PROCESSI STOCASTICI A TEMPO CONTINUO - MARKOV

$0 \le s \le t$ $\quad P(s,t)$ matrice di transizione da X_s a X_t

$P(s,t) = P(s+h, t+h) \quad \forall\, 0 \le s \le t \quad \forall h \ge 0$

$(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato completo

$(X_t)_{t \ge 0}$ continuo da destra

$\exists\, \Omega' \subset \Omega \quad \mathbb{P}(\Omega') = 1$ t.c. $\forall \omega \in \Omega' \quad \forall t \ge 0$

$\exists\, \delta = \delta(t, \omega) > 0$ t.c. $X_s(\omega) = X_t(\omega) \quad s \in [t, t+\delta)$

PROP Sia $\mathcal{D}$ denso e numerabile in $[0, +\infty)$ e sia $(X_t)_{t \ge 0}$ processo stocastico su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato completo, con insieme degli stati S discreto e continuo da destra. Allora $\forall\, 0 \le a < b$ gli insiemi

$\{\omega \in \Omega : X_t(\omega) = i \ \forall t \in [a,b)\}$ e

$\{\omega \in \Omega : X_t(\omega) = i \ \forall t \in \mathcal{D} \cap [a,b)\}$

differiscono per un evento di misura nulla.

dim So che $\exists\, \Omega' \subset \Omega \quad \mathbb{P}(\Omega') = 1$ t.c.

$t \mapsto X_t(\omega)$ è continua da destra $\forall \omega \in \Omega'$

Sia $s \in [a,b) \quad \exists\, (t_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset [a,b) \cap \mathcal{D}$ t.c.

$t_n \to s^+$

$\exists\, \delta > 0$ t.c. $X_t(\omega) = X_s(\omega) \quad \forall t \in [s, s+\delta)$

$\exists\, \bar{n}$ t.c. $\forall n > \bar{n} \quad t_n \in [s, s+\delta) \Rightarrow \forall n > \bar{n} \quad X_{t_n}(\omega) = X_s(\omega)$

$\{\omega \in \Omega : X_t(\omega) = i \quad \forall t \in [a,b)\} =$

$\{\omega \in \Omega' : X_t(\omega) = i \quad \forall t \in [a,b)\} \cup A \qquad A \subset \Omega \setminus \Omega'$

$\{\omega \in \Omega' : X_t(\omega) = i \quad \forall t \in [a,b) \cap D\} \overset{?}{=}$ $\supseteq$ ovvie $\subseteq$

$\{\omega \in \Omega' : X_t(\omega) = i \quad \forall t \in [a,b)\}$

PROP Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilistico completo.

Sia $(X_t)_{t \geq 0}$ processo stocastico su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ a stati discreti e continuo da destra

Allora $\forall s \geq 0 \quad \lim_{t \to s^+} P(s,t) = Id$

dim So che $\exists \Omega' \subset \Omega \quad \mathbb{P}(\Omega') = 1$ t.c.

$\forall \omega \in \Omega' \qquad t \mapsto X_t(\omega)$ è continua da destra.

Sia $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ successione t.c. t_n converge a s da destra

$t_n \geq s \quad \lim_{n \to \infty} t_n = s$.

$\{\omega \in \Omega' : X_s(\omega) = i\}$ ha la stessa probabilità di $\{X_s = i\}$

$= \{\omega \in \Omega' \text{ t.c. } \exists n = n(\omega) \text{ t.c. } X_{t_k}(\omega) = i \quad \forall k \geq n\}$

$= \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\omega \in \Omega' : X_{t_k}(\omega) = i \quad \forall k \geq n\} =$

$= \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} \{\omega \in \Omega' : X_{t_k}(\omega) = i\}$

$1 = P(s,s)_i^i = \mathbb{P}(X_s = i \mid X_s = i) =$

$= \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega' : X_s(\omega) = i\} \mid X_s = i) =$

$$= \mathbb{P}\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{\bigcap_{k=n}^{\infty} \{\omega \in \Omega' : X_{t_k}(\omega) = i\}}_{E_n \subset E_{n+1}} \Big| X_s = i \Big) \Rightarrow$$

$$1 = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\mathbb{P}\Big(\bigcap_{k=n}^{\infty} \{\omega \in \Omega' : X_{t_k}(\omega) = i\} \Big| X_s = i \Big)}$$

$$\wedge|$$

$$\mathbb{P}\big(\{\omega \in \Omega' : X_{t_n}(\omega) = i\} \big| X_s = i \big) \leq 1$$

$$\exists \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\big(\underbrace{\{\omega \in \Omega' : X_{t_n}(\omega) = i\}}_{\subseteq \{X_{t_n} = i\}} \big| X_s = i \big) = 1$$

$$\exists \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_{t_n} = i \mid X_s = i) = 1$$

$$\exists \lim_{n\to\infty} P(s,t_n)^i_i = 1 \qquad \Leftarrow$$

$$j \neq i \qquad 0 \leq P(s,t_n)^i_j \leq 1 - P(s,t_n)^i_i \longrightarrow 0$$

$$\exists \lim_{n\to\infty} P(s,t_n)^i_j = 0 \qquad j \neq i \qquad \Leftarrow$$

$$\exists \lim_{n\to\infty} P(s,t_n) = Id$$

Per il lemma di collegamento $\exists \lim_{t\to s^+} P(s,t) = Id$

CATENE DI MARKOV A TEMPO CONTINUO

Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato completo

Sia $(X_t)_{t \geq 0}$ processo stocastico su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$, con insieme degli stati S discreto e continuo da destra

Dico che $(X_t)_{t \geq 0}$ è una catena di Markov se

$\forall n \in \mathbb{N}$

$\forall\ 0 \leq t_0 < t_1 < \dots t_{n-1}$ e $\forall i_0, \dots, i_{n-1} \in S$ t.c.

$$\mathbb{P}(X_{t_0} = i_0, X_{t_1} = i_1, \dots X_{t_{n-1}} = i_{n-1}) > 0$$

e $\forall t_n > t_{n-1}$ e $\forall i_n \in S$ si ha

$$\mathbb{P}(X_{t_n} = i_n \mid X_{t_{n-1}} = i_{n-1}) = \mathbb{P}(X_{t_n} = i_n \mid X_{t_{n-1}} = i_{n-1}, \dots X_{t_0} = i_0)$$

— o —

PROP Sia $(X_t)_{t \geq 0}$ catena di Markov con spazio degli stati S (discreto) e matrici di transizione $P(s,t)$ $0 \leq s \leq t$.

Allora

$$\forall s \leq z \leq t \qquad \begin{cases} P(s,t) = P(s,z) P(z,t) \\ P(s,s) = Id \end{cases}$$

EQ. DI CHAPMAN-KOLMOGOROV

dim $P(s,t)^i_j = \mathbb{P}(X_t = j \mid X_s = i) = \sum_{k \in S} \mathbb{P}(X_t = j, X_z = k \mid X_s = i)$

$\{X_z = k\}$ $k \in S$ è una partizione di Ω

$$= \sum_{k \in S} \frac{\mathbb{P}(X_t = j, X_z = k, X_s = i)}{\mathbb{P}(X_z = k, X_s = i)} \frac{\mathbb{P}(X_z = k, X_s = i)}{\mathbb{P}(X_s = i)}$$

$$= \sum_{k \in S} \mathbb{P}(X_t = j \mid X_z = k, \cancel{X_s = i}) \, \mathbb{P}(X_z = k \mid X_s = i)$$

$$= \sum_{k \in S} P(z,t)^k_j \, P(s,z)^i_k = P(s,z) P(z,t)$$

Corollario: CASO OMOGENEO

$0 \leq s < \tau < t \qquad P(s,t) = P(s,\tau)P(\tau,t)$

Scelgo $s=0 \qquad P(t) = P(0,t) = \underbrace{P(0,\tau)}_{P(\tau)} P(\tau,t)$

$$P(t) = P(\tau)\underbrace{P(\tau,t)}_{=P(0,t-\tau)} = P(\tau)P(t-\tau)$$

$$\forall s,t \geq 0 \quad P(t+s) = P(t)P(s) = P(s)P(t)$$

— o —

Serie di potenze in $\mathbb{R}$

Sia $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ successione in $\mathbb{R}$

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots$$

si dice serie di potenze; $t_0 \in \mathbb{R} \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k (t-t_0)^k$

Si chiama insieme di convergenza l'insieme

$$I = \{ t \in \mathbb{R} : \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \text{ converge} \}$$

Si dimostra che si possono verificare solo i seguenti casi:

1) $I = \{0\}$
2) $I = \mathbb{R}$
3) I è un intervallo centrato in 0 $\begin{cases} (-\delta,\delta) \\ [-\delta,\delta) \\ (-\delta,\delta] \\ [-\delta,\delta] \end{cases} \quad \delta > 0$

Se $I \neq \{0\}$, allora la funzione "somma della serie"

$$f: t \in I \longmapsto \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \in \mathbb{R}$$

è continua e C^∞ in $\text{int}(I)$ e

$$\forall t \in \text{int}(I) \qquad f'(t) = \frac{d}{dt}\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dt}(a_k t^k)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} k a_k t^{k-1}$$

— o —

Sia $a_k = \frac{\alpha^k}{k!}$. Ma la serie di potenze $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k t^k}{k!}$

Converge assolutamente $\forall t \in \mathbb{R}$ $(\Rightarrow I = \mathbb{R})$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\alpha t|^k}{k!} \qquad \alpha t \neq 0 \qquad \frac{|\alpha t|^{\cancel{k}+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{\cancel{|\alpha t|^k}} = \frac{|\alpha t|}{k+1} \xrightarrow{k \to \infty} 0 < 1$$

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha t)^k}{k!} \qquad C^\infty(\mathbb{R}) \qquad = e^{\alpha t}$$

— o —

$(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ $\qquad A_k \in M_{N \times N}(\mathbb{R})$

$t \in \mathbb{R}$ $\qquad \sum_{k=0}^{\infty} A_k t^k$ $\qquad \sum_{k=0}^{n} A_k t^k \in M_{N \times N}(\mathbb{R})$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}$

Se $\|\cdot\|$ è una qualsiasi norma su $M_{N \times N}(\mathbb{R})$ e se

$\sum_{k=0}^{\infty} \|A_k\| \, |t|^k$ converge, allora $\sum_{k=0}^{\infty} A_k t^k$ converge.

Fisso $Q \in M_{N \times N}(\mathbb{R})$ $\qquad A_k = \frac{1}{k!} Q^k \in M_{N \times N}(\mathbb{R})$ $\quad \forall k$

? $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{Q^k}{k!} t^k$ converge ?

A matrice $N \times N$ $\qquad \|A\|_2 = \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ \mathbb{R}^N}} \underbrace{\|Ax\|}_{\mathbb{R}^N}$

$\|AB\|_2 \le \|A\|_2 \cdot \|B\|_2$

$\|Q^2\|_2 \le \|Q\|_2^2$ e per induzione $\|Q^k\|_2 \le \|Q\|_2^k$

$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{Q^k}{k!} t^k$ Considero la serie delle norme

cioè $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|t|^k}{k!} \|Q^k\|_2$

$0 \le \frac{|t|^k}{k!} \|Q^k\|_2 \le \frac{|t|^k}{k!} \|Q\|_2^k$

$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|t|^k}{k!} \|Q\|_2^k$ $\qquad \sum \frac{\alpha^k |t|^k}{k!}$ $\qquad \alpha = \|Q\|_2$

Converge $\forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow$ la serie delle norme per il criterio del confronto tra serie ad addendi non negativi converge.

Quindi la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{Q^k t^k}{k!}$ converge ad una matrice $M(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

La matrice "somma della serie" si indica $e^{Qt} = \exp(tQ)$

PROPRIETÀ Se $Q_1, Q_2 \in M_{N \times N}(\mathbb{R})$ commutano, allora

$$e^{tQ_1} \cdot e^{tQ_2} = e^{tQ_2} \cdot e^{tQ_1} = e^{t(Q_1+Q_2)}$$

"DIM" $\quad e^{Q_1 t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{Q_1^k t^k}{k!} \qquad e^{Q_2 t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{Q_2^k t^k}{k!}$

$$e^{Q_1 t} = Id + Q_1 t + \frac{Q_1^2}{2} t^2 + \frac{Q_1^3 t^3}{3!} + \ldots$$

$$e^{Q_2 t} = Id + Q_2 t + \frac{Q_2^2}{2} t^2 + \frac{Q_2^3 t^3}{3!} + \ldots$$

$$e^{Q_1 t} \cdot e^{Q_2 t} = Id + (Q_2 + Q_1) t +$$

$$+ \left(\frac{Q_2^2}{2} + Q_1 Q_2 + \frac{Q_1^2}{2} \right) t^2 +$$

$$+ \left(\frac{Q_2^3}{3!} + \frac{Q_1 Q_2^2}{2} + \frac{Q_1^2}{2} Q_2 + \frac{Q_1^3}{3!} \right) t^3 + \ldots$$

$$= Id + (Q_1 + Q_2) t + \frac{1}{2} \left(Q_2^2 + Q_1 Q_2 + Q_2 Q_1 + Q_1^2 \right) t^2$$

$$+ \frac{1}{3!} \left(Q_2^3 + 3 Q_1 Q_2^2 + 3 Q_1^2 Q_2 + Q_1^3 \right) t^3 + \ldots$$

$$= Id + (Q_1 + Q_2) t + \frac{(Q_1 + Q_2)^2}{2} t^2 + \frac{(Q_1 + Q_2)^3}{3!} t^3 + \ldots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(Q_1 + Q_2)^k t^k}{k!}$$

$$e^{tQ_1} \cdot e^{tQ_2} = e^{t(Q_1 + Q_2)} = e^{t(Q_2 + Q_1)} = e^{tQ_2} \cdot e^{tQ_1}$$

$$e^{tQ} \cdot e^{tQ} = \left(e^{tQ}\right)^2$$

$$\shortparallel$$

$$e^{tQ + tQ} = e^{2tQ}$$

$$\Rightarrow e^{ntQ} = \left(e^{tQ}\right)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$