Metodi Matematici – 2018-2019

Primo Compitino – 2 Maggio 2019

,

Domanda 1) Definire la nozione di convergenza in legge per una successione di v.a. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ed enunciare il teorema centrale del limite.

Domanda 2) Definire le nozioni di convergenza quasi ovunque e di convergenza in probabilità per una successione di v.a. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ed enunciare la legge dei grandi numeri.

Domanda 3) Definire la nozione di Q-matrice e spiegare il legame tra Q-matrici e catene di Markov a tempo continuo omogenee.

Domanda 4) Definire la nozione di catena di Markov a tempo continuo ed enunciare le equazioni di Chapman-Kolmogorov

Domanda 5) Data la matrice stocastica

$P_1 =$

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0.6	0.2	0.2	0.0	0	0	0	0
2	0	0	0.8	0.2	0	0	0	0
3	0	1	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0.2	0.4	0	0.4	0	0
5	1	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	1	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	1	0
8	0	0	0	1	0	0	0	0

la matrice $B := \sum_{k=0}^{7} P_1^k$ è data da (le entrate diverse da zero sono approssimate alla seconda cifra decimale)

$B =$

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2.46	2.34	2.19	0.79	0	0.23	0	0
2	0	3.27	2.75	1.51	0	0.48	0	0
3	0	3.14	3.27	1.2	0	0.4	0	0
4	0	1.2	1.51	3.88	0	1.41	0	0
5	2.43	1.99	1.85	0.58	1	0.16	0	0
6	0	1	1.2	3.53	0	2.27	0	0
7	0	0	0	0	0	0	8	0
8	0	1	1.2	3.53	0	1.27	0	1

Individuare le classi chiuse minimali, gli stati transienti e quelli ricorrenti.

Domanda 6) Data la matrice stocastica

$P_2 =$

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0.6	0.2	0.2	0	0	0	0	0
2	0	0	0.8	0.2	0	0	0	0
3	0	1	0	0	0	0	0	0
4	0	0.4	0.2	0.4	0	0	0	0
5	1	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	1	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	1	0
8	0	0	0	1	0	0	0	0

la matrice $B := \sum_{k=0}^{7} P_2^k$ è data da (le entrate diverse da zero sono approssimate alla seconda cifra decimale)

$B =$

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2.46	2.6	2.31	0.63	0	0	0	0
2	0	3.83	3.09	1.08	0	0	0	0
3	0	3.64	3.47	0.89	0	0	0	0
4	0	3.06	2.51	2.43	0	0	0	0
5	2.43	2.16	1.92	0.48	1	0	0	0
6	0	2.57	2.15	2.28	0	1	0	0
7	0	0	0	0	0	0	8	0
8	0	2.57	2.15	2.28	0	0	0	1

Individuare le classi chiuse minimali, gli stati transienti e quelli ricorrenti.

Domanda 7) Ci si muove sui punti 1, 2, 3, 4. Ad ogni passo si lanciano quattro monete non truccate e ci si muove secondo la seguente regola.

- Se si è in posizione i dispari e si ottengono t teste ci si sposta in posizione

$$\begin{cases} i+t & \text{se } i+t \leq 4, \\ t & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

- Se si è in posizione i pari e si ottengono t teste ci si sposta in posizione

$$\begin{cases} i-t & \text{se } i-t \geq 1, \\ i & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Tracciare il grafo pesato e scrivere la matrice di transizione associati a tale passeggiata aleatoria.
Dire se esiste una distribuzione asintotica della probabilità di occupazione delle quattro posizioni.

Domanda 8) Ci si muove sui punti 1, 2, 3, 4. Ad ogni passo si lanciano quattro monete non truccate e ci si muove secondo la seguente regola.

- Se si è in posizione i pari e si ottengono t teste ci si sposta in posizione

$$\begin{cases} i+t & \text{se } i+t \leq 4, \\ t & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

- Se si è in posizione i dispari e si ottengono t teste ci si sposta in posizione

$$\begin{cases} i-t & \text{se } i-t \geq 1, \\ i & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Tracciare il grafo pesato e scrivere la matrice di transizione associati a tale passeggiata aleatoria.
Dire se esiste una distribuzione asintotica della probabilità di occupazione delle quattro posizioni.