Note Title 11/04/2019

$Q \in M_{N\times N}(\mathbb{R}) \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} Q^k \in M_{N\times N}(\mathbb{R}) \quad \forall t \in \mathbb{R}$

$$e^{tQ} = \exp(tQ) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} Q^k \in M_{N\times N}(\mathbb{R})$$

$$t \in \mathbb{R} \mapsto e^{tQ} \in M_{N\times N}(\mathbb{R})$$

$Q_1, Q_2 \in M_{N\times N}(\mathbb{R})$ t.c. $Q_1 \cdot Q_2 = Q_2 \cdot Q_1$, allora

$$e^{t(Q_1+Q_2)} = e^{tQ_1} \cdot e^{tQ_2}$$

$Q_1 = Q_2 = Q \qquad e^{2tQ} = \left(e^{tQ}\right)^2$ e, per induzione

$$e^{ntQ} = \left(e^{tQ}\right)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$P : t \in \mathbb{R} \mapsto \exp(tQ) \in M_{N\times N}(\mathbb{R})$$

$$P(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} Q^k$$

$\forall t \in \mathbb{R}$

$$\dot{P}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dt}\left(\frac{t^k}{k!} Q^k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\,t^{k-1}}{k!} Q^k =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} Q \cdot Q^{k-1} \underset{l=k-1}{=} Q \sum_{l=0}^{\infty} \frac{t^l}{l!} Q^l = Q P(t)$$

$\Rightarrow t \in \mathbb{R} \mapsto \exp(tQ) \in M_{N\times N}(\mathbb{R})$ risolve l'eq differenziale

$$\dot{P}(t) = Q P(t)$$

$\Rightarrow$ $t \in \mathbb{R} \mapsto \exp(tQ) \in M_{N\times N}(\mathbb{R})$ risolve il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{P}(t) = QP(t) & \forall t \in \mathbb{R} \\ P(0) = Id \end{cases}$$

E' un pb di Cauchy associato ad una EDO lineare omogenea a coefficienti costanti $\Rightarrow$ ammette $\exists!$ soluzione definita su tutto $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ la matrice esponenziale e^{Qt} e' l'unica soluzione di questo pb di Cauchy.

— o —

Riprendo le eq di Chapman-Kolmogorov che sono soddisfatte dalle matrici di transizione delle catene di Markov a tempo continuo

$0 \leq s \leq z \leq t$
$$P(s,t) = P(s,z)P(z,t)$$
$$P(s,s) = Id$$

Nel caso omogeneo $P(s,t) = P(0, t-s)$ $\forall 0 \leq s \leq t$

Nelle eq di Chapman-Kolmogorov scelgo $s=0$

$$P(t) = P(0,t) = P(0,z)P(z,t) = P(z)P(0,t-z)$$
$$= P(z)P(t-z)$$

$P(t) = P(z)P(s)$ $\quad s = t-z$

$P(s+z) = P(z)P(s)$

$\shortparallel$

$P(z+s) = P(s)P(z)$

— o —

$$P(t+s) = P(s)P(t) \qquad \forall s,t \geq 0$$

Nel caso finito dimensionale si dimostra che da queste relazioni segue che la funzione

$$P : t \in [0,+\infty) \longmapsto P(t) \in M_{N\times N}(\mathbb{R})$$

è derivabile.

$$\frac{d}{ds} P(t+s)\Big|_{s=0} = \frac{d}{ds}\Big(P(s)P(t)\Big)\Big|_{s=0}$$

$$\Big(\dot{P}(t+s)\underbrace{\frac{d}{ds}(t+s)}_{1}\Big)\Big|_{s=0} = \Big(\dot{P}(s)P(t)\Big)\Big|_{s=0}$$

$$\dot{P}(t) = \dot{P}(0^+)P(t)$$

$$\dot{P}(0^+) := \lim_{s\to 0^+} \frac{P(s)-P(0)}{s} = \lim_{s\to 0^+} \frac{P(s)-Id}{s}$$

$$Q := \dot{P}(0^+) \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \dot{P}(t) = Q\,P(t) \\ P(0) = Id \end{cases}$$

Quindi la matrice di Transizione $P(t)$ risolve lo stesso pb di Cauchy che è risolto da e^{Qt}

Per l'unicità della soluzione ho

$$P(t) = e^{Qt} \quad \text{con } Q := \dot{P}(0^+)$$

La matrice Q è detta generatore infinitesimale del semigruppo $(P(t))_{t\geq 0}$ o matrice delle intensità di transizione della catena $(X_t)_{t\geq 0}$.

— o —

$Q \in M_{N\times N}(\mathbb{R})$ si dice una Q-matrice se:

$Q^i_j \geq 0 \quad \forall i,j=1 \_ N \quad i\neq j$

$\rightarrow \sum_{j=1}^{N} Q^i_j = 0 \quad \forall i = 1 \_ N$

N.B. $Q^i_i + \sum_{j\neq i} Q^i_j = 0 \qquad Q^i_i = -\sum_{j\neq i} Q^i_j \leq 0$

Sia $\alpha > \max\{|Q^i_j| : i,j=1 \_ N\} = \Theta$

$-Q^i_i = |Q^i_i| = |\sum_{j\neq i} Q_{ij}| = \sum_{j\neq i} Q_{ij}$

$\Theta = \max_i \{-Q^i_i : i=1 \_ N\}$

$R = R(\alpha) = Id + \frac{1}{\alpha}Q$

$$R^i_j = \begin{cases} \frac{1}{\alpha}Q^i_j \geq 0 & j\neq i \\ 1+\frac{1}{\alpha}Q^i_i \geq 0 & j=i \end{cases}$$

$-Q_{ii} \leq \alpha$

$\frac{Q_{ii}}{\alpha} \geq -1$

$$\sum_{j=1}^{N} R^i_j = R^i_i + \sum_{j\neq i} R^i_j = 1 + \frac{1}{\alpha}Q^i_i + \frac{1}{\alpha}\sum_{j\neq i} Q^i_j$$

$$= 1 + \frac{1}{\alpha}\left(Q^i_i + \sum_{j\neq i} Q^i_j\right) = 1 + \frac{1}{\alpha}\underbrace{\sum_{j=1}^{N} Q^i_j}_{=0} = 1$$

$$R = Id + \frac{1}{\lambda} Q \iff Q = \lambda (R - Id)$$

$$P(t) = e^{Qt} = e^{\lambda t (R - Id)} = e^{\lambda t R} \cdot e^{-\lambda t Id} \quad (*)$$

$$e^{-\lambda t Id} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda t)^k Id^k}{k!} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda t)^k}{k!} \right) Id = e^{-\lambda t} Id$$

$(*)$ $$P(t) = e^{\lambda t R} \cdot e^{-\lambda t} \cdot Id = e^{-\lambda t} \cdot e^{\lambda t R}$$

$$P(t) = e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k t^k}{k!} R^k$$

— o —

PROPOSIZIONE Sia $Q \in M_{N \times N}(\mathbb{R})$ e sia $P(t) = e^{Qt}$.
Allora $P(t)$ è una matrice stocastica $\forall t \geq 0$ SSE Q è una Q-matrice

Conseguenza: la matrice delle intensità di una catena di Markov omogenea è una Q-matrice.

DIM 1) Supponiamo e^{Qt} sia stocastica $\forall t \geq 0$
$P(t) := e^{Qt}$ è la soluzione del pb di Cauchy
$$\begin{cases} \dot{P}(t) = Q P(t) \\ P(0) = Id \end{cases}$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{P(t) - Id}{t} = \dot{P}(0) = Q P(0) = Q \cdot Id = Q$$

Valuto questa uguaglianza elemento per elemento

$i \neq j$

$$Q^i_j = \lim_{t \to 0} \frac{P(t)^i_j - 0}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{P(t)^i_j}{t} \quad \begin{matrix} \geq 0 \ \forall t \\ \geq 0 \end{matrix}$$

$$\sum_{j=1}^{N} Q^i_j = \sum_{j=1}^{N} \lim_{t \to 0} \frac{P(t)^i_j - Id^i_j}{t} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \sum_{j=1}^{N} \left(P(t)^i_j - Id^i_j \right) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left| 1 - 1 \right)$$

$$= \lim_{t \to 0} 0 = 0$$

2) Q è una Q-matrice $\Rightarrow e^{Qt}$ è stocastica $\forall t > 0$

$$\alpha \geq \max \{ |Q^i_j| : i, j = 1 \ldots N \}$$

$R = Id + \frac{1}{\alpha} Q$ so che è stocastica e che

$$e^{Qt} = e^{-\alpha t} e^{\alpha t R}$$

$$\left(e^{Qt}\right)^i_j = e^{-\alpha t} \left(e^{\alpha t R}\right)^i_j = e^{-\alpha t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k t^k}{k!} (R^k)^i_j$$

R stocastica $\Rightarrow R^k$ stocastica $\forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$\forall i, j = 1 \ldots N \quad (R^k)^i_j \geq 0 \Rightarrow (e^{Qt})^i_j \geq 0$

$$\sum_{j=1}^{N} \left(e^{Qt}\right)^i_j = e^{-\alpha t} \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k t^k}{k!} (R^k)^i_j =$$

$$= e^{-\alpha t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k t^k}{k!} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{N} (R^k)^i_j \right)}_{1} = e^{-\alpha t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha t)^k}{k!} =$$

$$= e^{-\alpha t} \cdot e^{\alpha t} = 1$$

Corollario Sia $P(t) = e^{Qt}$ con Q una Q-matrice.
Siano $i,j \in \{1, \dots, N\}$.
Sono fatti equivalenti
1) $\exists\, t_0 > 0$ t.c. $(P(t_0))^i_j > 0$
2) $P(t)^i_j > 0 \quad \forall t > 0$

DIM $2 \Rightarrow 1$ ovvio

$1 \Rightarrow 2$ Supponiamo, per assurdo, che $\exists\, \bar{t} > 0$
t.c. $(P(\bar{t}))^i_j = 0$

$$P(\bar{t}) = e^{\bar{t}Q} = e^{-\lambda\bar{t}} e^{\lambda\bar{t}R}$$

$\lambda \geq \max\{|Q^i_j| \mid i,j = 1 - N\}$
$R := Id + \frac{1}{\lambda}Q$

$$0 = (P(\bar{t}))^i_j = e^{-\lambda\bar{t}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda\bar{t})^k}{k!} (R^k)^i_j$$

$$\Rightarrow (R^k)^i_j = 0 \quad \forall k \geq 1$$

$$P(t_0) = e^{-\lambda t_0} e^{\lambda t_0 R} = e^{-\lambda t_0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t_0)^k}{k!} (R^k)^i_j = 0$$

ASSURDO

LEMMA Sia Q una Q-matrice $N \times N$ e sia
$P(t) = e^{Qt}$ e sia $w \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)^*$ vettore stocastico
Allora:
1) Se $\exists\, t_0 > 0$ t.c. w è l'unico pto fisso di
$P(t_0): x \in \mathcal{D} \mapsto x P(t_0) \in \mathcal{D}$, allora $wQ = 0$

2) $wQ = 0$, allora $w = wP(t) \quad \forall t > 0$
$\Longleftrightarrow$

dim 1) Supponiamo $t_0 > 0$ t.c. w è l'unico

punto fisso di $\underline{P}(t_0)$.

$$P(t_0) = \left(P\left(\frac{t_0}{n}\right)\right)^n \quad \text{poiché} \quad P(t_0) = e^{t_0 Q} = e^{\frac{t_0}{n} n Q} =$$

$$= \left(e^{\frac{t_0}{n} Q}\right)^n = \left(P\left(\frac{t_0}{n}\right)\right)^n$$

$$\underline{P}(t_0) = \left(\underline{P}\left(\frac{t_0}{n}\right)\right)^n \quad \text{applicazione iterata } n \text{ volte}$$

$\Rightarrow$ w è anche l'unico punto fisso di $\underline{P}\left(\frac{t_0}{n}\right)$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad w = w P\left(\frac{t_0}{n}\right) = w e^{\frac{t_0}{n} Q} =$$

$$= w \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t_0^k}{n^k k!} Q^k = w \left(Id + \frac{t_0}{n} Q + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{t_0^k}{n^k k!} Q^k \right)$$

$$= w + \frac{t_0}{n} w Q + \frac{1}{n^2} w \underbrace{\sum_{k=2}^{\infty} \frac{t_0^k}{n^{k-2} k!} Q^k}_{A(n) \in M_{N \times N}(\mathbb{R})}$$

Considero la serie delle norme

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{t_0^k}{n^{k-2} k!} \|Q\|^k$$

$$\frac{t_0^k}{n^{k-2} k!} \|Q^k\| \leq \frac{t_0^k}{1 \cdot k!} \|Q\|^k$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{t_0^k}{k!} \|Q\|^k \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t_0^k}{k!} \|Q\|^k = e^{t_0 \|Q\|}$$

$$\|A(n)\| \leq e^{t_0 \|Q\|} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\cancel{w} = \cancel{w} + \frac{t_0}{n} w Q + \frac{1}{n^2} w A(n)$$

$$t_0 w Q + \frac{1}{n} w A(n) = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Passo a limite per $n \to \infty$ $\quad \frac{\|A(n)\|}{n} \leq \frac{e^{t_0\|Q\|}}{n} \to 0$

$$\Rightarrow t_0 w Q = 0$$. Divido per $t_0 > 0 \Rightarrow wQ = 0$

2) Se $wQ = 0$, allora $w = wP(t) \quad \forall t > 0$

$$P(t) = e^{Qt} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} Q^k = Id + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} Q \cdot Q^{k-1}$$

$$wP(t) = w\, Id + \underbrace{wQ}_{=0} \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} Q^{k-1}}_{\text{converge}} = w$$

2 bis) $\underline{w = wP(t)}\ \forall t \geq 0 \Rightarrow wQ = 0$

$$w = we^{Qt} = w \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} Q^k =$$

$t^k = t^2 \cdot t^{k-2}$

$$= w\left(Id + tQ + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{t^k}{k!} Q^k\right) =$$

$$= w + t\, wQ + t^2 w \underbrace{\sum_{k=2}^{\infty} \frac{t^{k-2}}{k!} Q^k}_{A(t)}$$

Per $t \in (0, 1]$ $\quad \sum_{k=2}^{\infty} \frac{t^{k-2}}{k!} \|Q^k\|$ $\qquad \|A(t)\| \leq e^{\|Q\|} \quad \forall t \in (0,1]$

$$\frac{t^{k-2}}{k!} \|Q^k\| \leq \frac{1}{k!} \|Q\|^k$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} \|Q\|^k \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \|Q\|^k = e^{\|Q\|}$$

$\cancel{w} = \cancel{w} + t w Q + t^2 w A(t)$

Divido per $t \in (0, 1]$

$$0 = wQ + t w A(t)$$

Passo a limite per $t \to 0^+$ $\| t w A(t) \| \le t \|w\| e^{\|Q\|} \to 0$

$\Rightarrow wQ = 0$

— o —

TEOREMA

Per $t > 0$ sia $P(t) = e^{Qt}$ matrice stocastica $\forall t > 0$

Sono fatti equivalenti

1) $\exists t_0 > 0$ t.c. $P(t_0)$ è irriducibile

2) $\exists w \in \mathcal{J}$ t.c. $\lim_{t \to +\infty} x P(t) = w \quad \forall x \in \mathcal{J}$

In tal caso

1) w è l'unica soluzione di $wQ = 0$

2) le componenti di w sono tutte positive

3) $\exists C < 1$ t.c.

$$\| x P(t) - w \|_1 \le 2 C^{\lfloor t \rfloor} \quad \forall x \in \mathcal{J} \quad \forall t > 0$$

dim $1 \Rightarrow 2$

$\exists t_0 > 0$ t.c. $P(t_0)$ è irriducibile

$\forall i, j \in \{1 — N\}$ $\exists n = n(i,j)$ t.c. $\left(P^n(t_0)\right)^i_j > 0$

$$\left(P(t_0)\right)^n = \left(e^{t_0 Q}\right)^n = e^{n t_0 Q} = P(n t_0)$$

$\Rightarrow \left(P(t)\right)^i_j > 0 \quad \forall t > 0$

i e j arbitrari $\Rightarrow$ $\forall t > 0$ le matrice $P(t)$

ha tutti gli elementi positivi.

$\Rightarrow \forall t>0$ l'applicazione $\underline{P}(t): x \in \mathcal{J} \to xP \in \mathcal{J}$

è una contrazione

$\Rightarrow \forall t>0 \ \exists! \ w(t) \in \mathcal{J}$ punto e pto fisso di $\underline{P}(t)$.

Sia $C(t)$ il fattore di contrazione di $\underline{P}(t)$:

$$\| x P^k(t) - w(t) \| \leq 2 C^k(t)$$

Sia $s>0$ $s \neq t$, anche $\underline{P}(s)$ ammette $1!$ punto $w(s)$ che è anche l'unico pto fisso di $\underline{P}(s)$

$\Rightarrow w(s)Q = 0 \Rightarrow w(s)$ è anche pto fisso di $\underline{P}(t)$

$$\Rightarrow \underline{w(s) = w(t)} \qquad \| w(s) - w(t) \| \leq 2 C^k(t) \quad \forall k$$

$\forall s,t > 0$ $\qquad \downarrow k \to \infty$

0

$\Rightarrow \exists! \ w \in \mathcal{J}$ t.c. w è pto fisso per tutte le $\underline{P}(t)$

So che $\quad C(t) = \frac{1}{2} \max \{ \| R^i(t) - R^j(t) \|_1 \quad i,j = 1 \ldots N \}$

dove $R^1(t) \ldots R^N(t)$ sono le righe di $P(t)$

$C(t)$ è una funzione continua e $C(t) < 1 \quad \forall t>0$

In particolare $C(t)$ è continua e $C(t) < 1 \quad \forall t \in [1,2]$

$$\Rightarrow C := \max \{ C(t) : t \in [1,2] \} < \underline{1}$$

$\forall t \in [1,2) \quad \forall x \in \mathcal{J} \qquad \| x P^k(t) - w \| \leq 2\, C^k(t) \leq 2\, C^k$

Sia $s \geq 1$ $\qquad \dfrac{s}{\lfloor s \rfloor} \geq 1 \qquad \dfrac{s}{\lfloor s \rfloor} \leq 2$

So che $s \leq 1 + \lfloor s \rfloor$

Ma $s \geq 1 \Rightarrow \lfloor s \rfloor \geq 1 \qquad \Rightarrow 1 + \lfloor s \rfloor \leq 2 \lfloor s \rfloor$

$\Rightarrow \quad s \leq 1 + \lfloor s \rfloor \leq 2 \lfloor s \rfloor \quad \Rightarrow \quad \dfrac{s}{\lfloor s \rfloor} \leq 2$

$t := \dfrac{s}{\lfloor s \rfloor} \in [1,2)$

$P(s) = P(\lfloor s \rfloor t) = \left(P(t)\right)^{\lfloor s \rfloor}$

$\| x \underline{P}(s) - w \| = \| x\, P^{\lfloor s \rfloor}(t) - w \| \leq 2\, C^{\lfloor s \rfloor}$

— o —

TEOREMA

Sia Q una Q-matrice $N \times N$ e sia $P(t) = e^{Qt}$

Sia $\alpha \geq \max\{ |Q_j^i| : i,j = 1 \ldots N \}$ e sia $R := Id + \frac{1}{\alpha} Q$

Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato completo –

- Sia $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ catena di Markov a tempo discreto, con spazio degli stati $S = \{1 \ldots N\}$ omogenea e con matrice di transizione R –
- Sia $(N_t)_{t \geq 0}$ processo di Poisson t.c.
  - l'intensità del processo è α
  - le due famiglie $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(N_t)_{t \geq 0}$ sono due famiglie di v.a. indipendenti

$(Y_1 \text{ —— } Y_k)$

$(N_{t_1} \text{ - - - } N_{t_m})$

Pongo $X_t(\omega) := Y_{N_t(\omega)}(\omega)$ $\quad \omega \in \Omega \quad t \geq 0$

Allora il processo stocastico $(X_t)_{t\geq 0}$ è una catena di Markov omogenea a tempo continuo con matrice di transizione e^{Qt}.

DIM

$$\mathbb{P}(X_t = j \mid X_0 = i) = \frac{1}{\mathbb{P}(X_0 = i)} \mathbb{P}(X_t = j, X_0 = i)$$

$$= \frac{1}{\mathbb{P}(Y_0 = i)} \mathbb{P}(X_t = j, Y_0 = i) =$$

$$= \frac{1}{\mathbb{P}(Y_0 = i)} \mathbb{P}(Y_{N_t} = j, Y_0 = i)$$

$$\{Y_{N_t} = j\} = \bigcup_{k=0}^{\infty} \{N_t = k, Y_k = j\}$$

$$\{Y_{N_t} = j, Y_0 = i\} = \bigcup_{k=0}^{\infty} \{N_t = k, Y_k = j, Y_0 = i\}$$

$$= \frac{1}{\mathbb{P}(Y_0 = i)} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(N_t = k, Y_k = j, Y_0 = i) =$$

$$= \frac{1}{\mathbb{P}(Y_0 = i)} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(N_t = k)\, \mathbb{P}(Y_k = j, Y_0 = i) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\mathbb{P}(N_t = k)}_{e^{-\alpha t}\frac{(\alpha t)^k}{k!}} \underbrace{\mathbb{P}(Y_k = j \mid Y_0 = i)}_{(R^k)^i_j} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\alpha t} \frac{(\alpha t)^k}{k!} (R^k)^i_j = e^{-\alpha t} \left(e^{\alpha t R} \right)^i_j =$$

$$= \left(e^{-\alpha t} \cdot e^{\alpha t R} \right)^i_j = \left(e^{Qt} \right)^i_j$$

TEMPI DI SOGGIORNO

Sia $(X_t)_{t\geq 0}$ processo stocastico continuo da destra con spazi degli stati S discreto, su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilistico completo.

Fisso $i \in S$

$$SJ_i(\omega) = \inf\{t > 0 : X_t(\omega) \neq i\}$$

è detto TEMPO DI SOGGIORNO NELLO STATO i

PROP SJ_i è una v.a. e

$$\mathbb{P}(SJ_i > t) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(X_{\frac{jt}{2^n}} = i \quad \forall j = 0, \dots, 2^n \right)$$

DIM (CENNI)

Sia $\mathcal{D}$ denso e numerabile in $[0, +\infty)$

$$S_{\mathcal{D}}(\omega) := \inf\{t \in \mathcal{D} : X_t(\omega) \neq i\}$$

$\exists\, \overline{\Omega} \subseteq \Omega$ $\mathbb{P}(\overline{\Omega}) = 1$ T.c. $S_{\mathcal{D}}(\omega) = SJ_i(\omega)$ $\forall \omega \in \overline{\Omega}$

e $t \mapsto X_t(\omega)$ è continua $\forall \omega \in \overline{\Omega}$
da destra

Si dimostra poi che:

$$\{\omega \in \overline{\Omega} : S_{\mathcal{D}}(\omega) > t\} = \{\omega \in \overline{\Omega} : X_s(\omega) = i \quad \forall s \in \mathcal{D} \quad s \leq t\} \quad (*)$$

$$\mathcal{D} = \left\{ \frac{jt}{2^n} : j, n \in \mathbb{N} \right\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{\left\{ \frac{jt}{2^n} \quad j \in \mathbb{N} \right\}}_{\mathcal{D}_n}$$

$$\mathcal{D}_{n+1} \supseteq \mathcal{D}_n$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \{ \omega \in \overline{\Omega} : X_s(\omega) = i \quad \forall s \in D_n \quad \forall j = 1 \ldots 2^n \}$$

$$\{ \omega \in \overline{\Omega} : X_{\frac{t_j}{2^n}}(\omega) = i \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall j \le 2^n \} =$$

$$= \bigcap_{n=1}^{\infty} \{ \omega \in \overline{\Omega} : X_{\frac{jt}{2^n}}(\omega) = i \quad \forall j \le 2^n \}$$

$$\mathbb{P}\left(\{ \omega \in \overline{\Omega} : X_{\frac{jt}{2^n}}(\omega) = i \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall j \le 2^n \} \right)$$

$$= \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}\left(\{ \omega \in \overline{\Omega} : X_{\frac{t_j}{2^n}}(\omega) = i \quad \forall j \le 2^n \} \right) =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}\left(X_{\frac{jt}{2^n}} = i \quad \forall j \le 2^n \right)$$

——— o ———

PROP Sia $(X_t)_{t \ge 0}$ catena di Markov omogenea con spazio degli stati finito $S = \{1, 2, \ldots N\}$ e matrice di transizione $P(t) = e^{Qt}$. Sia $i \in S$.
Allora il tempo di soggiorno nello stato i, ha distribuzione, condizionata dall'evento $\{X_0 = i\}$ di tipo esponenziale e di parametro $-q_{ii}$

dim $$1 - F_{SJ_i}(t) = \mathbb{P}_i(SJ_i > t) \qquad \mathbb{P}_i(\cdot) = \mathbb{P}(\cdot \mid X_0 = i)$$

$$= \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}\left(X_{\frac{jt}{2^n}} = i \quad \forall j = 0, \ldots 2^n \right) \frac{1}{\mathbb{P}(X_0 = i)} =$$

$$\lim_{n \to \infty} \prod_{j=0}^{2^n - 1} \mathbb{P}\left(X_{\frac{(j+1)t}{2^n}} = i \;\middle|\; X_{\frac{jt}{2^n}} = i \right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \prod_{j=0}^{2^n-1} \mathbb{P}\left(X_{\frac{t}{2^n}} = i \;\middle|\; X_0 = i\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\left(P\left(\frac{t}{2^n}\right) \right)_i^i \right)^{2^n}$$

$$\dot{P}(t) = QP(t) \qquad P(t) = P(0) + t\dot{P}(0) + o(t)$$

$$P(0) = Id \qquad = Id + tQ + o(t) \quad \text{per } t \to 0^+$$

$$P\left(\frac{t}{2^n}\right) = Id + \frac{t}{2^n} Q + o(2^n) \qquad \text{per } n \to \infty$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{t}{2^n} Q_i^i + o(2^n) \right)^{\frac{2^n}{tQ_i^i} tQ_i^i} = e^{tQ_i^i} = e^{-\underbrace{(-Q_i^i)}t}$$

$$\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e \qquad q_{ii} = Q_i^i$$

$$t > 0 \qquad 1 - F_{SJ_i}(t) = e^{-(-q_{ii}t)}$$

$$F_{SJ_i}(t) = 1 - e^{-(-q_{ii}t)}$$