

Domanda 4) Si consideri la matrice stocastica

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 0 & 3/4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dire se l'applicazione associata ammette pozzo (ed in tal caso calcolarlo).

Svolgimento

Siano $R^1, \dots, R^4$ le righe di P .

$\|R^2 - R^4\|_1 = 2 \Rightarrow \underline{I}: x \in \mathcal{J} \mapsto xP \in \mathcal{J}$ non è una contrazione

Calcolo P^2

$$P^2 = \begin{pmatrix} 5/16 & 1/8 & 7/16 & 1/8 \\ 1/8 & 1/2 & 3/8 & 0 \\ 5/16 & 1/16 & 5/8 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Dallo stesso $R^1, \dots, R^4$ le ~~due~~ righe di P^2 si ha

$$\begin{aligned} \|R^1 - R^2\| &= \frac{3}{4} & \|R^1 - R^3\| &= \frac{3}{8} & \|R^1 - R^4\| &= \frac{7}{8} \\ \|R^2 - R^3\| &= \frac{7}{8} & \|R^2 - R^4\| &= \frac{5}{4} & \|R^3 - R^4\| &= 1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \underline{I}^2: x \in \mathcal{J} \mapsto xP^2 \in \mathcal{J}$ è una contrazione con costante di contrazione

$$C = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{4} = \frac{5}{8}$$

$\Rightarrow \underline{I}^2$ ammette 1° pozzo che è anche pozzo per $\underline{I}$

$$xP = x \quad (x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4)P = (x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4)$$

$$\Rightarrow x = \left(\frac{4}{15}, \frac{2}{15}, \frac{8}{15}, \frac{1}{15} \right)$$

Domanda 4) Si consideri la matrice stocastica

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 0 & 2/3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Dire se le applicazioni associate rispettivamente a P e a P^2 sono contrazioni. Dire se l'applicazione associata a P ammette pozzo (ed in tal caso calcolarlo).

Svolgimento

Dette $R^1 - R^4$ le righe di P abbiamo $\|R^1 - R^2\| = 2 \neq 0$ $\underline{P}: x \in \mathcal{J} \mapsto xP \in \mathcal{J}$

non è una contrazione

Calcolo P^2 :

$$P^2 = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 2/9 & 4/9 \\ 0 & 1/3 & 0 & 2/3 \\ 1/9 & 1/9 & 2/9 & 5/9 \\ 1/9 & 0 & 1/3 & 5/9 \end{pmatrix}$$

In questo caso $\|R^1 - R^2\| = \frac{10}{9}$ $\|R^1 - R^3\| = \frac{4}{9}$ $\|R^1 - R^4\| = \frac{4}{9}$
 $\|R^2 - R^3\| = \frac{2}{3}$ $\|R^2 - R^4\| = \frac{8}{9}$ $\|R^3 - R^4\| = \frac{2}{9}$

$\Rightarrow P^2: x \in \mathcal{J} \mapsto xP^2 \in \mathcal{J}$ è una contrazione con costante di contrazione

$$C = \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{9} = \frac{5}{9}$$

$\Rightarrow P^2$ e I ammettono l' pto (lo stesso per entrambe)

che è anche l' unico pto fisso

$$xP = x \quad \Rightarrow \quad x = \left(\frac{3}{22}, \frac{1}{22}, \frac{3}{11}, \frac{6}{11} \right)$$

Domanda 4) Si consideri la matrice stocastica

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dire se le applicazioni associate rispettivamente a P e a P^2 sono contrazioni. Dire se l'applicazione associata a P ammette pozzo (ed in tal caso calcolarlo).

Svolgimento

Siano $R^1 - R^4$ le righe di P

$$\|R^2 - R^4\| = 2 \Rightarrow P: x \in \mathcal{I} \mapsto xP \in \mathcal{I}$$

non è una contrazione

$$P^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dette $R^1 - R^4$ le righe di P^2 si ha $\|R^2 - R^4\| = 2 \Rightarrow P^2: x \in \mathcal{I} \mapsto xP^2 \in \mathcal{I}$

non è una contrazione

D'altra parte

$$P^3 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \max \|R^i - R^j\| = \frac{3}{2} \Rightarrow$$

P^3 è contrazione con costante

$$C = \frac{3}{4}$$

$\Rightarrow P$ ammette pozzo

$B := \sum_{k=0}^{\infty} P^k$ non ha elementi nulli $\Rightarrow P$ è irriducibile e, poiché

$P_{33} = \frac{1}{2}$ è anche regolare $\Rightarrow$ il pozzo non ha componenti nulle

$$xP = x \Leftrightarrow x = \left(\frac{2}{7}, \frac{2}{7}, \frac{2}{7}, \frac{1}{7} \right)$$

Domanda 4) Si consideri la matrice stocastica

$$P = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & 0 & 3/4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dire se la matrice è regolare e se l'applicazione associata ammette pozzo (ed in tal caso calcolarlo).

Svolgimento

$$P^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{5}{8} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$P^3 = \begin{pmatrix} \frac{3}{32} & \frac{1}{2} & \frac{7}{32} & \frac{3}{16} \\ 0 & \frac{5}{8} & 0 & \frac{3}{8} \\ \frac{7}{32} & \frac{3}{16} & \frac{17}{32} & \frac{1}{16} \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ la matrice $B := \sum_{k=0}^{\infty} P^k$ ha degli dei: $B_1^2 = B_1^4 = B_3^2 = B_3^4 = \dots$
 $\Rightarrow P$ non è irriducibile e dunque non è regolare.

D'altronde, dette $R^1 - R^4$ le righe di P^2 si ha

$$\max\{\|R^i - R^j\|, i, j = 1, \dots, 4\} = \frac{7}{4} < 2 \Rightarrow P^2 \text{ è una contrazione di } \mathcal{I}$$

$\Rightarrow I$ ammette pozzo che è anche l'unico pto fisso

$$xP = x \Leftrightarrow x = \left(0, \frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3}\right)$$

Domanda 4) Si consideri la matrice stocastica

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dire se la matrice è regolare e se l'applicazione associata ammette pozzo (ed in tal caso calcolarlo).

Svolgimento

$$P^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{16} & \frac{5}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P^3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{41}{64} & \frac{9}{32} & \frac{1}{64} & \frac{1}{16} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$B := \sum_{k=0}^3 P^k \text{ ha degli elementi nulli} \quad B_3^1 = B_3^2 = B_3^4 = 0$$

$\Rightarrow P$ non è irriducibile e dunque non è regolare

D'altra parte, dette $R^1 - R^4$ le righe di P^3 si ha

$$\max_{i,j=1,4} \|R^i - R^j\| = \|R^3 - R^4\| = \frac{21}{16} < 2$$

$\Rightarrow P^3$ è una contrazione con costante $C = \frac{21}{32} \Rightarrow$ ammette pozzo
che è anche pozzo e unico pto fisso di P

$$xP = x \Leftrightarrow x = \left(\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, 0, \frac{1}{5} \right)$$

Domanda 4) Si consideri la matrice stocastica

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dire se la matrice è regolare e se l'applicazione associata ammette pozzo (ed in tal caso calcolarlo).

Svolgimento

$$P^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P^3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{7}{16} & \frac{5}{16} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$B = \sum_{k=0}^3 P^k \text{ ha degli elementi nulli: } B_3^1 = B_3^2 = B_3^4 = 0$$

$\Rightarrow P$ non è irriducibile e dunque non è regolare

D'altronde, dette $P^1, \dots, P^4$ le righe di P^3

$$\max \{ \|P^i - P^j\|, i, j = 1, \dots, 4 \} = \frac{9}{8} < 2$$

$\Rightarrow P^3: x \in \mathcal{I} \Leftrightarrow xP^3 \in \mathcal{I}$ è una contrazione con fattore di contrazione $\frac{9}{16}$

$\Rightarrow$ ammette 1° pozzo che è anche 1° pozzo e pozzo fisso di $\mathcal{I}$

$$xP = x \Leftrightarrow x = \left(\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, 0, \frac{1}{5} \right)$$