frac{S^2}{\chi^2_{n-1,\alpha}}\right).$$

Quindi l'intervallo

$$(0, L_s) = \left(0, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1,\alpha}}\right)$$

è un intervallo di confidenza di livello $1 - \alpha$ per la varianza σ^2 del campione.

Esempio 6.3.1. Calcoliamo gli intervalli di confidenza per il carattere Totpor dei dati tratti da [2], nell'ipotesi che si tratti della realizzazione di v.a. normali.

```
> setwd("~/Documents/didattica/2017-18_analisi_reale/alcuni_appunti/esempio_statistica")
>
> library(readr)
>
> table2 <- read_delim("~/Documents/didattica/2017-18_analisi_reale/alcuni_appunti/
table2.csv", "\t", escape_double = FALSE, trim_ws = TRUE)
Parsed with column specification:
cols(
  Code = col_character(),
  Totpor = col_double(),
  PRA = col_double(),
  PV = col_double(),
  Densi = col_double(),
  TenStr = col_double(),
  CO2SBW = col_double(),
  FirTemp = col_integer()
)
>
> ## definisco la funzione che calcola l'intervallo bilaterale con varianza nota
>
> bilat.norm = function(x,sigma,conf) { n = length(x); xbar=mean(x);
+ alpha = 1 - conf;
+ zstar = qnorm(1-alpha/2);
+ SE = sigma/sqrt(n);
+ xbar + c(-zstar*SE,zstar*SE)}
>
> # definisco la funzione che calcola l'intervallo bilaterale con varianza ignota
>
> bilat.stud = function(x,conf) { n = length(x);
+ m = n-1;
+ xbar=mean(x);
+ alpha = 1 - conf;
+ zstar = qt(1-alpha/2, m, lower.tail=TRUE);
```

```
+ SE = sd(x)/sqrt(n);
+ xbar + c(-zstar*SE,zstar*SE)
+ }
>
> # definisco la funzione che calcola l'intervallo bilaterale per la varianza
>
> bilat.chi = function(x,conf) {
+     n = length(x);
+     m = n-1;
+     alpha = 1 - conf;
+     zsup = qchisq(alpha/2, m, lower.tail=TRUE);
+     zinf = qchisq(1 - alpha/2, m, lower.tail=TRUE);
+     SE = sd(x)*sd(x)*m;
+     c(SE/zinf,SE/zsup)
+ }
>
>
> numSummary(table2[,c("Totpor", "PRA", "PV", "Densi", "TenStr", "CO2SBW", "FirTemp")],
+  statistics=c("mean", "sd", "quantiles"), quantiles=c(0,.25,.5,.75,1))
               mean         sd      0%      25%     50%      75%    100%  n NA
Totpor   40.1193548  7.0371760  26.850  36.0550  40.900  44.4200  54.640 31  0
PRA       0.6732581  0.4760389   0.158   0.4220   0.622   0.7305   2.657 31  0
PV       55.3290323 28.5498417  10.200  30.4500  59.400  80.7000  88.600 31  0
Densi     1.6929032  0.1701214   1.340   1.5600   1.680   1.8150   2.020 31  0
TenStr    0.6092258  0.3143682   0.143   0.4065   0.527   0.7165   1.405 31  0
CO2SBW    0.5816667  0.5259152   0.050   0.2900   0.390   0.4950   1.960 30  1
FirTemp 764.8387097 52.9698636 730.000 740.0000 740.000 750.0000 960.000 31  0
>
> bilat.norm(table2$Totpor, 7.04, .9)
[1] 38.03957 42.19914
> bilat.norm(table2$Totpor, 7.04, .95)
[1] 37.64113 42.59758
>
> bilat.stud(table2$Totpor, .9)
[1] 37.97416 42.26455
> bilat.stud(table2$Totpor, .95)
[1] 37.53810 42.70061
>
> bilat.chi(table2$Totpor, .9)
[1] 33.94002 80.33757
> bilat.chi(table2$Totpor, .95)
[1] 31.62366 88.48047
>
```