Test d'ipotesi

Struttura di un test d'ipotesi lancio di una moneta

- Definisco l'insieme delle distribuzioni *compatibili* con il campione $X_1, \ldots, X_n$ $B(p)$, $p \in [0, 1]$
- Definisco l'ipotesi da testare, detta *ipotesi nulla* H_0
  Le ipotesi si possono suddividere in due grandi famiglie:

Struttura di un test d'ipotesi lancio di una moneta

- Definisco l'insieme delle distribuzioni *compatibili* con il campione $X_1, \dots, X_n$ $B(p)$, $p \in [0, 1]$
- Definisco l'ipotesi da testare, detta *ipotesi nulla* H_0
  Le ipotesi si possono suddividere in due grandi famiglie:
  - **ipotesi parametriche**: la distribuzione del campione è nota a meno di un parametro θ, scalare o vettoriale.

$$H_0 : \qquad \theta \in \Theta_0 \subset \Theta \qquad p = 0.5$$

Struttura di un test d'ipotesi lancio di una moneta

- Definisco l'insieme delle distribuzioni *compatibili* con il campione $X_1, \ldots, X_n$ $B(p)$, $p \in [0, 1]$
- Definisco l'ipotesi da testare, detta *ipotesi nulla* H_0
  Le ipotesi si possono suddividere in due grandi famiglie:
  - **ipotesi parametriche**: la distribuzione del campione è nota a meno di un parametro θ, scalare o vettoriale.

$$H_0 : \qquad \theta \in \Theta_0 \subset \Theta \qquad p = 0.5$$

  - **ipotesi non parametriche**: sono ipotesi sul tipo di distribuzione del campione ovvero sulla sua legge

$$H_0 : \qquad F(x) \in \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$$

Struttura di un test d'ipotesi lancio di una moneta

- Definisco l'insieme delle distribuzioni *compatibili* con il campione $X_1, \ldots, X_n$ $B(p)$, $p \in [0, 1]$
- Definisco l'ipotesi da testare, detta *ipotesi nulla* H_0
  Le ipotesi si possono suddividere in due grandi famiglie:
  - **ipotesi parametriche**: la distribuzione del campione è nota a meno di un parametro θ, scalare o vettoriale.

    $$H_0: \qquad \theta \in \Theta_0 \subset \Theta \qquad p = 0.5$$

  - **ipotesi non parametriche**: sono ipotesi sul tipo di distribuzione del campione ovvero sulla sua legge

    $$H_0: \qquad F(x) \in \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$$

Ipotesi *semplice* se Θ_0 o $\mathcal{F}_0$ è costituito da un solo elemento, *composta* altrimenti

- Definisco l'ipotesi alternativa H_A che è da considerarsi valida quando si rifiuta H_0.

$$H_A: \qquad \theta \in \Theta_1, \qquad \Theta_1 := \Theta \setminus \Theta_0 \qquad p \neq 0.5$$
$$H_A: \qquad F(x) \in \mathcal{F}_1 \qquad \mathcal{F}_1 := \mathcal{F} \setminus \mathcal{F}_0$$

- Definisco una statistica $\varphi(X_1, \ldots, X_n)$ con distribuzione nota quando H_0 è vera. $\overline{X}$
- Suddivido lo spazio $\mathcal{G}$ delle possibili osservazioni di φ in due insiemi disgiunti:
  - $\mathcal{A}$, *regione di accettazione di* H_0; $\quad (0.5 - \varepsilon, 0.5 + \varepsilon)$
  - $\mathcal{C} := \mathcal{G} \setminus \mathcal{A}$, *regione critica*. $\quad [0, 0.5 - \varepsilon] \cup [0.5 + \varepsilon, 1]$
- Si formula la regola di decisione:
  - accetto H_0 se $\varphi(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{A}$; $\quad \overline{x} \in (0.5 - \varepsilon, 0.5 + \varepsilon)$
  - rifiuto H_0 se $\varphi(x_1, \ldots, x_n) \notin \mathcal{A}$, ovvero se $\varphi(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{C}$.
    $\overline{x} \notin (0.5 - \varepsilon, 0.5 + \varepsilon)$

Errore di prima specie, significatività del test

Sulla base dei dati rigettiamo H_0 quando essa in realtà è vera.
Definisco *livello di significatività del test* la probabilità che ciò accada:

$$\alpha := \mathbb{P}\left(\varphi(X_1, \ldots, X_n) \in \mathcal{C} | H_0\right).$$

$1 - \alpha$ è detto *livello di fiducia del test*.

Errore di prima specie, significatività del test

Sulla base dei dati rigettiamo H_0 quando essa in realtà è vera.
Definisco *livello di significatività del test* la probabilità che ciò accada:

$$\alpha := \mathbb{P}\left(\varphi(X_1, \ldots, X_n) \in \mathcal{C} | H_0\right).$$

$1 - \alpha$ è detto *livello di fiducia del test*.

Errore di seconda specie, potenza del test

Sulla base dei dati accettiamo H_0 quando essa è falsa.

$$\beta := \mathbb{P}\left(\varphi(X_1, \ldots, X_n) \in \mathcal{A} | H_A\right).$$

$1 - \beta$ è detto *potenza del test*.

Remark

se H_A è un'ipotesi composta, allora β è una funzione $\beta(\theta)$, $\theta \in \Theta_1$.

Test d'ipotesi per il valore atteso di campioni gaussiani a varianza nota

$X_1, \ldots, X_n$ campione gaussiano di valore atteso μ incognito e varianza σ^2 nota.

- $H_0: \quad \mu = \mu_0, \qquad H_A: \quad \mu \neq \mu_0$

$X_1, \ldots, X_n$ campione gaussiano di valore atteso μ incognito e varianza σ^2 nota.

- $H_0: \qquad \mu = \mu_0, \qquad\qquad H_A: \qquad \mu \neq \mu_0$
- Sappiamo che $\mathbb{P}_{X_i} = N\left(\mu_0, \sigma^2\right) \iff \mathbb{E}\left[\overline{X}\right] = \mu_0$

$X_1, \ldots, X_n$ campione gaussiano di valore atteso μ incognito e varianza σ^2 nota.

- $H_0: \qquad \mu = \mu_0, \qquad\qquad H_A: \qquad \mu \neq \mu_0$
- Sappiamo che $\mathbb{P}_{X_i} = N\left(\mu_0, \sigma^2\right) \iff \mathbb{E}\left[\overline{X}\right] = \mu_0$
- Criterio di accettazione: accetto H_0 se e solo se $|\overline{x} - \mu_0| < \varepsilon$.

$X_1, \ldots, X_n$ campione gaussiano di valore atteso μ incognito e varianza σ^2 nota.

- $H_0: \qquad \mu = \mu_0, \qquad\qquad H_A: \qquad \mu \neq \mu_0$
- Sappiamo che $\mathbb{P}_{X_i} = N\left(\mu_0, \sigma^2\right) \iff \mathbb{E}\left[\overline{X}\right] = \mu_0$
- Criterio di accettazione: accetto H_0 se e solo se $|\overline{x} - \mu_0| < \varepsilon$.
- Livello di significatività

$$\alpha = \mathbb{P}\left(\left|\overline{X} - \mu_0\right| \geqslant \varepsilon | \mu = \mu_0\right)$$

Devo determinare ε in funzione di α

$X_1, \ldots, X_n$ campione gaussiano di valore atteso μ incognito e varianza σ^2 nota.

- $H_0 : \qquad \mu = \mu_0, \qquad\qquad H_A : \qquad \mu \neq \mu_0$
- Sappiamo che $\mathbb{P}_{X_i} = N\left(\mu_0, \sigma^2\right) \iff \mathbb{E}\left[\overline{X}\right] = \mu_0$
- Criterio di accettazione: accetto H_0 se e solo se $|\overline{x} - \mu_0| < \varepsilon$.
- Livello di significatività

$$\alpha = \mathbb{P}\left(\left|\overline{X} - \mu_0\right| \geqslant \varepsilon | \mu = \mu_0\right)$$

  Devo determinare ε in funzione di α
- H_0 vera $\implies \mathbb{P}_{\overline{X}} = N\left(\mu_0, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$

$X_1, \ldots, X_n$ campione gaussiano di valore atteso μ incognito e varianza σ^2 nota.

- $H_0 : \quad \mu = \mu_0, \qquad H_A : \quad \mu \neq \mu_0$
- Sappiamo che $\mathbb{P}_{X_i} = N\left(\mu_0, \sigma^2\right) \iff \mathbb{E}\left[\overline{X}\right] = \mu_0$
- Criterio di accettazione: accetto H_0 se e solo se $|\overline{x} - \mu_0| < \varepsilon$.
- Livello di significatività

$$\alpha = \mathbb{P}\left(\left|\overline{X} - \mu_0\right| \geqslant \varepsilon | \mu = \mu_0\right)$$

  Devo determinare ε in funzione di α
- H_0 vera $\implies \mathbb{P}_{\overline{X}} = N\left(\mu_0, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$
- $Z := \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \implies \mathbb{P}_Z = N(0, 1)$.

$$
\begin{aligned}
\alpha = \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}-\mu_0\right| \geqslant \varepsilon \middle| \mu=\mu_0\right) &= \mathbb{P}\left(\frac{\left|\overline{X}-\mu_0\right|}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \geqslant \frac{\varepsilon}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \middle| \mu=\mu_0\right) \\
&= \mathbb{P}\left(|Z| \geqslant \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(Z \geqslant \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right) + \mathbb{P}\left(Z \leqslant \frac{-\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right) \\
&= 1-\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right) + \Phi\left(\frac{-\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right) \\
&= 2\left(1-\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right)\right) \iff
\end{aligned}
$$

$$\alpha = \mathbb{P}\left(\left|\overline{X} - \mu_0\right| \geqslant \varepsilon | \mu = \mu_0\right) = \mathbb{P}\left(\frac{\left|\overline{X} - \mu_0\right|}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \geqslant \frac{\varepsilon}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} | \mu = \mu_0\right)$$

$$= \mathbb{P}\left(|Z| \geqslant \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right)$$

$$= \mathbb{P}\left(Z \geqslant \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right) + \mathbb{P}\left(Z \leqslant \frac{-\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right)$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right) + \Phi\left(\frac{-\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right)$$

$$= 2\left(1 - \Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right)\right) \iff$$

$$\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} \iff \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma} = z_{1-\frac{\alpha}{2}} \iff \varepsilon = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

Formulazione del criterio

Presi i dati $x_1, \ldots, x_n$, sia $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ la loro media:

accetto H_0 se $|\overline{x} - \mu_0| < \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ e la rifiuto altrimenti.

Curva operativa caratteristica

Se H_0 è falsa, $\mu \neq \mu_0$, commetto errore di seconda specie con probabilità

$$
\begin{aligned}
\beta(\mu) &= \mathbb{P}\left(\left|\overline{X} - \mu_0\right| < \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}} \middle| \mathbb{E}\left[X_i\right] = \mu\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\mu_0 - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}} < \overline{X} < \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}} \middle| \mathbb{E}\left[X_i\right] = \mu\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\frac{\mu_0 - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} < \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < \frac{\mu_0 - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \middle| \mathbb{E}\left[X_i\right] = \mu\right) \\
&= \Phi\left(\frac{\mu_0 - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) - \Phi\left(\frac{\mu_0 - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} + z_{\frac{\alpha}{2}}\right).
\end{aligned}
$$

$\mu > \mu_0 \implies$

$$\frac{\mu_0 - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < 0 \implies \frac{\mu_0 - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} + z_{\frac{\alpha}{2}} < z_{\frac{\alpha}{2}} \implies$$

$$0 < \Phi\left(\frac{\mu_0 - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} + z_{\frac{\alpha}{2}}\right) < \frac{\alpha}{2} \implies \quad \text{trascurabile}$$

$$\beta(\mu) \sim \Phi\left(\frac{\mu_0 - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right).$$

In particolare

$$\sup_{\mu > \mu_0} \beta(\mu) \sim \Phi\left(z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2}.$$

Oltre ad α voglio limitare anche $\beta(\mu) \leqslant \hat{\beta}$, per un qualche μ fissato. Basta imporre

$$\hat{\beta} \geqslant \Phi\left(\frac{\mu_0 - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)$$

Oltre ad α voglio limitare anche $\beta(\mu) \leqslant \hat{\beta}$, per un qualche μ fissato. Basta imporre

$$\hat{\beta} \geqslant \Phi\left(\frac{\mu_0 - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)$$

$$z_{\hat{\beta}} \geqslant \frac{\mu_0 - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

Oltre ad α voglio limitare anche $\beta(\mu) \leqslant \hat{\beta}$, per un qualche μ fissato. Basta imporre

$$\hat{\beta} \geqslant \Phi\left(\frac{\mu_0 - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)$$

$$z_{\hat{\beta}} \geqslant \frac{\mu_0 - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

$$\frac{\mu_0 - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leqslant z_{\hat{\beta}} + z_{\frac{\alpha}{2}},$$

Oltre ad α voglio limitare anche $\beta(\mu) \leqslant \hat{\beta}$, per un qualche μ fissato. Basta imporre

$$\hat{\beta} \geqslant \Phi\left(\frac{\mu_0 - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)$$

$$z_{\hat{\beta}} \geqslant \frac{\mu_0 - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

$$\frac{\mu_0 - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leqslant z_{\hat{\beta}} + z_{\frac{\alpha}{2}},$$

$$n \geqslant \left(\frac{\sigma}{\mu_0 - \mu}\right)^2 \left(z_{\hat{\beta}} + z_{\frac{\alpha}{2}}\right)^2$$

$\mu < \mu_0$

In questo caso $\dfrac{\mu - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < 0$.

$$\begin{aligned}\beta(\mu) &= \Phi\left(\frac{\mu - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} - z_{\frac{\alpha}{2}}\right) - \Phi\left(\frac{\mu - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{\mu - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) - \Phi\left(\frac{\mu - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} + z_{\frac{\alpha}{2}}\right).\end{aligned}$$

$\dfrac{\mu - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} + z_{\frac{\alpha}{2}} < z_{\frac{\alpha}{2}} \implies 0 < \Phi\left(\dfrac{\mu - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} + z_{\frac{\alpha}{2}}\right) < \dfrac{\alpha}{2}$ trascurabile

$$\beta(\mu) \sim \Phi\left(\frac{\mu - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)$$

$$\sup_{\mu < \mu_0} \beta(\mu) \sim \Phi\left(z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2}.$$

Supponiamo di voler limitare (oltre ad α) anche $\beta(\mu) = \hat{\beta}$

$$\hat{\beta} \geqslant \Phi\left(\frac{\mu - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)$$

$$\sup_{\mu<\mu_0} \beta(\mu) \sim \Phi\left(z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2}.$$

Supponiamo di voler limitare (oltre ad α) anche $\beta(\mu) = \hat{\beta}$

$$\hat{\beta} \geqslant \Phi\left(\frac{\mu-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)$$

$$n \geqslant \left(\frac{\sigma}{\mu_0-\mu}\right)^2 \left(z_{\hat{\beta}} + z_{\frac{\alpha}{2}}\right)^2$$

Test unilaterale inferiore con H_0 semplice

$X_1, \ldots, X_n$ un campione gaussiano di valore atteso μ incognito e varianza σ^2 nota.

- $H_0 : \quad \mu = \mu_0 \qquad H_A : \quad \mu > \mu_0$

Test unilaterale inferiore con H_0 semplice

$X_1, \ldots, X_n$ un campione gaussiano di valore atteso μ incognito e varianza σ^2 nota.

- $H_0 : \quad \mu = \mu_0 \qquad H_A : \quad \mu > \mu_0$
- Critrio di accettazione: accetto H_0 se e solo se $\overline{x} < \mu_0 + \varepsilon$.

Test unilaterale inferiore con H_0 semplice

$X_1, \ldots, X_n$ un campione gaussiano di valore atteso μ incognito e varianza σ^2 nota.

- $H_0: \quad \mu = \mu_0 \qquad H_A: \quad \mu > \mu_0$
- Critrio di accettazione: accetto H_0 se e solo se $\overline{x} < \mu_0 + \varepsilon$.
- Livello di significatività

$$\alpha = \mathbb{P}\left(\overline{X} \geqslant \mu_0 + \varepsilon | \mu = \mu_0\right).$$

Devo determinare ε in funzione di α

Test unilaterale inferiore con H_0 semplice

$X_1, \ldots, X_n$ un campione gaussiano di valore atteso μ incognito e varianza σ^2 nota.

- $H_0: \quad \mu = \mu_0 \qquad H_A: \quad \mu > \mu_0$
- Critrio di accettazione: accetto H_0 se e solo se $\overline{x} < \mu_0 + \varepsilon$.
- Livello di significatività

$$\alpha = \mathbb{P}\left(\overline{X} \geqslant \mu_0 + \varepsilon | \mu = \mu_0\right).$$

Devo determinare ε in funzione di α

- H_0 vera $\implies \mathbb{P}_{\overline{X}} = N\left(\mu_0, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$

Test unilaterale inferiore con H_0 semplice

$X_1, \ldots, X_n$ un campione gaussiano di valore atteso μ incognito e varianza σ^2 nota.

- $H_0: \quad \mu = \mu_0 \qquad H_A: \quad \mu > \mu_0$
- Critrio di accettazione: accetto H_0 se e solo se $\overline{x} < \mu_0 + \varepsilon$.
- Livello di significatività

$$\alpha = \mathbb{P}\left(\overline{X} \geqslant \mu_0 + \varepsilon | \mu = \mu_0\right).$$

  Devo determinare ε in funzione di α
- H_0 vera $\implies \mathbb{P}_{\overline{X}} = N\left(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n}\right)$
- $Z := \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \implies \mathbb{P}_Z = N(0, 1)$

$$\alpha = \mathbb{P}\left(\overline{X} \geqslant \mu_0 + \varepsilon | \mu = \mu_0\right) = \mathbb{P}\left(\frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \geqslant \frac{\varepsilon}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} | \mu = \mu_0\right)$$

$$= \mathbb{P}\left(Z \geqslant \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(Z \leqslant \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right) \Longleftrightarrow$$

$$\alpha = \mathbb{P}\left(\overline{X} \geqslant \mu_0 + \varepsilon | \mu = \mu_0\right) = \mathbb{P}\left(\frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \geqslant \frac{\varepsilon}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} | \mu = \mu_0\right)$$

$$= \mathbb{P}\left(Z \geqslant \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(Z \leqslant \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right) \iff$$

$$\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 1 - \alpha \iff \varepsilon = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha}.$$

Formulazione del criterio

Presi i dati $x_1, \ldots, x_n$, sia $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ la loro media:

accetto H_0 se $\overline{x} < \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha}$ e la rifiuto altrimenti.

Test unilaterale inferiore con H_0 composta

$X_1, \dots, X_n$ un campione gaussiano di valore atteso μ incognito e varianza σ^2 nota.

- $H_0: \quad \mu \leqslant \mu_0 \qquad H_A: \quad \mu > \mu_0$

Test unilaterale inferiore con H_0 composta

$X_1, \ldots, X_n$ un campione gaussiano di valore atteso μ incognito e varianza σ^2 nota.

- $H_0: \qquad \mu \leqslant \mu_0 \qquad\qquad H_A: \qquad \mu > \mu_0$
- Criterio di accettazione: accetto H_0 se e solo se $\overline{x} < \mu_0 + \varepsilon$.

Test unilaterale inferiore con H_0 composta

$X_1, \ldots, X_n$ un campione gaussiano di valore atteso μ incognito e varianza σ^2 nota.

- $H_0: \quad \mu \leqslant \mu_0 \qquad H_A: \quad \mu > \mu_0$
- Criterio di accettazione: accetto H_0 se e solo se $\overline{x} < \mu_0 + \varepsilon$.
- Livello di significatività

$$\mathbb{P}\left(\overline{X} \geqslant \mu_0 + \varepsilon | \mu \leqslant \mu_0\right)$$

Test unilaterale inferiore con H_0 composta

$X_1, \ldots, X_n$ un campione gaussiano di valore atteso μ incognito e varianza σ^2 nota.

- $H_0: \quad \mu \leqslant \mu_0 \qquad H_A: \quad \mu > \mu_0$
- Criterio di accettazione: accetto H_0 se e solo se $\overline{x} < \mu_0 + \varepsilon$.
- Livello di significatività

$$\mathbb{P}\left(\overline{X} \geqslant \mu_0 + \varepsilon | \mu \leqslant \mu_0\right)$$

- Se $\mathbb{P}_{X_i} = N\left(\mu, \sigma^2\right)$

$$\Longrightarrow \mathbb{P}_{\overline{X}} = N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right), \quad Z := \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}, \quad \mathbb{P}_Z = N\left(0, 1\right)$$

$\Longrightarrow$

$$\mathbb{P}\left(\overline{X} \geqslant \mu_0 + \varepsilon | \mathbb{E}\left[X_i\right] = \mu\right) = \mathbb{P}\left(\frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \geqslant \frac{\mu_0 - \mu + \varepsilon}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} | \mathbb{E}\left[\overline{X}\right] = \mu\right)$$

$\Longrightarrow$

$$\mathbb{P}\left(\overline{X} \geqslant \mu_0 + \varepsilon | \mathbb{E}\left[X_i\right] = \mu\right) = \mathbb{P}\left(\frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \geqslant \frac{\mu_0 - \mu + \varepsilon}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} | \mathbb{E}\left[\overline{X}\right] = \mu\right)$$

$$= \mathbb{P}\left(Z \geqslant \frac{(\mu_0 - \mu + \varepsilon)\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(Z \leqslant \frac{(\mu_0 - \mu + \varepsilon)\sqrt{n}}{\sigma}\right)$$

$\Longrightarrow$

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(\overline{X} \geqslant \mu_0 + \varepsilon | \mathbb{E}\left[X_i\right] = \mu\right) = \mathbb{P}\left(\frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \geqslant \frac{\mu_0 - \mu + \varepsilon}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} | \mathbb{E}\left[\overline{X}\right] = \mu\right) \\
&= \mathbb{P}\left(Z \geqslant \frac{(\mu_0 - \mu + \varepsilon)\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(Z \leqslant \frac{(\mu_0 - \mu + \varepsilon)\sqrt{n}}{\sigma}\right) \\
&= 1 - \Phi\left(\frac{(\mu_0 - \mu + \varepsilon)\sqrt{n}}{\sigma}\right) \leqslant 1 - \Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right)
\end{aligned}
$$

$\Longrightarrow$

$$\mathbb{P}\left(\overline{X} \geqslant \mu_0 + \varepsilon \middle| \mathbb{E}\left[X_i\right] = \mu\right) = \mathbb{P}\left(\frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \geqslant \frac{\mu_0 - \mu + \varepsilon}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \middle| \mathbb{E}\left[\overline{X}\right] = \mu\right)$$

$$= \mathbb{P}\left(Z \geqslant \frac{(\mu_0 - \mu + \varepsilon)\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(Z \leqslant \frac{(\mu_0 - \mu + \varepsilon)\sqrt{n}}{\sigma}\right)$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{(\mu_0 - \mu + \varepsilon)\sqrt{n}}{\sigma}\right) \leqslant 1 - \Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right)$$

Voglio

$$\mathbb{P}\left(\overline{X} > \mu_0 + \varepsilon \middle| \mathbb{E}\left[\overline{X}\right] = \mu\right) \leqslant \alpha \qquad \forall \mu \leqslant \mu_0$$

$\Longrightarrow$

$$\mathbb{P}\left(\overline{X} \geqslant \mu_0 + \varepsilon \middle| \mathbb{E}\left[X_i\right] = \mu\right) = \mathbb{P}\left(\frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \geqslant \frac{\mu_0 - \mu + \varepsilon}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \middle| \mathbb{E}\left[\overline{X}\right] = \mu\right)$$

$$= \mathbb{P}\left(Z \geqslant \frac{(\mu_0 - \mu + \varepsilon)\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(Z \leqslant \frac{(\mu_0 - \mu + \varepsilon)\sqrt{n}}{\sigma}\right)$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{(\mu_0 - \mu + \varepsilon)\sqrt{n}}{\sigma}\right) \leqslant 1 - \Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right) \leqslant \alpha$$

Voglio

$$\mathbb{P}\left(\overline{X} > \mu_0 + \varepsilon \middle| \mathbb{E}\left[\overline{X}\right] = \mu\right) \leqslant \alpha \qquad \forall \mu \leqslant \mu_0$$

$\Longrightarrow$

$$\mathbb{P}\left(\overline{X} \geqslant \mu_0 + \varepsilon | \mathbb{E}\left[X_i\right] = \mu\right) = \mathbb{P}\left(\frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \geqslant \frac{\mu_0 - \mu + \varepsilon}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} | \mathbb{E}\left[\overline{X}\right] = \mu\right)$$

$$= \mathbb{P}\left(Z \geqslant \frac{(\mu_0 - \mu + \varepsilon)\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(Z \leqslant \frac{(\mu_0 - \mu + \varepsilon)\sqrt{n}}{\sigma}\right)$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{(\mu_0 - \mu + \varepsilon)\sqrt{n}}{\sigma}\right) \leqslant 1 - \Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right) \leqslant \alpha$$

Voglio

$$\mathbb{P}\left(\overline{X} > \mu_0 + \varepsilon | \mathbb{E}\left[\overline{X}\right] = \mu\right) \leqslant \alpha \qquad \forall \mu \leqslant \mu_0$$

Scelgo ε tale che modo da avere $1 - \Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right) = \alpha$ cioè

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha}.$$

Criterio di accettazione

Presi i dati $x_1, \ldots, x_n$, sia dunque $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ la loro media.

Accetto H_0 se $\overline{x} < \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha}$ e la rifiuto altrimenti.

Test unilaterale superiore con H_0 semplice

$X_1, \ldots, X_n$ un campione gaussiano di valore atteso μ incognito e varianza σ^2 nota.

- $H_0 : \quad \mu = \mu_0 \qquad H_A : \mu < \mu_0$

Test unilaterale superiore con H_0 semplice

$X_1, \ldots, X_n$ un campione gaussiano di valore atteso μ incognito e varianza σ^2 nota.

- $H_0 : \quad \mu = \mu_0 \qquad H_A : \mu < \mu_0$
- Criterio di accettazione: accetto H_0 se se $\overline{x} > \mu_0 - \varepsilon$.

Test unilaterale superiore con H_0 semplice

$X_1, \ldots, X_n$ un campione gaussiano di valore atteso μ incognito e varianza σ^2 nota.

- H_0 : $\mu = \mu_0$ $\qquad H_A$: $\mu < \mu_0$
- Criterio di accettazione: accetto H_0 se se $\overline{x} > \mu_0 - \varepsilon$.
- Livello di significatività:

$$\mathbb{P}\left(\overline{X} \leqslant \mu_0 - \varepsilon | \mu = \mu_0\right) = \alpha$$

Test unilaterale superiore con H_0 semplice

$X_1, \dots, X_n$ un campione gaussiano di valore atteso μ incognito e varianza σ^2 nota.

- $H_0 : \quad \mu = \mu_0 \qquad H_A : \mu < \mu_0$
- Criterio di accettazione: accetto H_0 se se $\overline{x} > \mu_0 - \varepsilon$.
- Livello di significatività:

$$\mathbb{P}\left(\overline{X} \leqslant \mu_0 - \varepsilon | \mu = \mu_0\right) = \alpha$$

- $\varepsilon = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha}$

Criterio di accettazione

Presi i dati $x_1, \ldots, x_n$, sia dunque $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ la loro media.

Accetto H_0 se $\overline{x} > \mu_0 - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha}$ e la rifiuto altrimenti.

Test unilaterale superiore con H_0 composta

$X_1, \ldots, X_n$ un campione gaussiano di valore atteso μ incognito e varianza σ^2 nota.

- $H_0 : \quad \mu \geqslant \mu_0 \qquad H_A : \mu < \mu_0.$

Test unilaterale superiore con H_0 composta

$X_1, \ldots, X_n$ un campione gaussiano di valore atteso μ incognito e varianza σ^2 nota.

- $H_0: \quad \mu \geqslant \mu_0 \qquad H_A: \mu < \mu_0$.
- Criterio di accettazione: accetto H_0 se $\overline{x} > \mu_0 - \varepsilon$.

Test unilaterale superiore con H_0 composta

$X_1, \ldots, X_n$ un campione gaussiano di valore atteso μ incognito e varianza σ^2 nota.

- $H_0: \quad \mu \geqslant \mu_0 \qquad H_A: \mu < \mu_0.$
- Criterio di accettazione: accetto H_0 se $\overline{x} > \mu_0 - \varepsilon$.
- Livello di significatività:

$$\alpha = \mathbb{P}\left(\overline{X} \leqslant \mu_0 - \varepsilon | \mathbb{E}\left[\overline{X}\right] \leqslant \mu_0\right).$$

Test unilaterale superiore con H_0 composta

$X_1, \ldots, X_n$ un campione gaussiano di valore atteso μ incognito e varianza σ^2 nota.

- $H_0 : \quad \mu \geqslant \mu_0 \qquad H_A : \mu < \mu_0.$
- Criterio di accettazione: accetto H_0 se $\overline{x} > \mu_0 - \varepsilon$.
- Livello di significatività:

$$\alpha = \mathbb{P}\left(\overline{X} \leqslant \mu_0 - \varepsilon | \mathbb{E}\left[\overline{X}\right] \leqslant \mu_0\right).$$

- $\varepsilon = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha}$

Criterio di accettazione

Presi i dati $x_1, \ldots, x_n$, sia dunque $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ la loro media.

Accetto H_0 se $\overline{x} > \mu_0 - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha}$ e la rifiuto altrimenti.

Test d'ipotesi per il valore atteso di campioni gaussiani a varianza ignota

Test bilaterale

$X_1, \ldots, X_n$ un campione gaussiano di valore atteso μ e varianza σ^2 entrambi ignoti

- $H_0 : \quad \mu = \mu_0 \qquad H_A : \quad \mu \neq \mu_0$

Test bilaterale

$X_1, \ldots, X_n$ un campione gaussiano di valore atteso μ e varianza σ^2 entrambi ignoti

- $H_0: \qquad \mu = \mu_0 \qquad\qquad H_A: \qquad \mu \neq \mu_0$
- $\mathbb{E}\left[\frac{(\overline{X} - \mu_0)\sqrt{n}}{S}\right] = \mathbb{E}\left[\overline{X} - \mu_0\right]\sqrt{n}\,\mathbb{E}\left[\frac{1}{\sqrt{S^2}}\right] = 0$
  $\iff \mathbb{E}\left[\overline{X}\right] = \mu_0 \iff H_0$ è vera

Test bilaterale

$X_1, \ldots, X_n$ un campione gaussiano di valore atteso μ e varianza σ^2 entrambi ignoti

- $H_0: \qquad \mu = \mu_0 \qquad\qquad H_A: \qquad \mu \neq \mu_0$
- $\mathbb{E}\left[\frac{(\overline{X}-\mu_0)\sqrt{n}}{S}\right] = \mathbb{E}\left[\overline{X}-\mu_0\right]\sqrt{n}\,\mathbb{E}\left[\frac{1}{\sqrt{S^2}}\right] = 0$
  $\iff \mathbb{E}\left[\overline{X}\right] = \mu_0 \iff H_0$ è vera
- Considero $t := \frac{(\overline{x}-\mu_0)\sqrt{n}}{s}$:

Test bilaterale

$X_1, \ldots, X_n$ un campione gaussiano di valore atteso μ e varianza σ^2 entrambi ignoti

- $H_0: \qquad \mu = \mu_0 \qquad\qquad H_A: \qquad \mu \neq \mu_0$
- $\mathbb{E}\left[\frac{(\overline{X} - \mu_0)\sqrt{n}}{S}\right] = \mathbb{E}\left[\overline{X} - \mu_0\right]\sqrt{n}\,\mathbb{E}\left[\frac{1}{\sqrt{S^2}}\right] = 0$
  $\iff \mathbb{E}\left[\overline{X}\right] = \mu_0 \iff H_0$ è vera
- Considero $t := \frac{(\overline{x} - \mu_0)\sqrt{n}}{s}$:
- accetto H_0 se e solo se $|t| < \varepsilon$

- H_0 vera $\implies T := \dfrac{(\overline{X} - \mu_0)\sqrt{n}}{S}$ ha distribuzione $t(n-1)$.

- H_0 vera $\implies T := \dfrac{(\overline{X} - \mu_0)\sqrt{n}}{S}$ ha distribuzione $t(n-1)$.
- Livello di significatività

$$\begin{aligned}\alpha &= \mathbb{P}\left(|T| \geqslant \varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(T \geqslant \varepsilon\right) + \mathbb{P}\left(T \leqslant -\varepsilon\right) \\ &= 1 - F_T\left(\varepsilon\right) + F_T\left(-\varepsilon\right) = 2\left(1 - F_T\left(\varepsilon\right)\right)\end{aligned}$$

- H_0 vera $\implies T := \dfrac{(\overline{X} - \mu_0)\sqrt{n}}{S}$ ha distribuzione $t(n-1)$.
- Livello di significatività

$$\begin{aligned}\alpha = \mathbb{P}\left(|T| \geqslant \varepsilon\right) &= \mathbb{P}\left(T \geqslant \varepsilon\right) + \mathbb{P}\left(T \leqslant -\varepsilon\right) \\ &= 1 - F_T\left(\varepsilon\right) + F_T\left(-\varepsilon\right) = 2\left(1 - F_T\left(\varepsilon\right)\right)\end{aligned}$$

$$\iff F_T\left(\varepsilon\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} \iff \varepsilon = t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}$$

Criterio di accettazione

Presi i dati $x_1, \ldots, x_n$, sia dunque $t_0 = \dfrac{(\overline{x} - \mu_0)\sqrt{n}}{s}$.
Accetto H_0 se e solo se $|t_0| < t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}$ e la rifiuto altrimenti, ovvero

accetto H_0 se e solo se

$$\mu_0 - \frac{t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\, s}{\sqrt{n}} < \overline{x} < \mu_0 + \frac{t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\, s}{\sqrt{n}}$$

Test unilaterale inferiore con ipotesi nulla semplice

$X_1, \ldots, X_n$ un campione gaussiano di valore atteso μ e varianza σ^2 entrambi ignoti

- $H_0 : \quad \mu = \mu_0, \qquad H_A : \quad \mu > \mu_0$

Test unilaterale inferiore con ipotesi nulla semplice

$X_1, \ldots, X_n$ un campione gaussiano di valore atteso μ e varianza σ^2 entrambi ignoti

- $H_0 : \quad \mu = \mu_0, \qquad H_A : \quad \mu > \mu_0$
- Criterio di accettazione: accetto H_0 se e solo se $\dfrac{(\overline{x} - \mu_0)\sqrt{n}}{s} < \varepsilon$

Test unilaterale inferiore con ipotesi nulla semplice

$X_1, \ldots, X_n$ un campione gaussiano di valore atteso μ e varianza σ^2 entrambi ignoti

- $H_0: \quad \mu = \mu_0, \qquad H_A: \quad \mu > \mu_0$
- Criterio di accettazione: accetto H_0 se e solo se $\dfrac{(\overline{x} - \mu_0)\sqrt{n}}{s} < \varepsilon$
- Livello di significatività:

$$\alpha = \mathbb{P}\left(\frac{(\overline{X} - \mu_0)\sqrt{n}}{S} > \varepsilon | \mu = \mu_0\right) = \mathbb{P}\left(T > \varepsilon\right) = 1 - F_T(\varepsilon).$$

dove $\mathbb{P}_T = t(n-1)$.

Test unilaterale inferiore con ipotesi nulla semplice

$X_1, \ldots, X_n$ un campione gaussiano di valore atteso μ e varianza σ^2 entrambi ignoti

- $H_0: \quad \mu = \mu_0, \qquad H_A: \quad \mu > \mu_0$
- Criterio di accettazione: accetto H_0 se e solo se $\dfrac{(\overline{x} - \mu_0)\sqrt{n}}{s} < \varepsilon$
- Livello di significatività:

$$\alpha = \mathbb{P}\left(\frac{(\overline{X} - \mu_0)\sqrt{n}}{S} > \varepsilon | \mu = \mu_0\right) = \mathbb{P}\left(T > \varepsilon\right) = 1 - F_T(\varepsilon).$$

  dove $\mathbb{P}_T = t(n-1)$.
- $\iff F_T(\varepsilon) = 1 - \alpha \iff \varepsilon = t_{n-1,1-\alpha}$

Criterio di accettazione

Presi i dati $x_1, \ldots, x_n$, sia dunque $t_0 = \frac{(\overline{x} - \mu_0)\sqrt{n}}{s}$. Accetto H_0 se e solo se $t_0 < t_{n-1,1-\alpha}$ ovvero

accetto H_0 se e solo se

$$\overline{x} \leqslant \mu_0 + \frac{t_{n-1,1-\alpha}\, s}{\sqrt{n}}$$

Test unilaterale inferiore con ipotesi nulla composta

$X_1, \ldots, X_n$ un campione gaussiano di valore atteso μ e varianza σ^2 entrambi incogniti

- $H_0 : \quad \mu \leqslant \mu_0, \qquad H_A : \quad \mu > \mu_0$

Test unilaterale inferiore con ipotesi nulla composta

$X_1, \ldots, X_n$ un campione gaussiano di valore atteso μ e varianza σ^2 entrambi incogniti

- $H_0: \quad \mu \leqslant \mu_0, \qquad H_A: \quad \mu > \mu_0$
- Criterio di accettazione: accetto H_0 se e solo se $\dfrac{(\overline{X} - \mu_0)\sqrt{n}}{S} < \varepsilon$.

Test unilaterale inferiore con ipotesi nulla composta

$X_1, \ldots, X_n$ un campione gaussiano di valore atteso μ e varianza σ^2 entrambi incogniti

- $H_0: \quad \mu \leqslant \mu_0, \qquad H_A: \quad \mu > \mu_0$
- Criterio di accettazione: accetto H_0 se e solo se $\dfrac{(\overline{X} - \mu_0)\sqrt{n}}{S} < \varepsilon$.
- Livello di significatività

$$\mathbb{P}\left(\frac{(\overline{X} - \mu_0)\sqrt{n}}{S} \geqslant \varepsilon | \mathbb{E}\left[\overline{X}\right] = \mu \leqslant \mu_0\right).$$

Test unilaterale inferiore con ipotesi nulla composta

$X_1, \ldots, X_n$ un campione gaussiano di valore atteso μ e varianza σ^2 entrambi incogniti

- $H_0: \quad \mu \leqslant \mu_0, \qquad H_A: \quad \mu > \mu_0$
- Criterio di accettazione: accetto H_0 se e solo se $\dfrac{(\overline{X}-\mu_0)\sqrt{n}}{S} < \varepsilon$.
- Livello di significatività

$$\mathbb{P}\left(\frac{(\overline{X}-\mu_0)\sqrt{n}}{S} \geqslant \varepsilon \middle| \mathbb{E}\left[\overline{X}\right] = \mu \leqslant \mu_0\right).$$

- H_0 vera $\implies \mathbb{E}\left[\overline{X}\right] = \mu \leqslant \mu_0 \implies$

$$\frac{(\overline{X}-\mu_0)\sqrt{n}}{S} \leqslant \frac{(\overline{X}-\mu)\sqrt{n}}{S} =: T, \qquad \mathbb{P}_T = t(n-1)$$

H_0 vera $(\mu \leqslant \mu_0) \implies$

- $\left\{ \frac{(\overline{X}-\mu_0)\sqrt{n}}{S} > \varepsilon \right\} \subset \left\{ \frac{(\overline{X}-\mu)\sqrt{n}}{S} > \varepsilon \right\} \implies$

$$\mathbb{P}\left(\frac{(\overline{X}-\mu_0)\sqrt{n}}{S} > \varepsilon \middle| \mathbb{E}\left[\overline{X}\right] = \mu \right) \leqslant$$

$$\leqslant \mathbb{P}\left(\frac{(\overline{X}-\mu)\sqrt{n}}{S} > \varepsilon \middle| \mathbb{E}\left[\overline{X}\right] = \mu \right) = \mathbb{P}\left(T > \varepsilon\right) = 1 - F_T(\varepsilon) = \alpha$$

H_0 vera $(\mu \leqslant \mu_0) \implies$

- $$\left\{\frac{(\overline{X}-\mu_0)\sqrt{n}}{S} > \varepsilon\right\} \subset \left\{\frac{(\overline{X}-\mu)\sqrt{n}}{S} > \varepsilon\right\} \implies$$

$$\mathbb{P}\left(\frac{(\overline{X}-\mu_0)\sqrt{n}}{S} > \varepsilon | \mathbb{E}\left[\overline{X}\right] = \mu\right) \leqslant$$

$$\leqslant \mathbb{P}\left(\frac{(\overline{X}-\mu)\sqrt{n}}{S} > \varepsilon | \mathbb{E}\left[\overline{X}\right] = \mu\right) = \mathbb{P}\left(T > \varepsilon\right) = 1 - F_T(\varepsilon) = \alpha$$

- $\iff 1 - F_T(\varepsilon) = \alpha \iff \varepsilon = t_{n-1,1-\alpha}$

Criterio di accettazione

Presi i dati $x_1, \ldots, x_n$, sia $t_0 = \dfrac{(\overline{x} - \mu_0)\sqrt{n}}{s}$.
Accetto H_0 se e solo se $t_0 < t_{n-1,1-\alpha}$ ovvero

accetto H_0 se e solo se

$$\overline{x} \leqslant \mu_0 + \frac{t_{n-1,1-\alpha}\, s}{\sqrt{n}}$$

Test unilaterale superiore con ipotesi nulla semplice

$X_1, \ldots, X_n$ un campione gaussiano di valore atteso μ e varianza σ^2 entrambi incogniti

- $H_0 : \quad \mu = \mu_0, \qquad H_A : \quad \mu < \mu_0$

Test unilaterale superiore con ipotesi nulla semplice

$X_1, \ldots, X_n$ un campione gaussiano di valore atteso μ e varianza σ^2 entrambi incogniti

- $H_0 : \quad \mu = \mu_0, \qquad H_A : \quad \mu < \mu_0$
- Criterio di accettazione: accetto H_0 se e solo se $\dfrac{(\bar{x} - \mu_0)\sqrt{n}}{s} > -\varepsilon$

Test unilaterale superiore con ipotesi nulla semplice

$X_1, \ldots, X_n$ un campione gaussiano di valore atteso μ e varianza σ^2 entrambi incogniti

- $H_0: \quad \mu = \mu_0, \qquad H_A: \quad \mu < \mu_0$
- Criterio di accettazione: accetto H_0 se e solo se $\dfrac{(\overline{x} - \mu_0)\sqrt{n}}{s} > -\varepsilon$
- Livello di significatività

$$\alpha = \mathbb{P}\left(\frac{(\overline{X} - \mu_0)\sqrt{n}}{S} < -\varepsilon | \mu = \mu_0\right) = \mathbb{P}\left(T < -\varepsilon\right) = F_T(-\varepsilon)$$

dove $\mathbb{P}_T = t(n-1)$

Test unilaterale superiore con ipotesi nulla semplice

$X_1, \ldots, X_n$ un campione gaussiano di valore atteso μ e varianza σ^2 entrambi incogniti

- $H_0: \quad \mu = \mu_0, \qquad H_A: \quad \mu < \mu_0$
- Criterio di accettazione: accetto H_0 se e solo se $\dfrac{(\overline{x} - \mu_0)\sqrt{n}}{s} > -\varepsilon$
- Livello di significatività

$$\alpha = \mathbb{P}\left(\frac{(\overline{X} - \mu_0)\sqrt{n}}{S} < -\varepsilon | \mu = \mu_0\right) = \mathbb{P}\left(T < -\varepsilon\right) = F_T(-\varepsilon)$$

dove $\mathbb{P}_T = t(n-1)$

- $\iff F_T(-\varepsilon) = \alpha \iff \varepsilon = -t_{n-1,\alpha} = t_{n-1,1-\alpha}$

Criterio di accettazione

Presi i dati $x_1, \ldots, x_n$, sia dunque $t_0 = \dfrac{(\overline{x} - \mu_0)\sqrt{n}}{s}$.

Accetto H_0 se e solo se $t_0 > -t_{n-1,1-\alpha}$

ovvero accetto H_0 se e solo se

$$\overline{x} \geqslant \mu_0 - \frac{t_{n-1,1-\alpha}\, s}{\sqrt{n}}$$

Test unilaterale superiore con ipotesi nulla composta

$X_1, \ldots, X_n$ un campione gaussiano di valore atteso μ e varianza σ^2 entrambi incogniti

- $H_0: \quad \mu \geqslant \mu_0, \qquad H_A: \quad \mu < \mu_0$

Test unilaterale superiore con ipotesi nulla composta

$X_1, \ldots, X_n$ un campione gaussiano di valore atteso μ e varianza σ^2 entrambi incogniti

- $H_0: \quad \mu \geqslant \mu_0, \qquad H_A: \quad \mu < \mu_0$
- Criterio di accettazione: accetto H_0 se e solo se $\dfrac{(\overline{x} - \mu_0)\sqrt{n}}{s} \geqslant -\varepsilon$.

Test unilaterale superiore con ipotesi nulla composta

$X_1, \ldots, X_n$ un campione gaussiano di valore atteso μ e varianza σ^2 entrambi incogniti

- $H_0: \qquad \mu \geqslant \mu_0, \qquad\qquad H_A: \qquad \mu < \mu_0$
- Criterio di accettazione: accetto H_0 se e solo se $\dfrac{(\overline{x} - \mu_0)\sqrt{n}}{s} \geqslant -\varepsilon$.
- Livello di significatività

$$\mathbb{P}\left(\frac{(\overline{X} - \mu_0)\sqrt{n}}{S} < -\varepsilon | \mathbb{E}\left[\overline{X}\right] = \mu \geqslant \mu_0\right)$$

Test unilaterale superiore con ipotesi nulla composta

$X_1, \dots, X_n$ un campione gaussiano di valore atteso μ e varianza σ^2 entrambi incogniti

- $H_0 : \qquad \mu \geqslant \mu_0, \qquad\qquad H_A : \qquad \mu < \mu_0$
- Criterio di accettazione: accetto H_0 se e solo se $\dfrac{(\overline{x} - \mu_0)\sqrt{n}}{s} \geqslant -\varepsilon$.
- Livello di significatività

$$\mathbb{P}\left(\frac{(\overline{X} - \mu_0)\sqrt{n}}{S} < -\varepsilon \middle| \mathbb{E}\left[\overline{X}\right] = \mu \geqslant \mu_0\right)$$

- H_0 vera $\implies \mathbb{E}\left[\overline{X}\right] = \mu \geqslant \mu_0 \implies$

$$\frac{(\overline{X} - \mu_0)\sqrt{n}}{S} \geqslant \frac{(\overline{X} - \mu)\sqrt{n}}{S} =: T, \qquad \mathbb{P}_T = t(n-1)$$

H_0 vera $\mu \geqslant \mu_0 \implies$

- $\left\{ \frac{(\overline{X} - \mu_0)\sqrt{n}}{S} < -\varepsilon \right\} \subset \left\{ \frac{(\overline{X} - \mu)\sqrt{n}}{S} < -\varepsilon \right\}$

H_0 vera $\mu \geqslant \mu_0 \implies$

- $\left\{ \frac{(\overline{X} - \mu_0)\sqrt{n}}{S} < -\varepsilon \right\} \subset \left\{ \frac{(\overline{X} - \mu)\sqrt{n}}{S} < -\varepsilon \right\}$
- $$\begin{aligned} &\mathbb{P}\left(\frac{(\overline{X} - \mu_0)\sqrt{n}}{S} < -\varepsilon \middle| \mathbb{E}\left[\overline{X}\right] = \mu \right) \\ &\leqslant \mathbb{P}\left(\frac{(\overline{X} - \mu)\sqrt{n}}{S} < -\varepsilon \middle| \mathbb{E}\left[\overline{X}\right] = \mu \right) \\ &= \mathbb{P}\left(T < -\varepsilon \right) = F_T(-\varepsilon) = 1 - F_T(\varepsilon) = \alpha \end{aligned}$$

H_0 vera $\mu \geqslant \mu_0 \implies$

- $\left\{ \frac{(\overline{X}-\mu_0)\sqrt{n}}{S} < -\varepsilon \right\} \subset \left\{ \frac{(\overline{X}-\mu)\sqrt{n}}{S} < -\varepsilon \right\}$
-
$$\begin{aligned} &\mathbb{P}\left(\frac{(\overline{X}-\mu_0)\sqrt{n}}{S} < -\varepsilon | \mathbb{E}\left[\overline{X}\right] = \mu \right) \\ &\leqslant \mathbb{P}\left(\frac{(\overline{X}-\mu)\sqrt{n}}{S} < -\varepsilon | \mathbb{E}\left[\overline{X}\right] = \mu \right) \\ &= \mathbb{P}\left(T < -\varepsilon \right) = F_T(-\varepsilon) = 1 - F_T(\varepsilon) = \alpha \end{aligned}$$
- $\iff 1 - F_T(\varepsilon) = \alpha \iff \varepsilon = t_{n-1,1-\alpha}$

Criterio di accettazione

Presi i dati $x_1, \ldots, x_n$, sia dunque $t_0 = \dfrac{(\overline{x} - \mu_0)\sqrt{n}}{s}$.
Accetto H_0 se $t_0 > -t_{n-1,1-\alpha}$, ovvero

accetto H_0 se e solo se

$$\overline{x} \geqslant \mu_0 - \frac{t_{n-1,1-\alpha}\, s}{\sqrt{n}}$$

Test d'ipotesi per la varianza di campioni gaussiani

Test bilaterale

$X_1, \ldots, X_n$ campione gaussiano di valore atteso μ (noto o incognito) e varianza σ^2 incognita.

- $H_0: \quad \sigma^2 = \sigma_0^2 \qquad H_A: \quad \sigma^2 \neq \sigma_0^2$

Test bilaterale

$X_1, \ldots, X_n$ campione gaussiano di valore atteso μ (noto o incognito) e varianza σ^2 incognita.

- $H_0 : \qquad \sigma^2 = \sigma_0^2 \qquad\qquad H_A : \qquad \sigma^2 \neq \sigma_0^2$
- H_0 vera $\iff \mathbb{E}\left[S^2\right] = \sigma_0^2 \iff \mathbb{E}\left[\dfrac{S^2}{\sigma_0^2}\right] = 1$

Test bilaterale

$X_1, \ldots, X_n$ campione gaussiano di valore atteso μ (noto o incognito) e varianza σ^2 incognita.

- $H_0: \quad \sigma^2 = \sigma_0^2 \qquad H_A: \quad \sigma^2 \neq \sigma_0^2$
- H_0 vera $\iff \mathbb{E}\left[S^2\right] = \sigma_0^2 \iff \mathbb{E}\left[\frac{S^2}{\sigma_0^2}\right] = 1$
- Criterio di accettazione: accetto H_0 se e solo se

$$1 - \varepsilon_1 < \frac{s^2}{\sigma_0^2} < 1 + \varepsilon_2, \qquad \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$$

$$\iff (n-1)(1-\varepsilon_1) < \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} < (n-1)(1+\varepsilon_2).$$

Test bilaterale

$X_1, \ldots, X_n$ campione gaussiano di valore atteso μ (noto o incognito) e varianza σ^2 incognita.

- $H_0 : \qquad \sigma^2 = \sigma_0^2 \qquad\qquad H_A : \qquad \sigma^2 \neq \sigma_0^2$
- H_0 vera $\iff \mathbb{E}\left[S^2\right] = \sigma_0^2 \iff \mathbb{E}\left[\frac{S^2}{\sigma_0^2}\right] = 1$
- Criterio di accettazione: accetto H_0 se e solo se

$$1 - \varepsilon_1 < \frac{s^2}{\sigma_0^2} < 1 + \varepsilon_2, \qquad \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$$

$$\iff (n-1)(1-\varepsilon_1) < \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} < (n-1)(1+\varepsilon_2).$$

- Livello di significatività:

$$V := \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}, \qquad H_0 \text{ vera} \iff \mathbb{P}_V = \chi^2_{n-1}$$

H_0 vera $\Longrightarrow$

$$
\begin{aligned}
\alpha &= \mathbb{P}\left(\frac{S^2}{\sigma_0^2} > 1+\varepsilon_2 | \sigma^2 = \sigma_0^2\right) + \mathbb{P}\left(\frac{S^2}{\sigma_0^2} < 1-\varepsilon_1 | \sigma^2 = \sigma_0^2\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} > (n-1)(1+\varepsilon_2) | \sigma^2 = \sigma_0^2\right) \\
&+ \mathbb{P}\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} < (n-1)(1-\varepsilon_1) | \sigma^2 = \sigma_0^2\right) \\
&= \mathbb{P}\left(V > (n-1)(1+\varepsilon_2)\right) + \mathbb{P}\left(V < (n-1)(1-\varepsilon_1)\right).
\end{aligned}
$$

H_0 vera $\implies$

$$
\begin{aligned}
\alpha &= \mathbb{P}\left(\frac{S^2}{\sigma_0^2} > 1+\varepsilon_2 | \sigma^2 = \sigma_0^2\right) + \mathbb{P}\left(\frac{S^2}{\sigma_0^2} < 1-\varepsilon_1 | \sigma^2 = \sigma_0^2\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} > (n-1)(1+\varepsilon_2) | \sigma^2 = \sigma_0^2\right) \\
&+ \mathbb{P}\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} < (n-1)(1-\varepsilon_1) | \sigma^2 = \sigma_0^2\right) \\
&= \mathbb{P}\left(V > (n-1)(1+\varepsilon_2)\right) + \mathbb{P}\left(V < (n-1)(1-\varepsilon_1)\right).
\end{aligned}
$$

Possibile scelta:

$$\mathbb{P}\left(V > (n-1)(1+\varepsilon_2)\right) = \frac{\alpha}{2} \qquad \text{cioè} \qquad (n-1)(1+\varepsilon_2) = \chi^2_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}$$

$$\mathbb{P}\left(V < (n-1)(1-\varepsilon_1)\right) = \frac{\alpha}{2} \qquad \text{cioè} \qquad (n-1)(1-\varepsilon_1) = \chi^2_{n-1,\frac{\alpha}{2}}$$

Criterio di accettazione

Accetto H_0 se e solo se $\chi^2_{n-1,\frac{\alpha}{2}} < \dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} < \chi^2_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}$ ovvero

accetto H_0 se e solo se

$$\frac{\sigma_0^2}{n-1}\chi^2_{n-1,\frac{\alpha}{2}} < s^2 < \frac{\sigma_0^2}{n-1}\chi^2_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}$$

Test unilaterale inferiore con ipotesi semplice

$X_1, \ldots, X_n$ campione gaussiano di valore atteso μ (noto o incognito) e varianza σ^2 incognita.

- $H_0 : \quad \sigma^2 = \sigma_0^2 \qquad H_A : \quad \sigma^2 > \sigma_0^2$

Test unilaterale inferiore con ipotesi semplice

$X_1, \ldots, X_n$ campione gaussiano di valore atteso μ (noto o incognito) e varianza σ^2 incognita.

- $H_0 : \qquad \sigma^2 = \sigma_0^2 \qquad\qquad H_A : \qquad \sigma^2 > \sigma_0^2$
- Criterio di accettazione: accetto H_0 se e solo se $\dfrac{s^2}{\sigma_0^2} \leqslant 1 + \varepsilon$

Test unilaterale inferiore con ipotesi semplice

$X_1, \ldots, X_n$ campione gaussiano di valore atteso μ (noto o incognito) e varianza σ^2 incognita.

- $H_0 : \qquad \sigma^2 = \sigma_0^2 \qquad\qquad H_A : \qquad \sigma^2 > \sigma_0^2$
- Criterio di accettazione: accetto H_0 se e solo se $\dfrac{s^2}{\sigma_0^2} \leqslant 1 + \varepsilon$
- Livello di significatività:

$$V := \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}, \qquad H_0 \text{ vera} \iff \mathbb{P}_V = \chi^2_{n-1}$$

H_0 vera $\Longrightarrow$

$$\mathbb{P}\left(\frac{S^2}{\sigma_0^2} > 1+\varepsilon | \sigma^2 = \sigma_0^2\right) = \mathbb{P}\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} > (n-1)(1+\varepsilon) | \sigma^2 = \sigma_0^2\right) = 1-$$

$$\Longleftrightarrow\ 1 - F_V\left((n-1)(1+\varepsilon)\right) = \alpha \ \Longleftrightarrow\ (n-1)(1+\varepsilon) = \chi^2_{n-1,1-\alpha}$$

Criterio di accettazione

Accetto H_0 se e solo se $\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} < \chi^2_{n-1,1-\alpha}$ ovvero

acccetto H_0 se e solo se

$$s^2 < \frac{\sigma_0^2}{n-1}\chi^2_{n-1,1-\alpha}$$

Test unilaterale inferiore con ipotesi composta

$X_1, \ldots, X_n$ un campione gaussiano di valore atteso μ (noto o incognito) e varianza σ^2 incognita.

- $H_0 : \qquad \sigma^2 \leqslant \sigma_0^2 \qquad\qquad H_A : \qquad \sigma^2 > \sigma_0^2$

Test unilaterale inferiore con ipotesi composta

$X_1, \dots, X_n$ un campione gaussiano di valore atteso μ (noto o incognito) e varianza σ^2 incognita.

- $H_0 : \quad \sigma^2 \leqslant \sigma_0^2 \qquad H_A : \quad \sigma^2 > \sigma_0^2$
- Criterio di accettazione: $\dfrac{s^2}{\sigma_0^2} \leqslant 1 + \varepsilon$

Test unilaterale inferiore con ipotesi composta

$X_1, \ldots, X_n$ un campione gaussiano di valore atteso μ (noto o incognito) e varianza σ^2 incognita.

- $H_0 : \qquad \sigma^2 \leqslant \sigma_0^2 \qquad\qquad H_A : \qquad \sigma^2 > \sigma_0^2$
- Criterio di accettazione: $\dfrac{s^2}{\sigma_0^2} \leqslant 1 + \varepsilon$
- Livello di significatività:

$$V := \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}, \qquad \text{se } \operatorname{Var}[X_i] = \sigma^2 \implies \mathbb{P}_V = \chi^2_{n-1}$$

H_0 ($\mathrm{Var}[X_i] = \sigma^2 \leqslant \sigma_0^2$) vera $\implies$

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(\frac{S^2}{\sigma_0^2} > 1+\varepsilon \middle| \mathrm{Var}[X_i] = \sigma^2 \leqslant \sigma_0\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} > \frac{\sigma_0^2}{\sigma^2}(n-1)(1+\varepsilon) \middle| \mathrm{Var}[X_i] = \sigma^2 \leqslant \sigma_0\right) \\
&= \mathbb{P}\left(V > \frac{\sigma_0^2}{\sigma^2}(n-1)(1+\varepsilon)\right) = 1 - F_V\left(\frac{\sigma_0^2}{\sigma^2}(n-1)(1+\varepsilon)\right) \\
&\leqslant 1 - F_V((n-1)(1+\varepsilon)) = = \alpha
\end{aligned}
$$

$$
\left(\sigma^2 \leqslant \sigma_0^2 \implies \frac{\sigma^2}{\sigma_0^2} \leqslant 1\right)
$$

H_0 ($\mathrm{Var}[X_i] = \sigma^2 \leqslant \sigma_0^2$) vera $\implies$

$$\mathbb{P}\left(\frac{S^2}{\sigma_0^2} > 1 + \varepsilon | \mathrm{Var}[X_i] = \sigma^2 \leqslant \sigma_0\right)$$
$$= \mathbb{P}\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} > \frac{\sigma_0^2}{\sigma^2}(n-1)(1+\varepsilon) | \mathrm{Var}[X_i] = \sigma^2 \leqslant \sigma_0\right)$$
$$= \mathbb{P}\left(V > \frac{\sigma_0^2}{\sigma^2}(n-1)(1+\varepsilon)\right) = 1 - F_V\left(\frac{\sigma_0^2}{\sigma^2}(n-1)(1+\varepsilon)\right)$$
$$\leqslant 1 - F_V((n-1)(1+\varepsilon)) = {\color{red}= \alpha}$$

$$(\sigma^2 \leqslant \sigma_0^2 \implies \frac{\sigma^2}{\sigma_0^2} \leqslant 1)$$

$$\iff 1 - F_V((n-1)(1+\varepsilon)) = \alpha \iff {\color{red}(n-1)(1+\varepsilon) = \chi^2_{n-1,1-\alpha}}$$

Criterio di accettazione

accetto H_0 se e solo se $\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} < \chi^2_{n-1,1-\alpha}$ ovvero

accetto H_0 se e solo se

$$s^2 < \frac{\sigma_0^2}{n-1}\chi^2_{n-1,1-\alpha}$$

Test unilaterale superiore con ipotesi semplice

$X_1, \ldots, X_n$ un campione gaussiano di valore atteso μ (noto o incognito) e varianza σ^2 incognita

- $H_0: \quad \sigma^2 = \sigma_0^2 \qquad\qquad H_A: \quad \sigma^2 < \sigma_0^2$

Test unilaterale superiore con ipotesi semplice

$X_1, \dots, X_n$ un campione gaussiano di valore atteso μ (noto o incognito) e varianza σ^2 incognita

- $H_0 : \quad \sigma^2 = \sigma_0^2 \qquad H_A : \quad \sigma^2 < \sigma_0^2$
- Criterio di accettazione: accetto H_0 se e solo se $\dfrac{s^2}{\sigma_0^2} \geqslant 1 - \varepsilon$

Test unilaterale superiore con ipotesi semplice

$X_1, \ldots, X_n$ un campione gaussiano di valore atteso μ (noto o incognito) e varianza σ^2 incognita

- $H_0 : \quad \sigma^2 = \sigma_0^2 \qquad H_A : \quad \sigma^2 < \sigma_0^2$
- Criterio di accettazione: accetto H_0 se e solo se $\dfrac{s^2}{\sigma_0^2} \geqslant 1 - \varepsilon$
- Livello di significatività:

$$V := \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}, \qquad H_0 \text{ vera} \iff \mathbb{P}_V = \chi^2_{n-1}$$

Test unilaterale superiore con ipotesi semplice

$X_1, \ldots, X_n$ un campione gaussiano di valore atteso μ (noto o incognito) e varianza σ^2 incognita

- $H_0: \qquad \sigma^2 = \sigma_0^2 \qquad\qquad H_A: \qquad \sigma^2 < \sigma_0^2$
- Criterio di accettazione: accetto H_0 se e solo se $\dfrac{s^2}{\sigma_0^2} \geqslant 1 - \varepsilon$
- Livello di significatività:

$$V := \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}, \qquad H_0 \text{ vera} \iff \mathbb{P}_V = \chi^2_{n-1}$$

- $\alpha = \mathbb{P}\left(\dfrac{S^2}{\sigma_0^2} < 1 - \varepsilon | \sigma^2 = \sigma_0^2\right) = F_V\left((n-1)(1-\varepsilon)\right)$

$$\iff (n-1)(1-\varepsilon) = \chi^2_{n-1,\alpha}$$

Criterio di accettazione

Accetto H_0 se e solo se $\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} > \chi^2_{n-1,\alpha}$ ovvero

accetto H_0 se e solo se

$$s^2 > \frac{\sigma_0^2}{n-1}\chi^2_{n-1,\alpha}$$

Test unilaterale superiore con ipotesi composta

$X_1, \ldots, X_n$ un campione gaussiano di valore atteso μ (noto o incognito) e varianza σ^2 incognita.

- $H_0: \quad \sigma^2 \geqslant \sigma_0^2 \qquad H_A: \quad \sigma^2 < \sigma_0^2$

Test unilaterale superiore con ipotesi composta

$X_1, \ldots, X_n$ un campione gaussiano di valore atteso μ (noto o incognito) e varianza σ^2 incognita.

- $H_0 : \quad \sigma^2 \geqslant \sigma_0^2 \qquad H_A : \quad \sigma^2 < \sigma_0^2$
- Criterio di accettazione: accetto H_0 se e solo se $\dfrac{s^2}{\sigma_0^2} \geqslant 1 - \varepsilon$

Test unilaterale superiore con ipotesi composta

$X_1, \ldots, X_n$ un campione gaussiano di valore atteso μ (noto o incognito) e varianza σ^2 incognita.

- $H_0: \quad \sigma^2 \geqslant \sigma_0^2 \qquad H_A: \quad \sigma^2 < \sigma_0^2$
- Criterio di accettazione: accetto H_0 se e solo se $\dfrac{s^2}{\sigma_0^2} \geqslant 1 - \varepsilon$
- Livello di significatività:

$$V := \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}, \quad \text{se } \operatorname{Var}[X_i] = \sigma^2 \implies \mathbb{P}_V = \chi^2_{n-1}$$

H_0 $(\mathrm{Var}[X_i] = \sigma^2 \geqslant \sigma_0^2)$ vera $\Longrightarrow$

$$\mathbb{P}\left(\frac{S^2}{\sigma_0^2} < 1-\varepsilon \,|\, \mathrm{Var}[X_i] = \sigma^2 \geqslant \sigma_0^2\right)$$

$$= \mathbb{P}\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \frac{\sigma_0^2}{\sigma^2}(n-1)(1-\varepsilon) \,|\, \mathrm{Var}[X_i] = \sigma^2 \geqslant \sigma_0^2\right)$$

$$= F_V\left(\frac{\sigma_0^2}{\sigma^2}(n-1)(1-\varepsilon)\right) \leqslant F_V((n-1)(1-\varepsilon)) = \alpha$$

$$\Longleftrightarrow F_V((n-1)(1-\varepsilon)) = \alpha \Longleftrightarrow (n-1)(1-\varepsilon) = \chi^2_{n-1,\alpha}$$

Criterio di accettazione

Accetto H_0 se e solo se $\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} > \chi^2_{n-1,\alpha}$ ovvero

accetto H_0 se se e solo se

$$s^2 > \frac{\sigma_0^2}{n-1}\chi^2_{n-1,\alpha}$$

Intervalli di confidenza e Test di ipotesi per il confronto di campioni gaussiani

Intervalli di confidenza per la differenza dei valori attesi di campioni gaussiani

Due campioni, entrambi gaussiani e tra di loro indipendenti

$$X: X_1, \ldots, X_n \qquad \mathbb{P}_{X_i} = N\left(\mu_X, \sigma_X^2\right),$$
$$Y: Y_1, \ldots, Y_k \qquad \mathbb{P}_{Y_j} = N\left(\mu_Y, \sigma_Y^2\right).$$

Scopo

Costruire un intervallo di confidenza per la differenza $\mu_X - \mu_Y$.

Remark

Si può dimostrare che $\overline{X} - \overline{Y}$ è stimatore di massima verosimiglianza per $\mu_X - \mu_Y$.

Consideriamo due casi distinti (ma non esaustivi)

1: Le varianze σ_X^2 e σ_Y^2 sono note

- $\mathbb{P}_{X_i} = N\left(\mu_X, \sigma_X^2\right), \quad \mathbb{P}_{Y_j} = N\left(\mu_Y, \sigma_Y^2\right) \implies$

$$\mathbb{P}_{\overline{X}} = N\left(\mu_X, \frac{\sigma_X^2}{n}\right), \qquad \mathbb{P}_{\overline{Y}} = N\left(\mu_Y, \frac{\sigma_Y^2}{k}\right).$$

1: Le varianze σ_X^2 e σ_Y^2 sono note

- $\mathbb{P}_{X_i} = N\left(\mu_X, \sigma_X^2\right), \quad \mathbb{P}_{Y_j} = N\left(\mu_Y, \sigma_Y^2\right) \implies$
$$\mathbb{P}_{\overline{X}} = N\left(\mu_X, \frac{\sigma_X^2}{n}\right), \qquad \mathbb{P}_{\overline{Y}} = N\left(\mu_Y, \frac{\sigma_Y^2}{k}\right).$$
- $Z := \dfrac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_X^2}{n} + \dfrac{\sigma_Y^2}{k}}} \implies \mathbb{P}_Z = N(0, 1)$

1: Le varianze σ_X^2 e σ_Y^2 sono note

- $\mathbb{P}_{X_i} = N\left(\mu_X, \sigma_X^2\right), \quad \mathbb{P}_{Y_j} = N\left(\mu_Y, \sigma_Y^2\right) \implies$
$$\mathbb{P}_{\overline{X}} = N\left(\mu_X, \frac{\sigma_X^2}{n}\right), \qquad \mathbb{P}_{\overline{Y}} = N\left(\mu_Y, \frac{\sigma_Y^2}{k}\right).$$
- $Z := \dfrac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_X^2}{n} + \dfrac{\sigma_Y^2}{k}}} \implies \mathbb{P}_Z = N(0,1)$
- $1 - \alpha = \mathbb{P}\left(z_{\frac{\alpha}{2}} < \dfrac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_X^2}{n} + \dfrac{\sigma_Y^2}{k}}} < z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) =$
$$\mathbb{P}\left(\overline{X} - \overline{Y} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{k}} < \mu_X - \mu_Y < \overline{X} - \overline{Y} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{k}}\right).$$

Intervallo di confidenza bilaterale di livello $1-\alpha$

$$(L_i, L_s) = \left(\overline{X} - \overline{Y} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{k}}, \overline{X} - \overline{Y} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{k}} \right)$$

Intervalli unilaterali

Analogamente si dimostra che

- $(-\infty, L_s) = \left(-\infty, \overline{X} - \overline{Y} + z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{k}}\right)$
  è un intervallo di confidenza inferiore di livello $1-\alpha$;

Intervalli unilaterali

Analogamente si dimostra che

- $(-\infty, L_s) = \left(-\infty, \overline{X} - \overline{Y} + z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{k}}\right)$
  è un intervallo di confidenza inferiore di livello $1-\alpha$;
- $(L_i, +\infty) = \left(\overline{X} - \overline{Y} - z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{k}}, +\infty\right)$
  è un intervallo di confidenza superiore di livello $1-\alpha$.

Le varianze σ_X^2 e σ_Y^2 sono ignote ma si possono ritenere uguali

σ^2 := il comune valore delle due varianze.

- $S_X^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2, \qquad S_Y^2 = \dfrac{1}{k-1}\sum_{j=1}^{k}(Y_j - \overline{Y})^2$

Le varianze σ_X^2 e σ_Y^2 sono ignote ma si possono ritenere uguali

σ^2 := il comune valore delle due varianze.

- $S_X^2 = \dfrac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2, \qquad S_Y^2 = \dfrac{1}{k-1} \sum_{j=1}^{k} (Y_j - \overline{Y})^2$
- $V_X := \dfrac{(n-1) S_X^2}{\sigma^2}, \quad V_Y := \dfrac{(k-1) S_Y^2}{\sigma^2},$

Le varianze σ_X^2 e σ_Y^2 sono ignote ma si possono ritenere uguali

$\sigma^2 :=$ il comune valore delle due varianze.

- $S_X^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2, \qquad S_Y^2 = \dfrac{1}{k-1}\sum_{j=1}^{k}(Y_j - \overline{Y})^2$
- $V_X := \dfrac{(n-1)S_X^2}{\sigma^2}, \quad V_Y := \dfrac{(k-1)S_Y^2}{\sigma^2},$
- $\Longrightarrow \mathbb{P}_{V_X} = \chi^2_{n-1}, \qquad \mathbb{P}_{V_Y} = \chi^2_{k-1}.$ $\quad V_X$ e V_Y sono indipendenti

Le varianze σ_X^2 e σ_Y^2 sono ignote ma si possono ritenere uguali

σ^2 := il comune valore delle due varianze.

- $S_X^2 = \dfrac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2, \qquad S_Y^2 = \dfrac{1}{k-1} \sum_{j=1}^{k} (Y_j - \overline{Y})^2$
- $V_X := \dfrac{(n-1)S_X^2}{\sigma^2}, \qquad V_Y := \dfrac{(k-1)S_Y^2}{\sigma^2},$
- $\Longrightarrow \mathbb{P}_{V_X} = \chi^2_{n-1}, \qquad \mathbb{P}_{V_Y} = \chi^2_{k-1}.$ $\quad V_X$ e V_Y sono indipendenti
- $\Longrightarrow \mathbb{P}_{V_X+V_Y} = \chi^2_{n+k-2}$

Le varianze σ_X^2 e σ_Y^2 sono ignote ma si possono ritenere uguali

σ^2 := il comune valore delle due varianze.

- $S_X^2 = \dfrac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2, \qquad S_Y^2 = \dfrac{1}{k-1} \sum_{j=1}^{k} (Y_j - \overline{Y})^2$
- $V_X := \dfrac{(n-1)S_X^2}{\sigma^2}, \qquad V_Y := \dfrac{(k-1)S_Y^2}{\sigma^2},$
- $\Longrightarrow \mathbb{P}_{V_X} = \chi^2_{n-1}, \qquad \mathbb{P}_{V_Y} = \chi^2_{k-1}.$ $\quad V_X$ e V_Y sono indipendenti
- $\Longrightarrow \mathbb{P}_{V_X+V_Y} = \chi^2_{n+k-2}$
- $V_X + V_Y = \dfrac{(n-1)S_X^2 + (k-1)S_Y^2}{\sigma^2}$

$$= \frac{n+k-2}{\sigma^2} \, \frac{(n-1)S_X^2 + (k-1)S_Y^2}{n+k-2}$$

- $\overline{S}^2 := \dfrac{(n-1)S_X^2 + (k-1)S_Y^2}{n+k-2}$

- $\overline{S}^2 := \dfrac{(n-1)S_X^2 + (k-1)S_Y^2}{n+k-2}$
- $V_X + V_Y = \dfrac{(n+k-2)\overline{S}^2}{\sigma^2}$

- $\overline{S}^2 := \dfrac{(n-1)S_X^2 + (k-1)S_Y^2}{n+k-2}$
- $V_X + V_Y = \dfrac{(n+k-2)\overline{S}^2}{\sigma^2}$
- $\mathbb{P}_{\overline{X}-\overline{Y}} = N\left(\mu_X - \mu_Y, \sigma^2\left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{k}\right)\right)$

- $\overline{S}^2 := \dfrac{(n-1)S_X^2 + (k-1)S_Y^2}{n+k-2}$
- $V_X + V_Y = \dfrac{(n+k-2)\overline{S}^2}{\sigma^2}$
- $\mathbb{P}_{\overline{X}-\overline{Y}} = N\left(\mu_X - \mu_Y, \sigma^2\left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{k}\right)\right)$
- $Z := \dfrac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_X - \mu_Y)}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{k}}} \implies \mathbb{P}_Z = N(0,1)$

- $\overline{S}^2 := \dfrac{(n-1)S_X^2 + (k-1)S_Y^2}{n+k-2}$
- $V_X + V_Y = \dfrac{(n+k-2)\overline{S}^2}{\sigma^2}$
- $\mathbb{P}_{\overline{X}-\overline{Y}} = N\left(\mu_X - \mu_Y, \sigma^2\left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{k}\right)\right)$
- $Z := \dfrac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_X - \mu_Y)}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{k}}} \implies \mathbb{P}_Z = N(0,1)$
- $T := \dfrac{Z\sqrt{n+k-2}}{\sqrt{V_X + V_Y}} = \dfrac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{k}}} \dfrac{\sqrt{n+k-2}}{\sqrt{(n-1)S_X^2 + (k-1)S_Y^2}}$

$$= \frac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{k}}} \frac{1}{\overline{S}}.$$

- Campioni sono gaussiani e indipendenti

- Campioni sono gaussiani e indipendenti
- $\Longrightarrow$ $\overline{X}$, S_X^2, $\overline{Y}$ e S_Y^2 indipendenti

- Campioni sono gaussiani e indipendenti
- $\Longrightarrow$ $\overline{X}$, S_X^2, $\overline{Y}$ e S_Y^2 indipendenti
- $\Longrightarrow$ $\overline{X} - \overline{Y}$ e $V_X + V_Y$ indipendenti

- Campioni sono gaussiani e indipendenti
- $\Longrightarrow$ $\overline{X}$, S_X^2, $\overline{Y}$ e S_Y^2 indipendenti
- $\Longrightarrow$ $\overline{X} - \overline{Y}$ e $V_X + V_Y$ indipendenti
- $\Longrightarrow$ $\Longrightarrow \mathbb{P}_T = t_{n+k-2}$

$$1 - \alpha = \mathbb{P}\left(t_{n+k-2,\frac{\alpha}{2}} < \frac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{k}}} \frac{1}{\overline{S}} < t_{n+k-2,1-\frac{\alpha}{2}} \right)$$

$$= \mathbb{P}\Big(\overline{X} - \overline{Y} - t_{n+k-2,1-\frac{\alpha}{2}} \overline{S} \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{k}} < \mu_X - \mu_Y <$$

$$< \overline{X} - \overline{Y} + t_{n+k-2,1-\frac{\alpha}{2}} \overline{S} \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{k}} \Big)$$

Intervallo di confidenza bilaterale di livello $1-\alpha$

$$\left(\overline{X}-\overline{Y}-t_{n+k-2,1-\frac{\alpha}{2}}\overline{S}\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{k}},\overline{X}-\overline{Y}+t_{n+k-2,1-\frac{\alpha}{2}}\overline{S}\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{k}}\right)$$

Test d'ipotesi per la differenza dei valori attesi di campioni gaussiani

Due campioni, entrambi gaussiani e tra di loro indipendenti

$$X\colon X_1, \ \ldots, \ X_n \qquad \mathbb{P}_{X_i} = N\left(\mu_X, \sigma_X^2\right),$$
$$Y\colon Y_1, \ \ldots, \ Y_k \qquad \mathbb{P}_{Y_j} = N\left(\mu_Y, \sigma_Y^2\right).$$

Test d'ipotesi per la differenza dei valori attesi di campioni gaussiani

Due campioni, entrambi gaussiani e tra di loro indipendenti

$$
\begin{array}{ll}
X\colon X_1, \ldots, X_n & \mathbb{P}_{X_i} = N\left(\mu_X, \sigma_X^2\right), \\
Y\colon Y_1, \ldots, Y_k & \mathbb{P}_{Y_j} = N\left(\mu_Y, \sigma_Y^2\right).
\end{array}
$$

- $H_0: \quad \mu_X - \mu_Y = d \qquad H_A: \quad \mu_X - \mu_Y \neq d.$

Test d'ipotesi per la differenza dei valori attesi di campioni gaussiani

Due campioni, entrambi gaussiani e tra di loro indipendenti

$$\begin{aligned} X\colon X_1, \ldots, X_n \qquad & \mathbb{P}_{X_i} = N\left(\mu_X, \sigma_X^2\right), \\ Y\colon Y_1, \ldots, Y_k \qquad & \mathbb{P}_{Y_j} = N\left(\mu_Y, \sigma_Y^2\right). \end{aligned}$$

- $H_0: \qquad \mu_X - \mu_Y = d \qquad\qquad H_A: \qquad \mu_X - \mu_Y \neq d.$
- $\mu_X - \mu_Y = d \iff \mathbb{E}\left[\overline{X} - \overline{Y}\right] = d.$

Test d'ipotesi per la differenza dei valori attesi di campioni gaussiani

Due campioni, entrambi gaussiani e tra di loro indipendenti

$$
\begin{aligned}
X\colon X_1, \ldots, X_n \qquad & \mathbb{P}_{X_i} = N\left(\mu_X, \sigma_X^2\right), \\
Y\colon Y_1, \ldots, Y_k \qquad & \mathbb{P}_{Y_j} = N\left(\mu_Y, \sigma_Y^2\right).
\end{aligned}
$$

- $H_0: \qquad \mu_X - \mu_Y = d \qquad\qquad H_A: \qquad \mu_X - \mu_Y \neq d.$
- $\mu_X - \mu_Y = d \iff \mathbb{E}\left[\overline{X} - \overline{Y}\right] = d.$
- Distinguiamo due diversi casi

Le varianze σ_X^2 e σ_Y^2 sono note

- $\mathbb{P}_{\overline{X}} = N\left(\mu_X, \frac{\sigma_X^2}{n}\right), \mathbb{P}_{\overline{Y}} = N\left(\mu_Y, \frac{\sigma_Y^2}{k}\right)$

Le varianze σ_X^2 e σ_Y^2 sono note

- $\mathbb{P}_{\overline{X}} = N\left(\mu_x, \frac{\sigma_X^2}{n}\right)$, $\mathbb{P}_{\overline{Y}} = N\left(\mu_Y, \frac{\sigma_Y^2}{k}\right)$
- $W := \overline{X} - \overline{Y} \implies \mathbb{P}_W = N\left(\mu_X - \mu_Y, \frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{k}\right)$

Le varianze σ_X^2 e σ_Y^2 sono note

- $\mathbb{P}_{\overline{X}} = N\left(\mu_X, \frac{\sigma_X^2}{n}\right)$, $\mathbb{P}_{\overline{Y}} = N\left(\mu_Y, \frac{\sigma_Y^2}{k}\right)$
- $W := \overline{X} - \overline{Y} \implies \mathbb{P}_W = N\left(\mu_X - \mu_Y, \frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{k}\right)$
- H_0 vera $\iff \mathbb{P}_W = N\left(d, \frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{k}\right)$

Le varianze σ_X^2 e σ_Y^2 sono note

- $\mathbb{P}_{\overline{X}} = N\left(\mu_X, \frac{\sigma_X^2}{n}\right)$, $\mathbb{P}_{\overline{Y}} = N\left(\mu_Y, \frac{\sigma_Y^2}{k}\right)$
- $W := \overline{X} - \overline{Y} \implies \mathbb{P}_W = N\left(\mu_X - \mu_Y, \frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{k}\right)$
- H_0 vera $\iff \mathbb{P}_W = N\left(d, \frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{k}\right)$
- Criterio di accettazione: accetto H_0 iff $|w - d| = |\overline{x} - \overline{y} - d| < \varepsilon$.

Le varianze σ_X^2 e σ_Y^2 sono note

- $\mathbb{P}_{\overline{X}} = N\left(\mu_X, \frac{\sigma_X^2}{n}\right)$, $\mathbb{P}_{\overline{Y}} = N\left(\mu_Y, \frac{\sigma_Y^2}{k}\right)$
- $W := \overline{X} - \overline{Y} \implies \mathbb{P}_W = N\left(\mu_X - \mu_Y, \frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{k}\right)$
- H_0 vera $\iff \mathbb{P}_W = N\left(d, \frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{k}\right)$
- Criterio di accettazione: accetto H_0 iff $|w - d| = |\overline{x} - \overline{y} - d| < \varepsilon$.
- Livello di significatività:

$$
\begin{aligned}
\alpha &= \mathbb{P}\left(|W - d| \geqslant \varepsilon | \mu_X - \mu_Y = d\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\frac{|W - d|}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{k}}} \geqslant \frac{\varepsilon}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{k}}} | \mu_X - \mu_Y = d\right)
\end{aligned}
$$

- $Z := \dfrac{W - d}{\sqrt{\dfrac{\sigma_X^2}{n} + \dfrac{\sigma_Y^2}{k}}}$

- $Z := \dfrac{W - d}{\sqrt{\dfrac{\sigma_X^2}{n} + \dfrac{\sigma_Y^2}{k}}}$
- H_0 vera, $\implies \mathbb{P}_Z = N\left(0, 1\right)$

- $Z := \dfrac{W-d}{\sqrt{\dfrac{\sigma_X^2}{n} + \dfrac{\sigma_Y^2}{k}}}$
- H_0 vera, $\implies \mathbb{P}_Z = N(0,1)$
- Livello di significatività α se $\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{\dfrac{\sigma_X^2}{n} + \dfrac{\sigma_Y^2}{k}}} = z_{1-\frac{\alpha}{2}} \iff$

$$\varepsilon = z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{k}}$$

Criterio di accettazione

Accetto l'ipotesi H_0 se e solo se

$$|\overline{x} - \overline{y} - d| < z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{k}}$$

Remark

Se $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = \sigma_0^2$ *e* $k = n$, *allora* $\varepsilon = z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sigma_0 \sqrt{\frac{2}{n}}$.

Le varianze σ_X^2 e σ_Y^2 sono ignote ma si possono ritenere uguali

$\sigma^2 :=$ il comune valore di σ_X^2 e σ_Y^2.

- $S_X^2 = \dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2, \qquad S_Y^2 = \dfrac{1}{k-1}\displaystyle\sum_{j=1}^{k}(Y_j - \overline{Y})^2$

Le varianze σ_X^2 e σ_Y^2 sono ignote ma si possono ritenere uguali

σ^2 := il comune valore di σ_X^2 e σ_Y^2.

- $S_X^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2, \qquad S_Y^2 = \dfrac{1}{k-1}\sum_{j=1}^{k}(Y_j - \overline{Y})^2$
- $V_X := \dfrac{(n-1)S_X^2}{\sigma^2}, \; V_Y := \dfrac{(k-1)S_Y^2}{\sigma^2}$

Le varianze σ_X^2 e σ_Y^2 sono ignote ma si possono ritenere uguali

$\sigma^2 :=$ il comune valore di σ_X^2 e σ_Y^2.

- $S_X^2 = \dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2, \qquad S_Y^2 = \dfrac{1}{k-1}\displaystyle\sum_{j=1}^{k}(Y_j - \overline{Y})^2$
- $V_X := \dfrac{(n-1)S_X^2}{\sigma^2}$, $V_Y := \dfrac{(k-1)S_Y^2}{\sigma^2}$
- $\mathbb{P}_{V_X} = \chi^2_{n-1}, \quad \mathbb{P}_{V_Y} = \chi^2_{k-1}$, V_X e V_Y sono idipendenti

Le varianze σ_X^2 e σ_Y^2 sono ignote ma si possono ritenere uguali

σ^2 := il comune valore di σ_X^2 e σ_Y^2.

- $S_X^2 = \dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2, \qquad S_Y^2 = \dfrac{1}{k-1}\displaystyle\sum_{j=1}^{k}(Y_j - \overline{Y})^2$
- $V_X := \dfrac{(n-1)S_X^2}{\sigma^2}$, $V_Y := \dfrac{(k-1)S_Y^2}{\sigma^2}$
- $\mathbb{P}_{V_X} = \chi^2_{n-1}, \quad \mathbb{P}_{V_Y} = \chi^2_{k-1}$, V_X e V_Y sono idipendenti
- $\mathbb{P}_{V_X+V_Y} = \chi^2_{n-1+k-1} = \chi^2_{n+k-2}$

Le varianze σ_X^2 e σ_Y^2 sono ignote ma si possono ritenere uguali

σ^2 := il comune valore di σ_X^2 e σ_Y^2.

- $S_X^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2, \qquad S_Y^2 = \frac{1}{k-1}\sum_{j=1}^{k}(Y_j - \overline{Y})^2$
- $V_X := \frac{(n-1)S_X^2}{\sigma^2}$, $V_Y := \frac{(k-1)S_Y^2}{\sigma^2}$
- $\mathbb{P}_{V_X} = \chi^2_{n-1}, \quad \mathbb{P}_{V_Y} = \chi^2_{k-1}$, V_X e V_Y sono idipendenti
- $\mathbb{P}_{V_X+V_Y} = \chi^2_{n-1+k-1} = \chi^2_{n+k-2}$
- $V_X + V_Y = \frac{(n-1)S_X^2 + (k-1)S_Y^2}{\sigma^2} =$
  $\frac{n+k-2}{\sigma^2}\,\frac{(n-1)S_X^2 + (k-1)S_Y^2}{n+k-2}$

- $\overline{S}^2 := \dfrac{(n-1)S_X^2 + (k-1)S_Y^2}{n+k-2}$

- $\overline{S}^2 := \dfrac{(n-1)S_X^2 + (k-1)S_Y^2}{n+k-2}$
- $\implies V_X + V_Y = \dfrac{(n+k-2)\overline{S}^2}{\sigma^2}$

- $\overline{S}^2 := \dfrac{(n-1)S_X^2 + (k-1)S_Y^2}{n+k-2}$
- $\implies V_X + V_Y = \dfrac{(n+k-2)\overline{S}^2}{\sigma^2}$
- $\mathbb{P}_{\overline{X}-\overline{Y}} = N\left(\mu_X - \mu_Y, \sigma^2\left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{k}\right)\right)$

- $\overline{S}^2 := \dfrac{(n-1)S_X^2 + (k-1)S_Y^2}{n+k-2}$
- $\implies V_X + V_Y = \dfrac{(n+k-2)\overline{S}^2}{\sigma^2}$
- $\mathbb{P}_{\overline{X}-\overline{Y}} = N\left(\mu_X - \mu_Y, \sigma^2\left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{k}\right)\right)$
- $Z := \dfrac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_X - \mu_Y)}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{k}}}, \implies \mathbb{P}_Z = N(0,1)$

- $\overline{S}^2 := \dfrac{(n-1)S_X^2 + (k-1)S_Y^2}{n+k-2}$
- $\implies V_X + V_Y = \dfrac{(n+k-2)\overline{S}^2}{\sigma^2}$
- $\mathbb{P}_{\overline{X}-\overline{Y}} = N\left(\mu_X - \mu_Y, \sigma^2\left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{k}\right)\right)$
- $Z := \dfrac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_X - \mu_Y)}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{k}}}, \implies \mathbb{P}_Z = N(0,1)$
- $T := \dfrac{\overline{X} - \overline{Y} - d}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{k}}} \dfrac{\sqrt{n+k-2}}{\sqrt{V_X + V_Y}} =$
  $\dfrac{\overline{X} - \overline{Y} - d}{\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{k}}} \dfrac{\sqrt{n+k-2}}{\sqrt{(n-1)S_X^2 + (k-1)S_Y^2}}.$

- $\overline{X}$, S_X^2, $\overline{Y}$ e S_Y^2 sono indipendenti

- $\overline{X}$, S_X^2, $\overline{Y}$ e S_Y^2 sono indipendenti
- $\overline{X} - \overline{Y}$ e $V_X + V_Y$ sono indipendenti

- $\overline{X}$, S_X^2, $\overline{Y}$ e S_Y^2 sono indipendenti
- $\overline{X} - \overline{Y}$ e $V_X + V_Y$ sono indipendenti
- $\mu_X - \mu_Y = d$ se e solo se e $\mathbb{E}\left[T\right] = 0$

- $\overline{X}$, S_X^2, $\overline{Y}$ e S_Y^2 sono indipendenti
- $\overline{X} - \overline{Y}$ e $V_X + V_Y$ sono indipendenti
- $\mu_X - \mu_Y = d$ se e solo se e $\mathbb{E}[T] = 0$
  Dim: Per l'indipendenza abbiamo

$$\mathbb{E}[T] = \frac{\mathbb{E}\left[\overline{X} - \overline{Y} - d\right]}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{k}}}\sqrt{n+k-2}\,\mathbb{E}\left[\frac{1}{\sqrt{V_X + V_Y}}\right] = 0$$

se e solo se $\mathbb{E}\left[\overline{X} - \overline{Y} - d\right] = 0$

- $\overline{X}$, S_X^2, $\overline{Y}$ e S_Y^2 sono indipendenti
- $\overline{X} - \overline{Y}$ e $V_X + V_Y$ sono indipendenti
- $\mu_X - \mu_Y = d$ se e solo se e $\mathbb{E}\left[T\right] = 0$
  Dim: Per l'indipendenza abbiamo

$$\mathbb{E}\left[T\right] = \frac{\mathbb{E}\left[\overline{X} - \overline{Y} - d\right]}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{k}}}\sqrt{n+k-2}\,\mathbb{E}\left[\frac{1}{\sqrt{V_X + V_Y}}\right] = 0$$

  se e solo se $\mathbb{E}\left[\overline{X} - \overline{Y} - d\right] = 0$
- Criterio di accettazione: accetto H_0 se e solo se $|t| < \varepsilon$

- Livello di significatività: H_0 vera $\implies \mathbb{P}_T = t(n+k-2)$

- Livello di significatività: H_0 vera $\implies \mathbb{P}_T = t(n+k-2)$
- $\alpha = \mathbb{P}\left(|T| \geqslant \varepsilon\right) \iff \varepsilon = t_{n+k-2,1-\frac{\alpha}{2}}$

- Livello di significatività: H_0 vera $\Longrightarrow \mathbb{P}_T = t(n+k-2)$
- $\alpha = \mathbb{P}\left(|T| \geqslant \varepsilon\right) \iff \varepsilon = t_{n+k-2,1-\frac{\alpha}{2}}$

Criterio di accettazione

$x: x_1, \ldots, x_n$ e $y: y_1, \ldots, y_k$ dati, $\overline{x}$ e $\overline{y}$ le rispettive medie, s_x^2 e s_y^2 le rispettive varianze:

accetto H_0 se e solo se

$$\frac{|\overline{x}-\overline{y}-d|}{\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{k}}} \frac{\sqrt{n+k-2}}{\sqrt{(n-1)s_X^2+(k-1)s_Y^2}} < t_{n+k-2,1-\frac{\alpha}{2}}$$

Distribuzione di Fisher-Snedecor a k e n gradi di libertà

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma\left(\dfrac{k+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{k}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)} \left(\dfrac{k}{n}\right)^{\frac{k}{2}} \dfrac{x^{\frac{k}{2}-1}}{\left(1+\dfrac{kx}{n}\right)^{\frac{k+n}{2}}} & x > 0, \\ 0 & x \leqslant 0. \end{cases}$$

è una densità di probabilità.
La distribuzione assolutamente continua ad essa associata si dice **distribuzione di Fisher(-Snedecor) a k ed n gradi di libertà**

F variabile aleatoria con questa distribuzione,

$$\mathbb{E}[F] = \begin{cases} \frac{n}{n-2} & n > 2, \\ +\infty & n = 1, 2, \end{cases} \qquad \mathrm{Var}[F] = \begin{cases} \frac{2n^2(k+n-2)}{k(n-2)^2(n-4)} & n > 4, \\ +\infty & n = 3, 4, \\ \text{non esiste} & n = 1, 2. \end{cases}$$

Theorem

Siano U e V v.a. indipendenti con distribuzioni $\mathbb{P}_U = \chi^2_k$, $\mathbb{P}_V = \chi^2_n$. Allora la v.a. $F := \dfrac{U/k}{V/n}$ segue la distribuzione di Fisher-Snedecor con k ed n gradi di libertà.

Quantili

$f_{k,n,\alpha} :=$ quantile di livello α associato alla distribuzione di Fisher di parametri k ed n.
U e V v.a. indipendenti con $\mathbb{P}_U = \chi^2_k$, $\mathbb{P}_V = \chi^2_n$
$\alpha \in (0, 1)$

$$\alpha = \mathbb{P}\left(\frac{U/k}{V/n} \leqslant f_{k,n,\alpha}\right) = \mathbb{P}\left(\left(\frac{U/k}{V/n}\right)^{-1} \geqslant \frac{1}{f_{k,n,\alpha}}\right)$$
$$= \mathbb{P}\left(\frac{V/n}{U/k} \geqslant \frac{1}{f_{k,n,\alpha}}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\frac{V/n}{U/k} \leqslant \frac{1}{f_{k,n,\alpha}}\right)$$

ovvero $\mathbb{P}\left(\frac{V/n}{U/k} \leqslant \frac{1}{f_{k,n,\alpha}}\right) = 1 - \alpha$ cioè $\frac{1}{f_{k,n,\alpha}} = f_{n,k,1-\alpha}$

Test d'ipotesi per l'uguaglianza delle varianze di campioni gaussiani

Due campioni gaussiani e tra di loro indipendenti

$$
\begin{aligned}
&X\colon X_1, \ldots, X_k \qquad \mathbb{P}_{X_i} = N\left(\mu_X, \sigma_X^2\right), \\
&Y\colon Y_1, \ldots, Y_n \qquad \mathbb{P}_{Y_j} = N\left(\mu_Y, \sigma_Y^2\right).
\end{aligned}
$$

Test d'ipotesi per l'uguaglianza delle varianze di campioni gaussiani

Due campioni gaussiani e tra di loro indipendenti

$$
\begin{aligned}
X: X_1, \dots, X_k \qquad & \mathbb{P}_{X_i} = N\left(\mu_X, \sigma_X^2\right), \\
Y: Y_1, \dots, Y_n \qquad & \mathbb{P}_{Y_j} = N\left(\mu_Y, \sigma_Y^2\right).
\end{aligned}
$$

- $H_0: \qquad \sigma_X^2 = \sigma_Y^2 \qquad\qquad H_A: \qquad \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$

Test d'ipotesi per l'uguaglianza delle varianze di campioni gaussiani

Due campioni gaussiani e tra di loro indipendenti

$$X\colon X_1, \ldots, X_k \qquad \mathbb{P}_{X_i} = N\left(\mu_X, \sigma_X^2\right),$$
$$Y\colon Y_1, \ldots, Y_n \qquad \mathbb{P}_{Y_j} = N\left(\mu_Y, \sigma_Y^2\right).$$

- $H_0: \qquad \sigma_X^2 = \sigma_Y^2 \qquad\qquad H_A: \qquad \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$
- $\mathbb{E}\left[S_X^2\right] = \sigma_X^2 \quad \mathbb{E}\left[S_Y^2\right] = \sigma_Y^2$

Test d'ipotesi per l'uguaglianza delle varianze di campioni gaussiani

Due campioni gaussiani e tra di loro indipendenti

$$X\colon X_1, \ldots, X_k \qquad \mathbb{P}_{X_i} = N\left(\mu_X, \sigma_X^2\right),$$
$$Y\colon Y_1, \ldots, Y_n \qquad \mathbb{P}_{Y_j} = N\left(\mu_Y, \sigma_Y^2\right).$$

- $H_0: \qquad \sigma_X^2 = \sigma_Y^2 \qquad\qquad H_A: \qquad \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$
- $\mathbb{E}\left[S_X^2\right] = \sigma_X^2 \quad \mathbb{E}\left[S_Y^2\right] = \sigma_Y^2$
- Criterio di accettazione: accetto H_0 se e solo se $1 - \varepsilon_1 < \dfrac{s_X^2}{s_Y^2} < 1 + \varepsilon_2$

Test d'ipotesi per l'uguaglianza delle varianze di campioni gaussiani

Due campioni gaussiani e tra di loro indipendenti

$$X:\ X_1,\ \dots,\ X_k \qquad \mathbb{P}_{X_i} = N\left(\mu_X, \sigma_X^2\right),$$
$$Y:\ Y_1,\ \dots,\ Y_n \qquad \mathbb{P}_{Y_j} = N\left(\mu_Y, \sigma_Y^2\right).$$

- $H_0: \quad \sigma_X^2 = \sigma_Y^2 \qquad H_A: \quad \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$
- $\mathbb{E}\left[S_X^2\right] = \sigma_X^2 \quad \mathbb{E}\left[S_Y^2\right] = \sigma_Y^2$
- Criterio di accettazione: accetto H_0 se e solo se $1 - \varepsilon_1 < \dfrac{s_X^2}{s_Y^2} < 1 + \varepsilon_2$
- Livello di significatività:

$$V_X = \frac{(k-1)S_X^2}{\sigma_X^2} \quad \mathbb{P}_{V_X} = \chi^2_{k-1} \qquad V_Y = \frac{(n-1)S_Y^2}{\sigma_Y^2} \quad \mathbb{P}_{V_Y} = \chi^2_{n-1}$$

- $\dfrac{S_X^2/\sigma_X^2}{S_Y^2/\sigma_Y^2}$ ha distribuzione di Fisher con $k-1$ ed $n-1$ gradi di libertà

- $\dfrac{S_X^2/\sigma_X^2}{S_Y^2/\sigma_Y^2}$ ha distribuzione di Fisher con $k-1$ ed $n-1$ gradi di libertà
- $\implies H_0$ vera $\iff F := \dfrac{S_X^2}{S_Y^2}$ ha distribuzione di Fisher con $k-1$ ed $n-1$ gradi di libertà.

- $\dfrac{S_X^2/\sigma_X^2}{S_Y^2/\sigma_Y^2}$ ha distribuzione di Fisher con $k-1$ ed $n-1$ gradi di libertà
- $\implies H_0$ vera $\iff F := \dfrac{S_X^2}{S_Y^2}$ ha distribuzione di Fisher con $k-1$ ed $n-1$ gradi di libertà.
- $\alpha = \mathbb{P}\left(\dfrac{S_X^2}{S_Y^2} \leqslant 1-\varepsilon_1 | \sigma_X^2 = \sigma_Y^2\right) + \mathbb{P}\left(\dfrac{S_X^2}{S_Y^2} \geqslant 1+\varepsilon_2 | \sigma_X^2 = \sigma_Y^2\right)$.

- $\dfrac{S_X^2/\sigma_X^2}{S_Y^2/\sigma_Y^2}$ ha distribuzione di Fisher con $k-1$ ed $n-1$ gradi di libertà
- $\implies H_0$ vera $\iff F := \dfrac{S_X^2}{S_Y^2}$ ha distribuzione di Fisher con $k-1$ ed $n-1$ gradi di libertà.
- $\alpha = \mathbb{P}\left(\dfrac{S_X^2}{S_Y^2} \leqslant 1-\varepsilon_1 | \sigma_X^2 = \sigma_Y^2\right) + \mathbb{P}\left(\dfrac{S_X^2}{S_Y^2} \geqslant 1+\varepsilon_2 | \sigma_X^2 = \sigma_Y^2\right)$.
- Scegliamo di *distribuire equamente l'errore* imponendo

$$\frac{\alpha}{2} = \mathbb{P}\left(\frac{S_X^2}{S_Y^2} \leqslant 1-\varepsilon_1 | \sigma_X^2 = \sigma_Y^2\right) = \mathbb{P}\left(F \leqslant 1-\varepsilon_1\right)$$

$$\frac{\alpha}{2} = \mathbb{P}\left(\frac{S_X^2}{S_Y^2} \geqslant 1+\varepsilon_2 | \sigma_X^2 = \sigma_Y^2\right) = \mathbb{P}\left(F \geqslant 1+\varepsilon_2\right)$$

$$= 1 - \mathbb{P}\left(F \leqslant 1+\varepsilon_2\right).$$

$$\iff 1-\varepsilon_1 = f_{k-1,n-1,\frac{\alpha}{2}},\ 1+\varepsilon_2 = f_{k-1,n-1,1-\frac{\alpha}{2}}$$

Criterio di accettazione

Accetto H_0 se e solo se

$$f_{k-1,n-1,\frac{\alpha}{2}} < \frac{s_X^2}{s_Y^2} < f_{k-1,n-1,1-\frac{\alpha}{2}}$$