PAGERANK - Esercizi - Tempo continuo

Note Title 04/04/2019

$N \qquad \pi = \left(\frac{1}{N}, \frac{1}{N}, \dots, \frac{1}{N}\right) \qquad P = \left(p_{ij} = \frac{1}{N}\right)_{i,j=1 \dots N}$

$$(\pi P)_j = \sum_{i=1}^{N} \pi_i p_{ij} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{N} \cdot \frac{1}{N} = N \cdot \frac{1}{N^2} = \frac{1}{N} = \pi_j \quad \forall j = 1 \dots N$$

— o —

Web di N pagine

$$\mathbb{P}(\text{visito } j) = \sum_{i=1}^{N} \underbrace{\mathbb{P}(\text{visito } j \mid \text{sono su } i)}_{\mathbb{P}_i(\text{visito } j)} \mathbb{P}(\text{sono su } i)$$

$\mathbb{P}_i := \mathbb{P}(\cdot \mid \text{sono su } i)$

$$\mathbb{P}_i(\text{visito } j) = \mathbb{P}_i(\text{visito } j \mid \text{clicco link})\, \mathbb{P}_i(\text{clicco link}) + \mathbb{P}_i(\text{visito } j \mid \text{scrivo indirizzo})\, \mathbb{P}_i(\text{scrivere un indirizzo})$$

$$= \mathbb{P}_i(\text{visito } j \mid \text{clicco link})\, d_i + \frac{(1-d_i)}{N}$$

$d_i := \mathbb{P}_i(\text{clicco link}) \in [0,1] \qquad \mathbb{P}_i(\text{scrivere indirizzo}) = 1 - d_i$

$$\mathbb{P}_i(\text{visito } j \mid \text{clicco un link}) = \begin{cases} 0 & j \text{ non è linkata da } i \\ \frac{1}{N_i} & j \text{ è linkata da } i \end{cases}$$

$N_i :=$ # pagine linkate da i (distinte)

$$\mathbb{P}_i(\text{visito } j \mid \text{scrivo indirizzo}) = \frac{1}{N}$$

$$\mathbb{P}(\text{visito } j) = \sum_{i=1}^{N} \Big(\underbrace{d_i \mathbb{P}_i(\text{visito } j \mid \text{clicco link}) + \frac{1-d_i}{N}}_{p_{ij}}\Big) \mathbb{P}(\text{sono su } i)$$

$\omega \in \Omega \qquad X_n(\omega) \qquad (X_n)_{n \in \mathbb{N}} \qquad S = \{1 \dots N\}$

$$\mathbb{P}(X_n = j) = \sum_{i=1}^{N} p_{ij}\, \mathbb{P}(X_{n-1} = i)$$

$$P = (p_{ij})_{i,j=1 \dots N}$$

$$\sum_{j=1}^{N} p_{ij} = \sum_{j=1}^{N} \left(d_i \, \mathbb{P}_i(X_n = j \mid \text{clicco link}) + \frac{(1-d_i)}{N} \right)$$

$$= \sum_{j \text{ non linkate da } i} \frac{1-d_i}{N_i} + \sum_{j \text{ linkate da } i} \frac{d_i}{N_i} + \frac{1-d_i}{N}$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \frac{1-d_i}{N} + \sum_{j \text{ linkate da } i} \frac{d_i}{N_i} = \cancel{N} \frac{1-d_i}{\cancel{N}} + \cancel{N_i} \frac{d_i}{\cancel{N_i}} = 1$$

Se $d_i \in [0,1) \Rightarrow p_{ij} > 0 \quad \forall i,j$ $\qquad d_i = 0.85 \quad \forall i$

$$\pi(n)_j = \mathbb{P}(X_n = j) \qquad \pi(n-1)_j = \mathbb{P}(X_{n-1} = j)$$

$$\pi(n) = \pi(n-1) P$$

— o —

ESERCIZIO Determinare una matrice stocastica regolare P avente $\pi = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right)$ come pro fisso

$N = 3$

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$i \neq j \qquad p_{ij} = \frac{1}{\pi_i} \min\{\pi_i q_{ij}, \pi_j q_{ji}\} = \frac{1}{2\pi_i} \min\{\pi_i, \pi_j\}$

$i = 1 \qquad p_{12} = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2} \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right\} = \frac{1}{3}$

$$p_{13} = \frac{1}{\cancel{2}} \cancel{2} \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{6}\right\} = \frac{1}{6}$$

$$P_{11} = 1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

$i=2$ $$P_{21} = \frac{1}{2} 3 \min\left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

$$P_{23} = \frac{1}{2} 3 \min\left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right\} = \frac{1}{2} \cdot \cancel{3} \cdot \frac{1}{\cancel{6}_2} = \frac{1}{4}$$

$$P_{22} = 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$$

$i=3$ $$P_{31} = \frac{1}{2} 6 \min\left\{\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

$$P_{32} = \frac{1}{2} \cdot 6 \min\left\{\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right\} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

$$P_{33} = 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = 0$$

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\pi = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{3}{8}\right)$$

$N = 4$ $$Q = (q_{ij})_{i,j=1\ldots4} = \begin{cases} 0 & i=j \\ \frac{1}{3} & i \neq j \end{cases}$$

$i \neq j$ $$P_{ij} = \frac{1}{\pi_i} \min\{\pi_i q_{ij}, \pi_j q_{ji}\} = \frac{1}{3\pi_i} \min\{\pi_i, \pi_j\}$$

$i=1$ $$P_{12} = \frac{1}{3} 4 \min\left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right\} = \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{6}$$

$$P_{13} = \frac{1}{3} 4 \min\left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right\} = \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{3}$$

$$P_{14} = \frac{1}{3} 4 \min \left\{ \frac{1}{4}, \frac{3}{8} \right\} = \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{3}$$

$$P_{11} = 1 - \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right) = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$$

continuare per esercizio

Es.

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\| R^2 - R^4 \| = 2 \Rightarrow \underline{P}$ non è una contrazione

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5/8 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1/2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1/16 & 5/8 & 3/16 & 1/8 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\| R^2 - R^4 \| = 2$

$$P^3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{32} & \frac{9}{16} & \frac{11}{32} & \frac{1}{16} \\ \frac{5}{8} & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{43}{64} & \frac{5}{32} & 5/64 & \frac{3}{32} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$\underline{P^3}$ è una contrazione

$x P^{\cancel{4}} = x$

$$(x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4)\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4)$$

$$\begin{cases} x_2 + \frac{1}{4}x_3 = x_1 \\ \frac{1}{2}x_1 + x_4 = x_2 \leftarrow \\ \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{4}x_3 = x_3 \\ \frac{1}{2}x_3 = x_4 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

$$x_4 = \frac{1}{2}x_3 = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}x_1 = \frac{1}{3}x_1$$

$$\frac{3}{\cancel{4}_{2}}x_3 = \frac{1}{\cancel{2}}x_1 \qquad x_3 = \frac{2}{3}x_1$$

$$x_2 + \frac{1}{{}_2\cancel{4}}\cdot\frac{\cancel{2}}{3}x_1 = x_1$$

$$x_2 = \frac{5}{6}x_1$$

$$x_1\left(1 + \frac{5}{6} + \underbrace{\frac{2}{3} + \frac{1}{3}}_{1}\right) = 1$$

$$x_1 \frac{17}{6} = 1$$

$$x_1 = \frac{6}{17} \qquad x_4 = \frac{1}{3}\,\frac{6}{17} = \frac{2}{17} \qquad x_2 = \frac{5}{6}\,\frac{6}{17} = \frac{5}{17} \qquad x_3 = \frac{2}{\cancel{3}_1}\,\frac{\cancel{6}^{2}}{17} = \frac{4}{17}$$

$$x = \left(\frac{6}{17}, \frac{5}{17}, \frac{4}{17}, \frac{2}{17}\right)$$

— o —

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 0 & 3/4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \leftarrow \\ \\ \leftarrow \end{matrix} \qquad \|R^2 - R^4\|_1 = 2$$

$$P^2 = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/8 & 1/2 & 3/8 & 0 \\ 5/16 & 1/8 & 9/16 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \qquad \|R^i - R^j\|_1 < 2$$

$\Rightarrow$ $\underline{P^2}$ è contrazione

$xP = x$

$$(x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4)\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{4}x_3 = x_1 \\ \frac{1}{2}x_1 + x_4 = x_2 \\ \frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{4}x_3 = x_3 \\ \frac{1}{2}x_2 = x_4 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

$x_4 = \frac{1}{2}x_2$

$\frac{1}{2}x_2 = \frac{1}{4}x_3 \qquad x_3 = 2x_2$

$\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 = x_2 \qquad x_1 = x_2$

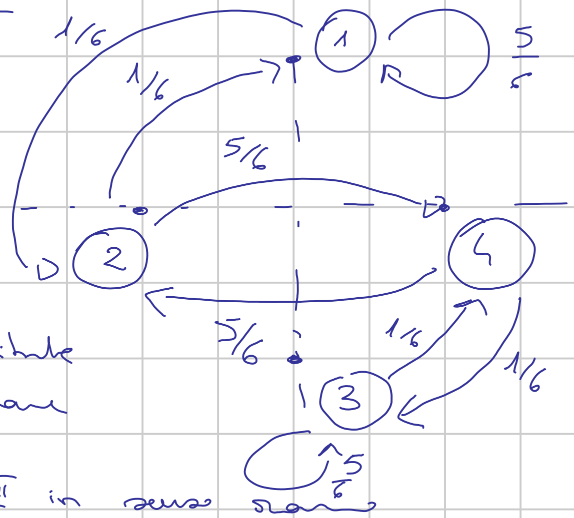
$x_2\left(1 + 1 + 2 + \frac{1}{2}\right) = 1$

$x_2 \frac{9}{2} = 1$

$x_2 = \frac{2}{9} \quad x_1 = \frac{2}{9} \quad x_3 = \frac{4}{9} \quad x_4 = \frac{1}{9} \qquad x = \left(\frac{2}{9}, \frac{2}{9}, \frac{4}{9}, \frac{1}{9}\right)$

$e^{ik\frac{\pi}{2}} \qquad k = 1, 2, 3, 4$

$$P = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{5}{6} \\ 0 & 0 & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} & 0 \end{pmatrix}$$



irriducibile e regolare

periodica $\Rightarrow$ un passo di $\frac{\pi}{2}$ in senso orario

k pari escono periodi diversi $\Rightarrow$ un passo di π

k dispari, stesso periodo

ESERCIZIO

$$P = \begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\begin{array}{cccccccc|c} & & & & & & & & \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} P = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{5} & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 & \frac{2}{5} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \quad\;\; 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{matrix} & \end{array}$$

$$B := \sum_{k=0}^{7} P^k$$

$$B = \begin{array}{c|cccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline 1 & x & x & x & x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & x & x & x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & x & x & x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & x & x & x & x & x & x & 0 & 0 \\ 6 & x & x & x & x & 0 & x & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x & x \\ 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x & x \end{array}$$

$C_1 = \{4\}$

$C_2 = \{7, 8\}$

$T = \{1, 2, 3, 5, 6\}$

PROCESSI STOCASTICI A TEMPO CONTINUO

$(X_t)_{t\geq 0}$ $\qquad$ X_t v.a. su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$

$X_t(\Omega) \subseteq S$ insieme discreto $\forall t \geq 0$

$X_t = 1$

$X_t = 0$

$0 \le s < t$ $\qquad$ $N(s,t) :=$ # di volte che l'evento a cui sono interessato si verifica nell'intervallo di tempo $(s,t]$

$(s,\tau]$ $\qquad$ $(\tau,t]$ $\qquad$ $N_{(s,t]} = N_{(s,\tau]} + N_{(\tau,t]}$

$N_{(t,t]} = 0$

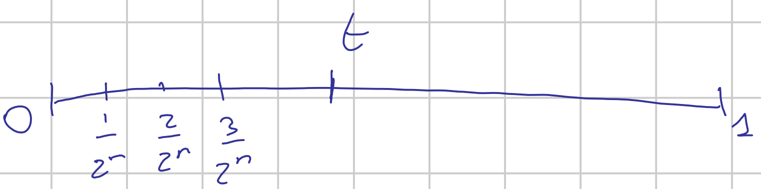
$\forall \mathcal{J}$ famiglia di intervalli disgiunti 2 a 2
$(N_I)_{I\in\mathcal{J}}$ è una famiglia di v.a. indipendenti

$\to$ $\mathbb{P}_{N_{(s,t]}} = \mathbb{P}_{N_{(s+h,\, t+h)}}$ $\qquad \forall h \geq 0 \qquad \forall 0 \le s < t$

$\mathbb{E}[N_{(s,t]}] < +\infty$

— o —

Supponiamo che $\exists\, t \in [0,1]$ t.c. l'evento accade almeno 2 volte contemporaneamente al tempo t



$n \in \mathbb{N}$

2^n parti uguali

$\exists\, K = 1, \dots 2^n \qquad t \in \left[\frac{K-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right] = I_{k,n}$

$F := \{$ l'evento si verifica almeno 2 volte contemporaneamente ad un qualche tempo $t \in [0,1] \} =$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{K=1}^{2^n} \{ \omega \in \Omega : N_{I_{k,n}}(\omega) \geq 2 \}$$

Si dimostra che $\mathbb{P}(F) = 0$ SSE

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{\mathbb{P}(N_{(0,\varepsilon]} \geq 2)}{\varepsilon} = 0$$

PROCESSO DI POISSON

$(N_t)_{t \geq 0}$ processo stocastico a valori interi si dice un processo di Poisson di intensità $\lambda > 0$ se:

1) $N_0(\omega) = 0$ $\mathbb{P}$qo $\omega \in \Omega$
2) Per po $\omega \in \Omega$ $\quad t \in [0, +\infty) \longmapsto N_t(\omega)$ è non decrescente e continua da destra
3) $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad 0 \leq t_0 < t_1 < t_2 \dots < t_n$ le v.a
$N_{t_1} - N_{t_0}, N_{t_2} - N_{t_1} \dots N_{t_n} - N_{t_{n-1}}$ sono indip.
4) $\forall t > s \geq 0$ le v.a $N_t - N_s$ hanno distribuzione di Poisson di parametro $\lambda(t-s)$

$\forall k \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}(N_t - N_s = k) = e^{-\lambda(t-s)} \frac{(\lambda(t-s))^k}{k!}$$

— o —

$N_0 = 0$ $\mathbb{P}$-qc.

$$\mathbb{P}(N_t = k) = e^{-\lambda t} \frac{\lambda^k t^k}{k!} \qquad \mathbb{E}[N_t] = \lambda t$$

X di Poisson di parametro λ

$X(\Omega) = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$

$\forall k \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$T_0(\omega) = 0$$
$$T_1(\omega) = \min\{t > 0 : N_t(\omega) > N_0(\omega)\}$$
$$T_{n+1}(\omega) = \min\{t > T_n(\omega) : N_t(\omega) \neq N_{T_n(\omega)}(\omega)\}$$

$$S_1(\omega) = T_1(\omega)$$
$$\forall n \geq 2 \quad S_n(\omega) = T_n(\omega) - T_{n-1}(\omega)$$

Dico che X ha distribuzione esponenziale di parametro $\lambda > 0$ se $\mathbb{P}_X$ è A.C. con densità

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

Di conseguenza $F_X(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda t} & t > 0 \end{cases}$

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda} \qquad Var[X] = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$\mathbb{P}(X \leq t+s \mid X \geq t) = \mathbb{P}(X \leq s) \qquad \forall t, s \geq 0$$

— o —

TEOREMA Sono fatti equivalenti

1) $(N_t)_{t\geq 0}$ è un processo di Poisson di intensità α
2) Le v.a. $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dei tempi di attesa tra incrementi successivi di N_t sono i.i.d. e con legge esponenziale di parametro α.

$(X_t)_{t\geq 0}$ processo stocastico a tempo continuo e stati discreti S.

$\forall i,j \in S \quad \forall t \geq s \geq 0$

$$P(s,t)^i_j := \begin{cases} \mathbb{P}(X_t = j \mid X_s = i) & \text{se } \mathbb{P}(X_s = i) > 0 \\ \delta_{ij} & \text{se } \mathbb{P}(X_s = i) = 0 \end{cases}$$

La matrice $P(s,t) = \left(P(s,t)^i_j\right)_{i,j\in S}$ è una matrice stocastica ed è detta MATRICE DELLE PROBABILITÀ DI TRANSIZIONE DA X_s A X_t.

$$\mathbb{P}(X_t = j) = \sum_{i \in S} \mathbb{P}(X_t = j \mid X_s = i)\, \mathbb{P}(X_s = i)$$

$\pi(t)$ vettore delle densità di X_t $\quad \pi(t)_j = \mathbb{P}(X_t = j) \quad \forall j \in S$

$$\pi(t) = \pi(s)\, P(s,t)$$

Il processo stocastico si dice omogeneo se
$$P(s+h, t+h) = P(s,t) \qquad \forall 0 \leq s < t \quad \forall h > 0$$

Scegliendo $s = 0$ $\quad P(h, t+h) = P(0,t) =: P(t)$

— o —

$\in \mathcal{E} \quad \forall t \in [a,b]$

$$\underbrace{\{X_t = i \quad \forall t \in [a,b]\}}_{} = \bigcap_{t \in [a,b]} \overbrace{\{X_t = i\}}$$

$\mathcal{D}$ denso e numerabile in $[0,+\infty)$

$$\{X_t = i \quad \forall t \in [a,b] \cap \mathcal{D}\} = \bigcap_{t \in [a,b]\cap\mathcal{D}} \{X_t = i\}$$

Uno spazio probabilistico $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ si dice completo se $\forall A \subset \Omega$ t.c. $\exists \Omega_0 \in \mathcal{E}$ $\mathbb{P}(\Omega_0) = 0$ t.c. $A \subseteq \Omega_0$, allora $A \in \mathcal{E}$.

— · —

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad \lim_{t \to s^+} f(t) = f(s)$

$\omega \in \Omega$ $\quad X_t(\omega) \in S$ discreto $\quad X_t(\omega) = X_s(\omega)$
$t \in [s, s+\delta)$

— · —

DEF Sia $(X_t)_{t \geq 0}$ processo stocastico a tempo continuo e stati discreti su uno spazio probabilistico completo $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$. Il processo stocastico $(X_t)_{t \geq 0}$ si dice CONTINUO DA DESTRA se per $\mathbb{P}$-q.o. $\omega \in \Omega$ e $\forall t \geq 0$ e $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta = \delta(t, \varepsilon, \omega) > 0$ t.c. $X_s(\omega) = X_t(\omega)$ $\forall s \in [t, t+\delta)$